Metaforická existence komplexních čísel

Petr Kůrka

1 Existence matematických objektů

V otázce existence matematických objektů se současná filosofie matematiky pohybuje mezi dvěmi krajními pozicemi platonismu a formalismu.

> Podle platonismu jsou matematické objekty reálné. Jejich existence je objektivní fakt, zcela nezávislý na našich znalostech o nich. Nekonečné množiny, nespočetně nekonečné množiny, nekonečně-dimensionální variety, křivky které vyplňují prostor - všechny tyto exponáty matematického zoo jsou určité objekty, některé známé a některé neznámé. Tyto objekty samozřejmě nejsou fyzikální ani materiální. Existují mimo čas a prostor fyzikální existence. Jsou neměnné - nebyly stvořeny a nikdy se nezmění ani nezaniknou. Na každou otázku týkající se matematických objektů existuje odpověď, ať už jsme ji schopni nalézt nebo ne. Matematik je empirický vědec podobně jako geolog. Nemůže cokoliv vynalézt, protože vše už zde je. Může pouze objevovat. $\cdots$
>
> Podle formalismu, na druhé straně, žádné matematické objekty nejsou. Matematika sestává z axiomů, definic a vět - jinými slovy, z formulí. Existují pravidla jak odvozovat formule z jiných formulí, ale formule o ničem nejsou; jsou to pouhé řetězce symbolů. Formalista samozřejmě ví, že matematické formule se někdy aplikují na fyzikální problémy. Pokud se nějaká formule interpretuje fyzikálně, získává význam a může být pravdivá nebo nepravdivá. Ale její pravdivost je spojena s tou kterou fyzikální interpretací. Čistě matematická formule nemá žádný význam a žádnou pravdivostní hodnotu. (Davis a Hersh [6] str. 318)

Zatímco formalismus zcela pomíjí otázky smyslu, motivace a interpretace matematických výsledků, platonismus se jen těžko může vyrovnat s negativními větami matematické logiky jako je Gödelova věta o neúplnosti. V každé dosti silné matematické teorii (rozšíření Peanovy aritmetiky) se vyskytují nerozhodnutelná tvrzení, tj. tvrzení která nelze ani dokázat ani vyvrátit. Teorii lze ovšem rozšířit tak, že takové tvrzení nebo jeho negaci přijmeme za další axiom. V některých případech se volba mezi těmito dvěmi možnostmi přirozeně nabízí, například když takové tvrzení platí v nějaké známé silnější teorii. V jiných případech ale pro přijetí daného tvrzení či jeho negace nejsme schopni nalézt žádné důvody a mohli bychom se rozhodovat zcela náhodně.

To ukazuje Chaitin [4] na diofantických rovnicích, tj. rovnicích v celočíselném oboru vytvořené sčítáním, odčítáním, násobením a umocňováním. Chaitin sestrojil složitou diofantickou rovnici $P_n(x) = 0$ s celočíselným parametrem $n \in \mathbb{N}$ a asi 17000 proměnnými $x \in \mathbb{N}^{17000}$, takovou že $P_n(x) = 0$ má nekonečně mnoho řešení x právě tehdy, když $\Omega_n = 1$. Zde Ω_n je n-tý bit binárního rozvoje pravděpodobnosti zastavení universálního Turingova stroje. O tomto čísle Chaitin dokazuje, že je podle všech kritérií zcela náhodné. Všechny konečné bitové řetězce určité délky se v jeho binárním rozvoji vyskytují se stejnou pravděpodobností, neexistuje algoritmus, který by hodnoty Ω_n počítal, žádný počáteční úsek $\Omega_{[0,n)}$ nelze generovat programem kratším než je on sám, a v každém axiomatickém systému lze rozhodnout nejvýše konečný počet tvrzení tvaru $\Omega_n = 1$. Hodnoty Ω_n jsou navzájem nezávislá matematická fakta.

> Some mathematical facts are true for no reason, they are true by accident! Některá matematická fakta jsou pravdivá bezdůvodně, jsou pravdivá náhodou! (Chaitin [5])

Lakoff a Núñez [7] vidí matematické pojmy a objekty jako ztělesněné (embodied) metafory a jejich existenci nezávislou na člověku explicitně odmítají.

> Matematika je přirozená součást bytí člověkem. Vzniká z našich těl, z našich mozků a z naší každodenní zkušenosti ve světě. Všechny kultury mají nějakou formu matematiky.
>
> Na matematice není nic záhadného, mystického, magického či transcendentního. Je to důležitá oblast, kterou lze vědecky studovat jako druh lidské činnosti. Matematika je důsledek lidské evoluční historie, neurobiologie, kognitivních schopností a kultury. (Lakoff a Núñez [7] str. 377)

Domnívám se však, že jakkoliv tento přístup přináší cenné náhledy na tělesné zakotvení matematických objektů a na metaforičnost matematických pojmů, nemůže plně vysvětlit podivuhodnou provázanost matematiky, vyvstávání neočekávaných souvislostí a estetické kvality některých matematických struktur. Roger Penrose právě v tom vidí argument pro matematický platonismus a dokonce říká, že některé matematické objekty existují více než jiné.

> V matematice jsou věci, pro které je objev mnohem vhodnější pojmenování než vynález. Jsou to ty případy, kdy (matematická) struktura dává ze sebe mnohem více než je do ní vloženo. Pak lze přijmout pohled, že matematici narazili na "Boží dílo". Jsou však jiné případy, kdy matematická struktura nemá tak přesvědčující jedinečnost, jako například, když uprostřed důkazu nějakého výsledku matematik zavádí jakousi důvtipnou konstrukci aby dosáhl specifický cíl. Pak obvykle struktura nedává více než je do ní vloženo a slovo "vynález" je vhodnější než "objev". Jedná se pak o pouhá lidská díla. Na skutečné matematické objevy se díváme jako na větší výkony či aspirace než by byly pouhé vynálezy.

> Takováto kategorizace není zcela nepodobná tomu, jak oceňujeme umělecká nebo inženýrská díla. Velká umělecká díla jsou vskutku "bližší Bohu" než ta běžná. Umělci mají nezřídka pocit, že ve svých největších dílech objevují věčné pravdy, které mají jistý druh předběžné éterické existence, zatímco jejich menší díla jsou svým způsobem libovolná na způsob lidských konstrukcí. ⋯
>
> Nemohu se ubránit pocitu, že v matematice je důvod pro víru v jistý druh éterické věčné existence přinejmenším těch hlubších matematických pojmů o dost silnější než v ostatních případech. V takových matematických ideách je jakási přesvědčující (compelling) jedinečnost a univerzalita, která se zdá být zcela jiného druhu než jakou lze očekávat v umění či inženýrství. (Penrose [9] str. 96)

To koresponduje s Ricœurovým náhledem, že skutečnost vzniká metaforou a že pojmy včetně matematických pojmů jsou metaforické povahy.

> ⋯ Obvykle míváme tendenci stavět proti sobě "vynalézat" a "nalézat". Ve velkých básnických dílech však není rozdílu mezi vynalézáním a nalézáním - tvořit (v silném slova smyslu) znamená obojí. Je zbytečné se ptát, zda to či ono vidění světa existovalo před vytvořením díla, nebo zda začíná existovat až s dílem samým: obojí je pravda. V jistém smyslu je tvůrce pod tlakem čehosi, co má být řečeno. Vezměme takového Cézanna: maloval stokrát jednu a tu samou horu - proč? Každé to dílo bylo dokonalé. Jenže před ním stálo cosi, co si žádalo být malováno. A přitom ono "cosi" existovalo jen tehdy, když to bylo malováno. V tomto smyslu se malíř, jako každý tvůrce, cítí vázán nekonečným dluhem. Proto tedy říkáme, že vynalézat rovná se nalézat. Přitom však to, co je nalezeno, existuje teprve tehdy, když je to vybudováno dílem. Je to velký paradox. Ale myslím, že ke stejnému paradoxu by nás přivedla epistemologie fyziky nebo astronomie. Newtonovský svět existoval v jistém smyslu před Newtonem, avšak kulturně existuje až po Newtonovi: teprve tehdy začali lidé obývat newtonovský svět. A přitom by bylo absurdní, kdybychom řekli, že Newton vytvořil svět tím, že vytvořil astronomii. V tomto pojetí se poezie zásadně neliší od vědy. Rozšiřuje pouze oblast světa za hranice toho, co je měřitelné a čím můžeme pomocí techniky manipulovat. Nicméně, ty aspekty světa, které zjevuje poezie, jsou právě tak skutečné, jako je skutečné to, co odhaluje a vynalézá věda. Proto musíme mít velmi otevřené pojetí skutečnosti. To, co máme za skutečnost, se neustále mění podle toho, jak ji díla všeho druhu zároveň vynalézají i objevují. (Ricœur: Krize subjektu v západní filosofii [8] str. 122)

Mezi nejpozoruhodnější matematické struktury patří struktura komplexních čísel. Je dokonalá v tom smyslu, že z ní nic nemůže být ubráno ani k ní nemůže být nic přidáno, aniž by se celá jejich stavba zhroutila. Objevují se v ní nečekané souvislosti a překvapivé geometrické vztahy. Těžko se lze ubránit dojmu, že je to jedinečná struktura, proti které nelze uvést žádnou alternativu. Historický vývoj který k ní vedl byl sice značně klikatý s mnoha slepými uličkami, ale v retrospekci se zdá, že zde cosi na objevení čekalo. Na rozdíl od uměleckého díla, které není oddělitelné od svého tvůrce, je struktura komplexních čísel kolektivní dílo, které vznikalo staletým hledáním generací matematiků.

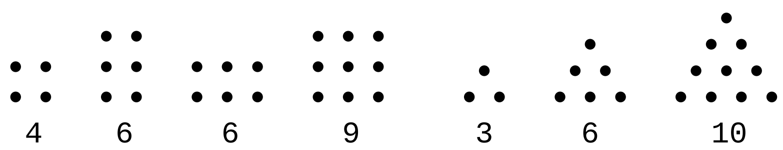
2 Přirozená čísla

Zdá se že malá přirozená čísla jsou antropologickou konstantou, že k lidství neoddělitelně patří. To lze doložit na všech zkoumaných primitivních společnostech, z archeologických nálezů i z vývojové psychologie. Pojem čísla předpokládá schopnost abstrakce a kategorizace. Abychom mohli něco vidět jako počet objektů, musíme být schopni vidět jednotlivé objekty a vidět je jako objekty stejného druhu. Teprve pak můžeme říci: dva, tři, čtyři nebo pět oblázků. To, že při počítání objektů jiného druhu používáme stejné číslovky, není úplně samozřejmé. U některých primitivních kmenů je doloženo (Wilder [12]), že se číslovky liší podle toho, počítáme-li lidi, kanoe, dlouhé předměty nebo placaté předměty. Nahlédneme-li však, že situace kdy vidíme tři kanoe a situace kdy vidíme tři lidi má něco společného, jsme na cestě k pojmu tří. Tento myšlenkový výkon zahlédnutí analogie či společných rysů ve dvou situacích, které původně vnímáme jako odlišné, se pak na vyšší úrovni v matematice mnohokrát opakuje. Přechod od počtu k číslům lze také vnímat jazykově. Dokud říkáme tři oblázky nebo tři stromy, má slovo tři funkci adjektiva. Jednou z vlastností skupiny objektů je, že jsou tři. K pojmu čísla dospějeme, řekneme-li tři samostatně jako substantivum. V dalším stadiu nahlédneme že dva, tři, čtyři, pět mají také cosi společného a tak vzniká obecnější pojem čísla.

K číslům neoddělitelně patří způsoby, kterými s nimi zacházíme. Ke skupině objektů můžeme další objekt přidat a tak od jednoho čísla přejít k číslu následujícímu. Dvě skupiny objektů můžeme vidět jako skupinu jedinou, tedy sečít jejich počty. Promýšlíme-li souvislost těchto dvou operací, můžeme zahlédnout operaci vytvoření následujícího čísla také jako sčítání. K tomu je však třeba nahlédnout jako číslo něco, co jsme jako číslo dosud nevnímali, totiž jednotku. Zdá se ostatně, že ani zařazení dvojky mezi čísla není úplně samozřejmé a že pojem čísla se mohl rozšiřovat od snadno přehlédnutelných čísel 3,4,5 na obě strany. Čísla také můžeme srovnávat podle velikosti a menší číslo od většího odečíst.

Psychologové říkají, že někde kolem pěti až sedmi je hranice, kdy počet vnímáme aniž bychom počítali. Metaforicky však vnímáme jako počty i větší skupiny objektů, které umíme spočítat, tj. dojít k nim postupným přičítáním jednotky. Zde se objevuje nová interpretace čísla jako pořadí. Rozdíl mezi počtem a pořadím se projevuje i jazykově v rozdílu mezi číslovkami základními a řadovými. Operace sčítání a odčítání a relaci uspořádání je možno vidět nejen na fyzických objektech ale i v představě, kde nejsme svázáni žádnými omezeními. Představím-li si číslo, představím si i to že k němu mohu přičíst jednotku, případně vytvořit jeho součet se sebou samým. To otevírá cestu k potenciálnímu nekonečnu jako k nepřítomnosti meze při sčítání a při dalších aritmetických operacích.

K přirozeným číslům patří také násobení. To je jistě pojmově složitější operace než sčítání. Předpokládá, že nahlédneme skupinu dejme tomu tří objektů jako objekt jediný. Skupinu šesti objektů pak můžeme vnímat jako skupinu dvou trojic nebo tří dvojic. Zde již hrají roli geometrické představy obdélníku a čtverce, které vedou na pojmy čísel složených (obdélníkových) a čtvercových. Z této geometrické představy také nahlížíme komutativitu násobení, tj. nezávislost násobení na pořadí, v moderní algebraické symbolice $n \cdot m = m \cdot n$. Teprve dodatečně a v analogii s jinými operacemi jako je právě násobení, můžeme uvažovat o komutativitě sčítání. V představě sčítání jako geometrické či prostorové operace shrnutí dvou skupin objektů do skupiny jediné pořadí vůbec nemusí hrát roli. V zápisu $n + m$ je pořadí sčítanců n a m artefaktem, který je vynucen pouze tímto zápisem.



Obrázek 1: Čísla čtvercová, složená a trojúhelníková

Zatímco sčítání se zdá být kanonickou operací, místo které si jen těžko dokážeme představit alternativu, u násobení již to není tak jednoznačné. Lze například vyjít od trojúhelníkových čísel a jako základní operaci vidět počet objektů v rovnostranném trojúhelníku s daným počtem objektů na jeho stranách, tj. $t(n) = n(n+1)/2$. Násobení $n \cdot m = t(n+m) - t(n) - t(m)$ pak lze zavést jako odvozenou operaci. Ovšem bohatství vztahů které jsou spojeny s násobením, například distributivní zákon $n(m+p) = nm+np$, daleko převyšuje možnosti této trojúhelníkové alternativy.

3 Veličiny

Jiný druh čísel je spojen s kontinuem. Z kontinua lze vydělovat části, na tyto části pohlížet jako na celky a opět z nich vydělovat části. Části kontinua lze srovnávat podle velikosti a lze je sčítat tj. slučovat dohromady, případně odčítat. Jazyk prozrazuje, že kontinuum vnímáme odlišně od skupiny objektů. To se projevuje například v rozdílu mezi "několik" a "trochu": "Po poli běží několik zajíců." x "Dal bych si ještě trochu rýže."

Vydělíme-li určitou část kontinua jako jednotku, lze části kontinua touto jednotkou poměřovat. Podle druhu kontinua dostáváme různé veličiny, které se liší svým fyzikálním rozměrem. Asi nejbližší lidské zkušenosti jsou objemové veličiny: množství vody, vína či obilí, které měříme na vědra či džbány. Další přirozená veličina je délka nebo vzdálenost. Henri Poincaré [10] upozorňuje, že prostor vnímáme jako prostor jen proto, že se v něm pohybujeme. Na nejbližší věci dosáhneme, k vzdálenějším si můžeme dojít. Samotný zrak by na vytvoření prostorové představy nestačil. Všimneme si také, že v ideální situaci je nejkratší cesta přímá. Odtud se vynořuje pojem přímky či úsečky a veličiny délky. V souvislosti s tělesným poznáváním prostoru je významné, že mnoho jednotek délky je odvozeno z lidského těla: palce, stopy, lokte a sáhy. V geometrii se dále setkáváme s veličinami plochy, objemu a úhlu. Dalším druhem kontinua je čas. Čas je přirozeně strukturován střídáním dne a noci, měsíčními fázemi a ročními obdobími. Volba jednotky zde tedy není úplně libovolná, i když máme na výběr více možností. Čas však také prožíváme jako proces, činnost nebo pohyb a můžeme ho poměřovat podle stadia ve kterém se nacházíme, nebo podle vzdálenosti kterou jsme ušli. V této paralele čas nahlížíme jako jednodimenzionální. Můžeme ho chápat cyklicky jako kružnici nebo lineárně jako přímku.

Při měření kontinua nevystačíme vždy s přirozenými čísly. Měříme-li obilí na vědra, poslední vědro může být plné třeba jen ze dvou třetin. Kromě základní jednotky tedy počítáme také s jejími druhými, třetími, či čtvrtými částmi. Pojem čísla se tím rozšiřuje na zlomky, tedy čísla racionální. Veličiny různého druhu (například délka a plocha) se navzájem nedají porovnávat, dají se však porovnávat jejich poměry, které jsou bezrozměrné. Na tom je založena Eudoxova teorie proporcí vyložená v páté knize Eukleidových Základů. Rovnost a uspořádání mezi poměry zavádí pátá a sedmá výměra.

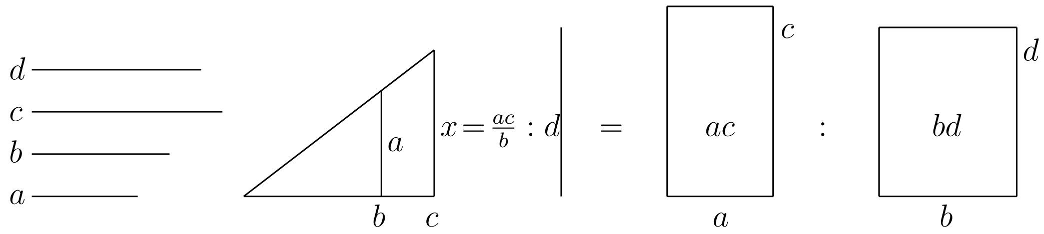
5. Pravíme, že jsou veličiny v témž poměru k sobě, první ke druhé, a třetí ke čtvrté, když stejné násobky veličiny první a třetí nad stejné násobky druhé a čtvrté jsou dle jakékoli násobnosti buď jeden nad druhý zároveň větší buď zároveň stejné buď zároveň menší jsouce vzaty ve vzájemném pořádku.
6. Veličiny mající týž poměr nazýváme úměrou (úměrnými).
7. Když ze stejných násobků násobek veličiny první jest větší než násobek druhé, násobek třetí však není větší než násobek čtvrté, tehdy pravíme, že první ke druhé jest v poměru větším než třetí ke čtvrté.

V moderní symbolice to znamená:

$$\begin{aligned} a:b=c:d &\iff (\forall n,m)(n\cdot a>m\cdot b \iff n\cdot c>m\cdot d) \\ a:b>c:d &\iff (\exists n,m)(n\cdot a>m\cdot b \;\&\; n\cdot c\le m\cdot d) \end{aligned}$$

Eudoxova teorie proporcí se tradičně vykládá jako řešení problému nesouměřitelnosti strany a úhlopříčky čtverce. Její hlavní přínos však možná spočívá v tom, že umožňuje odhlédnout od druhu kontinua který měříme a zcela se odpoutat od fyzikální interpretace. Zatímco každá veličina má fyzikální rozměr, například metry, litry či dny, poměr veličin stejného druhu je bezrozměrný. Protože poměr každých dvou veličin stejného druhu lze převést na poměr délek úseček, lze teorii poměrů vybudovat geometricky, tak jak to dělá Eukleidés. Jako poměry můžeme chápat dokonce i přirozená čísla. Číslo 5 můžeme vidět jako poměr 5 oblázků : 1 oblázek = 5:1 a odhlédnout od objektů které počítáme. V sedmé knize Eukleidových Základů se však číslo chápe jako speciální případ veličiny. První dvě výměry této knihy říkají:

1. Jednotka jest, dle níž každé věci se říká jedna.
2. Číslo pak je množství složené z jednotek.



Obrázek 2: Součin poměrů $(a : b) \cdot (c : d)$

Množství zde ovšem znamená délku úsečky. S délkami úseček totiž pracují všechny důkazy sedmé knihy.

Poměry, které jsou bezrozměrné, lze násobit podle vzorce $(a : b) \cdot (c : d) = (ac : bd)$. Jsou-li a, b, c, d délky, jsou ac, bd obdélníky se stranami a, c a b, d. Tento poměr také můžeme sestrojit pomocí podobných trojúhelníků jako poměr délek $x = \frac{ac}{b} : d$ (obr. 2). V podobných trojúhelnících totiž platí $x : a = c : b$. Protože $xb : ab = x : a = c : b = ac : ab$, rovnají se $xb = ac$ jako plošné obsahy. Odtud již $x : d = xb : bd = ac : bd$. Podobně lze zavést dělení a sčítání poměrů jako poměr plošných obsahů:

$$(a : b)/(c : d) = (ad : bc), \quad (a : b) + (c : d) = (ad + bc : bd).$$

4 Reálná přímka

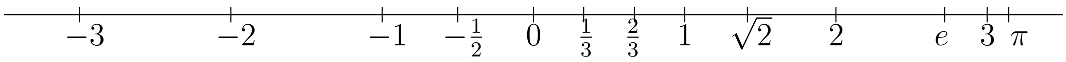
Záporná čísla se v matematice objevují nejprve jako mezivýsledky při výpočtech hodnot kladných veličin, brzy se však také různým způsobem interpretují. Ve finančních transakcích je můžeme chápat jako dluhy, jiná interpretace je dynamická. Zastavíme-li se na cestě, představujeme si vzdálenosti do míst kam směřujeme jako kladné a vzdálenosti od míst které jsme již prošli jako záporné. Časové kontinuum lze strukturovat v orientaci od minulosti přes přítomnost k budoucnosti. Před třemi dny chápeme jako záporné číslo a za tři dny jako kladné číslo. Teprve v souvislosti se zápornými čísly lze také nulu nahlédnout jako číslo.

Mezi základní aritmetické operace patří také umocňování. Antika zná druhou mocninu délkových veličin jako plošný obsah a třetí mocninu jako objem. Čtvrtá mocnina ale žádnou geometrickou interpretaci nemá. Umocňování přirozených čísel se objevuje až později v kombinatorice při počítání slov abecedy. Počet všech možných slov, tj. řetězců písmen délky k sestavených z n-prvkové abecedy je n^k. Například pro binární abecedu $A = \{0, 1\}$ je $2^3 = 8$ slov délky 3:

$$A^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

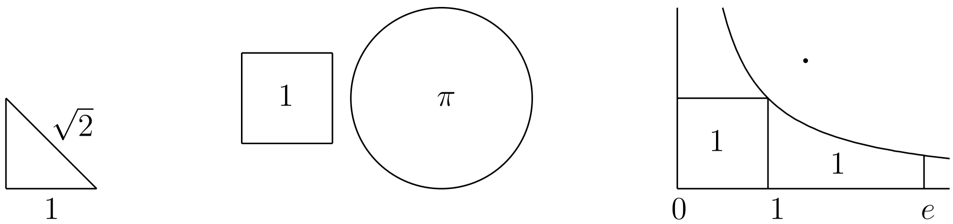
Abstraktně lze zavést mocniny kladných reálných čísel $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n}$. Protože $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ a $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, lze také definovat mociny s racionálním exponentem $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$, a s záporným exponentem $a^{-n/m} = 1/a^{n/m}$. S využitím Eudoxovy teorie proporcí lze pak definovat a^b pro každé b a $a > 0$.

Tradičně se systém reálných čísel vykládá jeko výsledek zúplňování systému přirozených čísel v posloupnosti struktur $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Přirozená čísla nejde vždy odčítat, proto zavádíme celá čísla $\mathbb{Z}$. Celá čísla nelze vždy dělit a proto zavádíme racionální čísla $\mathbb{Q}$. Racionální čísla nelze vždy odmocňovat a proto zavádíme algebraická čísla (jako řešení algebraických rovnic s celočíselnými koeficienty). Toto algebraické zúplnění pořád ještě nestačí, protože nezahrnuje čísla jako π a e. Proto se systém racionálních čísel zúplňuje topologicky pomocí Dedekindových řezů, které množinově-teoretickým jazykem vyjadřují Eudoxův pojem poměru. Přirozenější je však chápat reálná čísla od počátku jako poměry veličin.



Obrázek 3: Reálná přímka

Představa času nebo cesty jako lineárního kontinua vede na metaforu reálné přímky, ve které čísla chápeme jako body na přímce. Zvolíme si na ní počátek (nulový bod), jednotku délky a orientaci. Tím je určena poloha čísla 1 a tím i poloha všech ostatních čísel. Další čísla určujeme geometrickými konstrukcemi. Nanášením jednotkové délky určíme polohu kladných i záporných celých čísel. Pravítkem a kružítkem lze sestrojit n-tý díl jednotkové úsečky a také délky odmocnin přirozených čísel. Další důležitá čísla jako π a e jsou spojena s kružnicí a hyperbolou. Číslo π představuje plošný obsah kruhu jednotkového poloměru, tj. poměr obsahu kruhu k obsahu čtverce nad jeho poloměrem. Číslo e je charakterizováno tím, že útvar omezený pravoúhlou hyperbolou, jednou její asymptotou a kolmicemi k ní v bodech 1 a e, má právě jednotkový obsah (obr. 4).



Obrázek 4: Iracionální čísla

Aritmetické operace představují transformace reálné přímky. Operace $f_a(x) = x + a$ přičtení čísla a znamená posunutí o a doprava, případně posunutí o $-a$ doleva je-li a záporné. Přitom složení těchto operací je opět posunutí $f_a(f_b(x)) = f_{a+b}(x)$, tj. $f_a \circ f_b = f_{a+b}$. Posunutí jsou právě ty transformace reálné přímky, které zachovávají vzdálenost a orientaci. Tyto operace tvoří grupu, to znamená, že složení dvou posunutí je opět posunutí a inverzní operace je také posunutí. Tato grupa transformací určuje eukleidovskou geometrii přímky protože její invariant je právě vzdálenost. Násobení kladným číslem a je operace $g_a(x) = ax$ podobnosti v poměru $a : 1$, a opět se tyto operace dají skládat $g_a \circ g_b = g_{ab}$ a tvoří grupu. Jak spolu násobit záporná čísla není zcela jednoznačné. Už v antice se sice objevuje znaménkový zákon ve smyslu početního pravidla $a - (b - c) = a + c - b$, ale ještě Cardano v 16. století argumentuje pro násobení záporných čísle podle pravidla $(-a) \cdot (-b) = -ab$. Proti tomu lze uvést geometrický argument. Jestliže násobení $g_{-1}(a) = -a$ minus jedničkou převádí kladnou polopřímku na zápornou polopřímku jakoby reflexí, nebo otočením, měla by tato operace převádět také zápornou polopřímku na kladnou. $(-a)(-1) = a$. Násobení minus jedničkou pak představuje otočení reálné přímky o 180°. Také tato transformace zachovává vzdálenost, ne však orientaci.

5 Komplexní čísla

Imaginární jednotka $i = \sqrt{-1}$ se v renesanční matematice objevila v souvislosti s rovnicí třetího stupně $x^3 = 3px + 2q$. Její řešení objevil Scipione del Ferro před rokem 1526 a v roce 1545 ho zveřejnil Girolamo Cardano ve tvaru

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Tento vzorec lze použít kdykoliv $q^2 \geq p^3$. Avšak rovnice má řešení i v případě, že tato podmínka neplatí. V roce 1572 si Rafael Bombelli všimnul, že s odmocninami záporných čísel lze formálně počítat podobně jako s čísly a platnost Cardanova vzorce rozšířit. Na příklad pro $p = 5$, $q = 2$ má rovnice $x^3 = 15x + 4$ řešení $x = 4$. Použijeme-li pravidlo $(\sqrt{-1})^2 = -1$, dostáváme

$$\begin{aligned} (2 \pm \sqrt{-1})^3 &= 8 \pm 12\sqrt{-1} - 6 \mp \sqrt{-1} = 2 \pm 11\sqrt{-1}, \\ x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4. \end{aligned}$$

Bombelli tedy uviděl imaginární jednotku $i = \sqrt{-1}$ metaforicky jako číslo a začal s ní jako s číslem zacházet. Tato metafora se ukázala být velmi plodnou. Aritmetické operace s imaginární jednotkou rozšiřují pojem (reálného) čísla na komplexní čísla tvaru $z = a + bi$. Jeho reálná část je $a = \Re(z)$ imaginární část je $b = \Im(z)$. Komplexní čísla lze sčítat, odčítat, násobit, dělit i odmocňovat.Všechny tyto operace jsou založeny na jediném vztahu $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + b) + (c + d)i \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\ \frac{1}{a + bi} &= \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \\ \sqrt{a + bi} &= \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \operatorname{sgn}(b) \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \cdot i \right) \end{aligned}$$

Při rozvíjení metafory imaginární jednotky jako čísla se objeví další překvapivé vztahy. Tak například součtové vzorce pro sinus a cosinus lze v komplexních číslech napsat jediným jednodušším vztahem (de Moivrova formule)

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)
\end{aligned}$$

Vidíme, že funkce $\cos x + i\sin x$ se chová podobně jako exponenciála, která také převádí součet na součin: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Vztah mezi exponenciálou a goniometrickými funkcemi se projeví v diferenciálním a integrálním počtu, kde vyniknou vyjímečné vlastnosti těchto funkcí. Integrál mocninné funkce je také mocninná funkce s jedinou vyjímkou inverzní funkce $f(x) = 1/x$, jejíž integrál definuje přirozený logaritmus.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},\quad n \neq -1,\quad \int \frac{dx}{x} = \ln x.$$

Exponenciální funkci pak dostaneme jako funkci inverzní k logaritmu. Podobným postupem lze získat i funkce goniometrické, počítáme-li integrál funkce $1/P(x)$, kde $P(x)$ je kvadratická funkce. Dá-li se rozložit na lineární členy, integrál vyjádříme logaritmem. V opačném případě dostáváme novou funkci $\arctan x$. Rozložíme-li $x^2+1 = (x-i)(x+i)$, nabízí se její vztah k logaritmu.

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\ln\frac{x-a}{x-b},\quad \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x \stackrel{?}{=} \frac{1}{2i}\ln\frac{x-i}{x+i}$$

Z funkce $\tan x$, která je inverzní k $\arctan x$, pak již algebraicky odvodíme další goniometrické funkce sinus a cosinus. Význačné vlastnosti mají tyto funkce vzhledem k derivaci:

$$(e^x)' = e^x,\quad \sin' x = \cos x,\quad \cos' x = -\sin x.$$

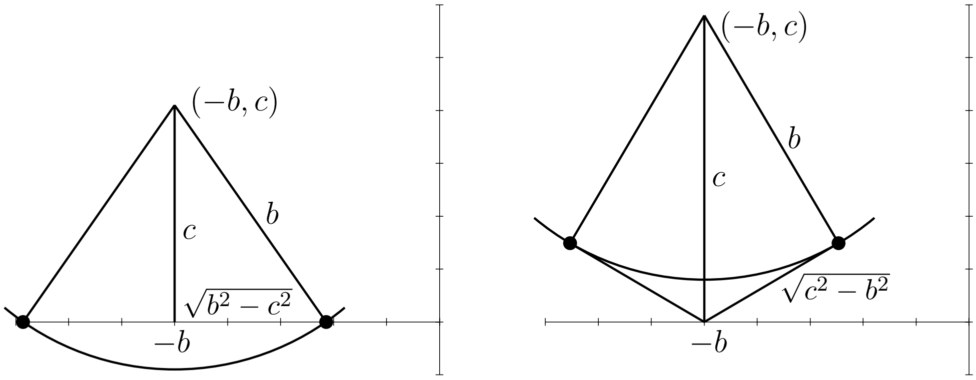
Další podobnosti se objeví když je vyjádříme mocninnými řadami

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots
\end{aligned}$$

Definujeme-li exponenciálu imaginárního čísla stejným způsobem jako v reálné oblasti, dostáváme Eulerův vztah (publikovaný roku 1748)

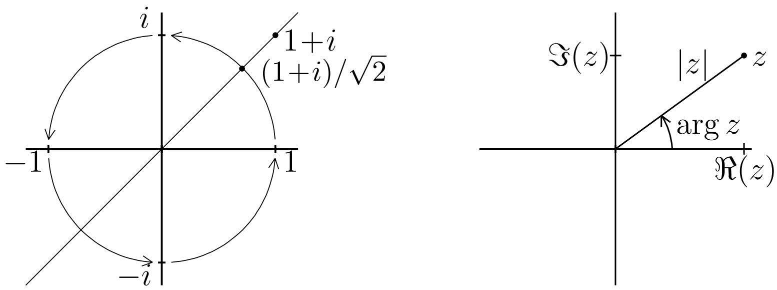
$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \cdots \\
&= \cos x + i\sin x.
\end{aligned}$$

Je pozoruhodné, že všechny tyto výsledky byly získány formálně algebraicky bez využití geometrického náhledu kterým je dnes komplexní rovina. Tu objevil



Obrázek 5: Wallisova reprezentace komplexních čísel

až Argand roku 1806. Nesamozřejmost tohoto náhledu vidíme na Wallisově reprezentaci komplexních čísel z roku 1673. Wallis vychází z geometrické konstrukce řešení kvadratické rovnice $x^2 + 2bx + c^2 = 0$. Pokud je $b^2 > c^2$, existují dvě řešení $x = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$ a lze je sestrojit kružítkem a pravítkem jako průsečíky kružnice se středem v bodě $(-b, c)$ a poloměrem b s reálnou přímkou (obr. 5 vlevo). Je-li $b^2 < c^2$, kružnice se středem $(-b, c)$ a poloměrem b osu x neprotne. Wallis na tuto kružnici umísťuje řešení $x = -b \pm i\sqrt{c^2 - b^2}$ do vzdálenosti $\sqrt{c^2 - b^2}$ od bodu $(-b, 0)$ (obr. 5 vpravo). Wallisova reprezentace se neujala, protože nemá dobré geometrické vlastnosti. Například čísla i a $-i$ mají stejné umístění.



Obrázek 6: Komplexní rovina

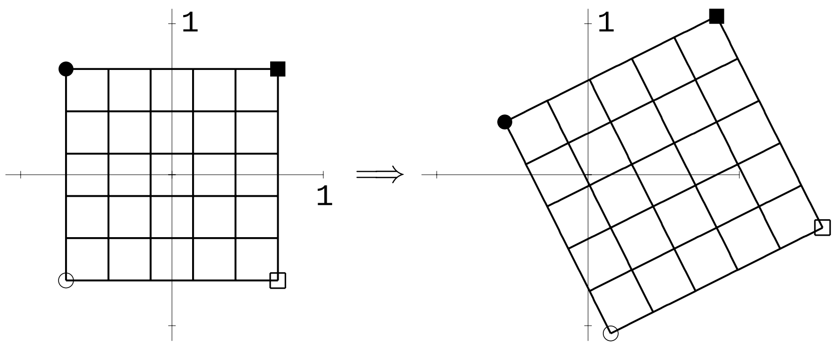
6 Komplexní rovina

Umístění komplexních čísel v rovině lze odůvodnit geometrickou interpretací operace násobení. Pro kladné $a > 0$ představuje transformace $g_a(x) = ax$ podobnost reálné přímky s koeficientem a. Přitom skládání těchto podobností odpovídá násobení příslušných koeficientů $g_a \circ g_b = g_{ab}$. Interpretujeme-li transformaci násobení jako pohyb, reálná přímka při něm neopouští své místo. Naproti tomu transformace $g_{-1}(x) = -x$ odpovídá otočení reálné přímky o $180°$ a tento pohyb se může uskutečnit jedině v nějakém prostoru vyšší dimenze, například v rovině. Má-li pro transformaci g_i násobení imaginární jednotkou platit $g_i \circ g_i = g_{-1}$, měla by představovat otočení o $90°$. Číslo i je tedy třeba umístit na kolmici k reálné přímce ve vzdálenosti 1 od nuly. Tím současně dostáváme umístění všech imaginárních čísel na kolmici k reálné přímce. Podobně násobení odmocninou z i, tj. $\sqrt{i} = \pm(1+i)/\sqrt{2}$ by mělo představovat otočení o 45°, takže čísla $\pm(1+i)/\sqrt{2}$ a všechny jejich reálné násobky je třeba umístit na přímku, která svírá s reálnou i imaginární osou úhel 45°. Takto postupně vyplníme celou rovinu komplexními čísly a nahlédneme význam polární reprezentace komplexních čísel. Číslo tvaru $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ je třeba umístit na přímku která svírá s reálnou přímkou úhel φ do vzdálenosti r od nuly (obr. 6). V tomto kontextu se jeví význam pojmu absolutní hodnoty $|z| \geq 0$ a argumentu $\arg z \in [0, 2\pi)$ komplexního čísla $z = a + bi$, které jsou definovány vztahy

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\arg z = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\arg z = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Při násobení komplexních čísel se násobí absolutní hodnoty a sčítají argumenty.

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\arg z + \arg w) + i\sin(\arg z + \arg w))$$

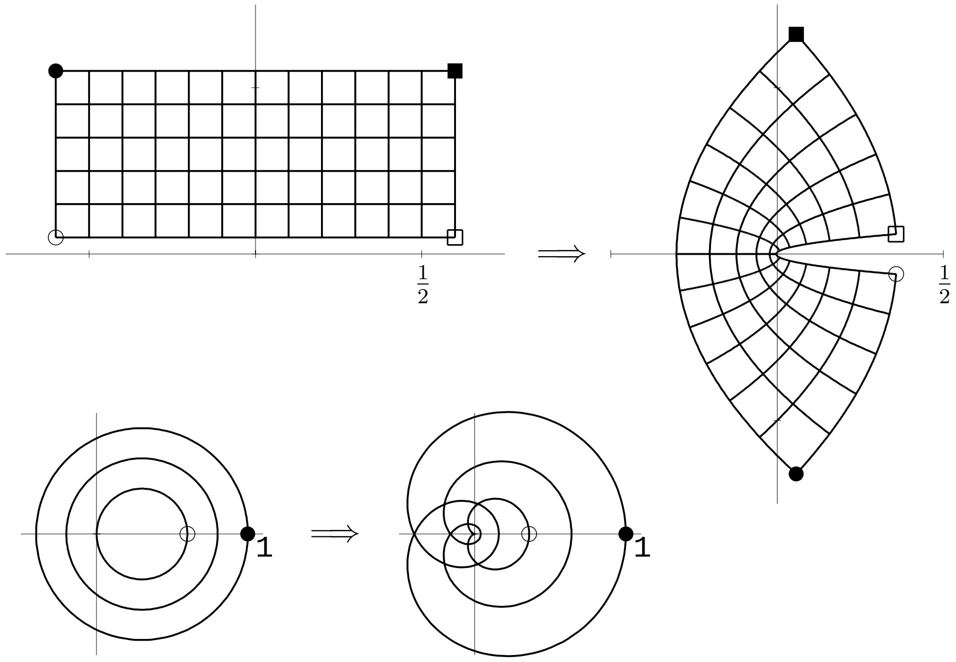


Obrázek 7: Lineární zobrazení $f(z) = (1 + \frac{i}{2})z + \frac{1}{2}$

Na reálné přímce představuje přičítání $f_a(x) = x + a$ posunutí o a (doleva nebo doprava podle toho zda a je záporné či kladné). Je pozoruhodné, že tento geometrický význam si sčítání zachovává i v komplexní rovině. Přičítání reálného čísla představuje posun komplexní roviny doprava či doleva, přičítání imaginárního čísla představuje posun nahoru či dolu. Obecně lineární transformace tvaru $f(z) = az+b$, kde a, b jsou komplexní čísla představuje podobnost která zachovává orientaci. Je to složení zvětšení v poměru $|a| : 1$, otočení o úhel $\arg a$ a posunu o b (obr. 7). Naopak každá podobnost, která zachovává orientaci, má tento tvar. Podobnost která nezachovává orientaci je například přiřazení čísla komplexně sdruženého $\overline{a+bi} = a - bi$, které představuje překlopení komplexní roviny podle reálné osy. Lineární transformace tvaru $f_{a,b}(z) = az+b$, kde $|a| = 1$, tvoří grupu právě těch transfromací roviny, které zachovávají vzdálenost a orientaci. Každá tato transformace je buď posun o b v případě že $a = 1$, nebo otočení kolem bodu $b/(1-a)$ o úhel $\arg a$ v případě že $a \neq 1$. Tato grupa tedy vytváří eukleidovskou geometrii roviny.

Geometrický význam mají i mnohočleny a další komplexní funkce. Například kvadratickou funkci $f(z) = z^2$ lze v polárním tvaru zapsat

$$z^2 = |z|^2(\cos(2\arg z) + i\sin(2\arg z)).$$



Obrázek 8: Kvadratická funkce $f(z) = z^2$

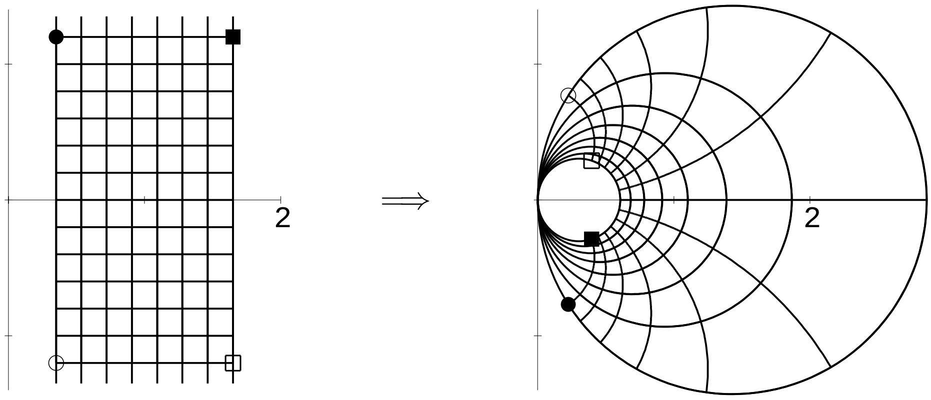
Absolutní hodnota se tedy umocňuje na druhou a argument se násobí dvěmi. Kvadratická funkce převádí přímky na paraboly, případně na degenerované paraboly, tj. polopřímky (obr. 8 nahoře). Obraz vodorovné přimky s rovnicí $y = b$ je parabola s rovnicí $y^2 = 4b^2(b^2 + x)$, jejíž ohnisko je v počátku a jejíž osou je reálná přímka. Svislá přímka s rovnicí $x = a$ se převádí na parabolu $y^2 = 4a^2(a^2 - x)$. Tato parabola má také ohnisko v nule a její osou je reálná přímka, je však otevřená doleva, zatímco obrazy vodorovných přímek jsou otevřeny doprava. Tyto dva systémy parabol jsou přitom navzájem kolmé. Uzavřená křivka která oběhne kolem počátku se převádí na křivku, která oběhne dvakrát kolem počátku (obr. 8 dole). Prochází-li křivka nulovým bodem, její obraz se v tomto bodě otáčí o 180°. To souvisí s tím, že nulový bod je jediný, ve kterém má funkce nulovou derivaci $f'(z) = 2z$.

Inverzní funkce $f(z) = 1/z$ převádí přímky na kružnice nebo přímky a kružnice převádí také na kružnice nebo přímky. Svislé přímky $a + yi$ vedené rálným číslem a se převádí na kružnice se středem v bodě $1/2a$ a poloměrem $1/2|a|$. Vodorovné přímky procházející bodem ai se zobrazují na kružnice se středem v bodě $-i/2a$ a poloměrem $1/2|a|$. Všechny tyto kružnice procházejí (nebo spíše se asymptoticky blíží) k nulovému bodu (obr. 9). Každá polorovina $\Re(z) > a > 0$ se převádí na otevřený kruh se středem $1/2a$ a poloměrem také $1/2a$.

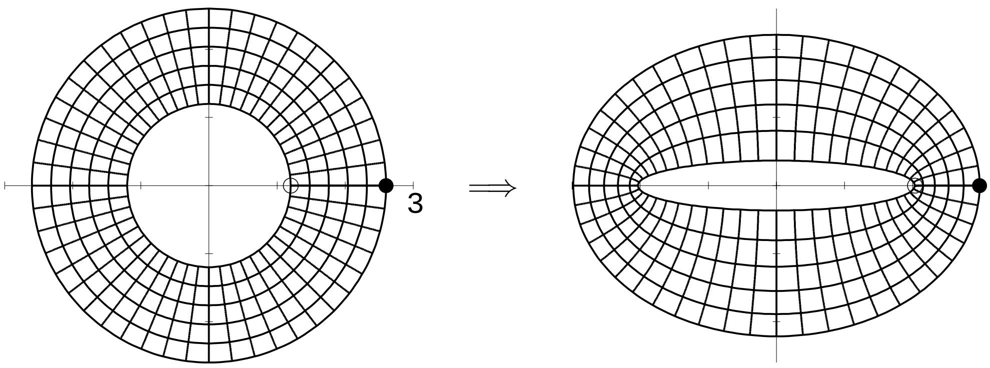
Racionální funkce jsou podíly mnohočlenů. Zajímavé vlastnosti má zobrazení $f(z) = (z^2 + 1)/z$ na obr. 10. Převádí jednotkovou kružnici na reálnou úsečku $[-2, 2]$. Platí totiž

$$f(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\cos\varphi.$$

Kružnice se středem v nule se převádí na elipsy s ohnisky -2, 2, zatímco přímky



Obrázek 9: Inverzní funkce $f(z) = 1/z$



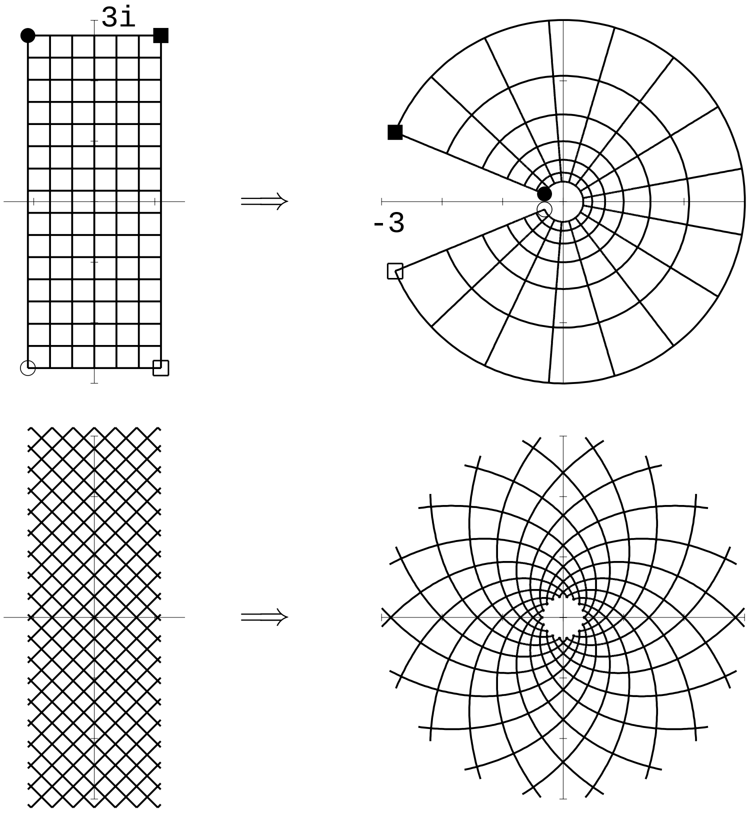
Obrázek 10: Racionální funkce $f(z) = z + \frac{1}{z}$

procházející počátkem se převádí na hyperboly s ohnisky $-2, 2$. Doplněk uzavřeného jednotkového kruhu se převádí na doplněk jednotkové úsečky $[-2, 2]$ vzájemně jednoznačně. Přitom se opět zachovávají úhly křivek, protože všude kromě bodů -1 a 1 má funkce nenulovou derivaci. Také vnitřek jednotkového kruhu se převádí na doplněk intervalu $[-2, 2]$.

Exponenciální funkce $e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$ převádí vodorovné přímky na radiální přímky, které se pro $x \to -\infty$ asymptoticky blíží k nulovému bodu. Svislé přímky se převádí na kružnice se středem v nulovém bodě (obr. 11 nahoře). Ostatní přímky se zobrazují na geometrické spirály (obr. 11 dole). Exponenciální funkce je periodická s periodou $2\pi i$. Platí totiž $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$. Ze vzorců $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ lze vypočítat sinus a cosinus a tuto definici rozšířit na celou komplexní oblast

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Alternativní postup, který dává stejný výsledek, je definice funkcí sinus a cosinus stejnou mocninnou řadou jako v reálné oblasti. Funkce sinus zobrazuje vodorovné přímky na elipsy s ohnisky -1, 1 a svislé přímky na hyperboly se stejnými ohnisky



Obrázek 11: Exponenciální funkce $f(z) = e^z$

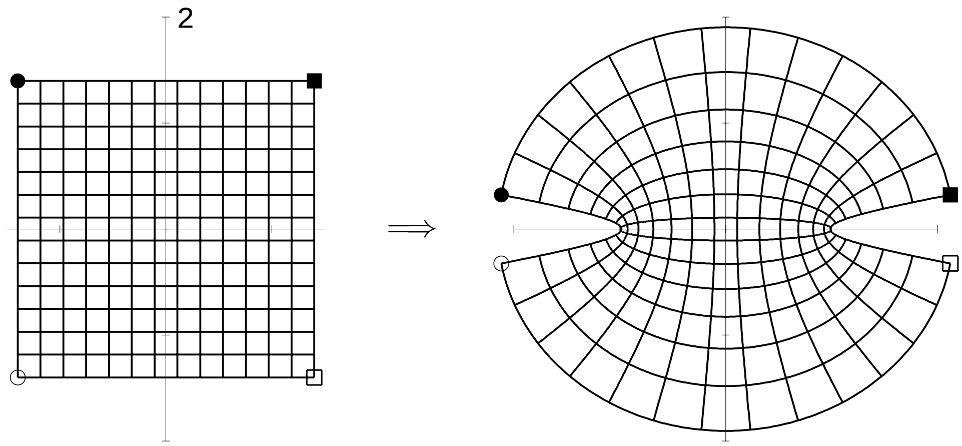
(obr. 12). Reálnou přímku ovšem funkce sinus zobrazuje na degenerovanou elipsu, tj. úsečku $[-1, 1]$. I v komplexní rovině jsou funkce sinus a cosinus periodické s periodou 2π a jsou navzájem posunuté: $\sin(z + 2\pi) = \sin z = \cos(z - \frac{\pi}{2})$. Fukce $\tan z = \sin z / \cos z$ (obr. 13) převádí svislé přímky na kružnice které spojují body $-i$ a i. Vodorovné přímky se zobrazují také na kružnice.

7 Holomorfní funkce

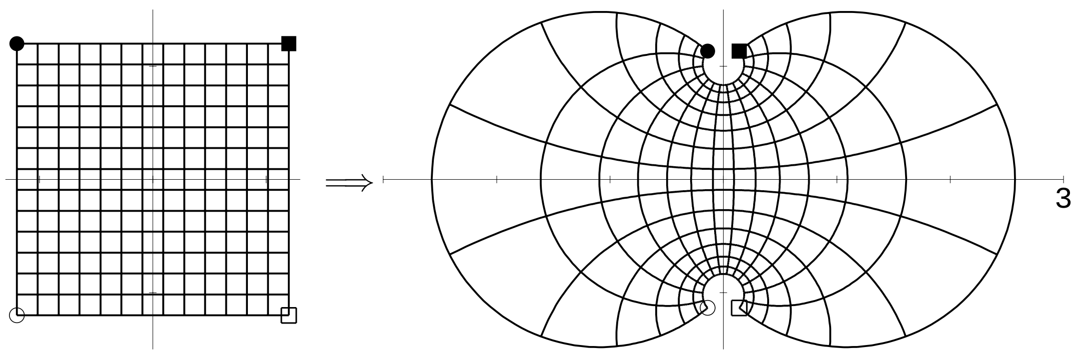
Ještě výrazněji je dokonalost struktury komplexních čísel vidět v diferenciálním počtu. Komplexní funkce f má v bodě $c \in \mathbb{C}$ derivaci $f'(c)$, jestliže ji v okolí tohoto bodu lze aproximovat lineární funkcí s koeficientem $f'(c)$. To znamená, že ji lze v okolí tohoto bodu psát ve tvaru

$$f(c + z) = f(c) + z \cdot f'(c) + z \cdot \tilde{f}(z),$$

kde $\tilde{f}$ je nějaká funkce jejíž limita v c je nula. Je-li $f'(c) \neq 0$, znamená to, že v okolí bodu c se funkce f chová jako složení posunu o $f(c)$, podobnosti s koeficientem $|f'(c)|$ a otočení o úhel $\arg f'(c)$. Z toho plyne že komplexní funkce s nenulovou derivací zachovávají úhly. Protínají-li se nějaké křivky v bodě c pod úhlem α a je-li $f'(c) \neq 0$, protínají se obrazy křivek v bodě $f(c)$ pod stejným úhlem α. Je-li $f'(c) = 0$ a $f''(c) \neq 0$, protínají se tyto obrazy pod úhlem 2α. Tento geometrický



Obrázek 12: Funkce $f(z) = \sin z$



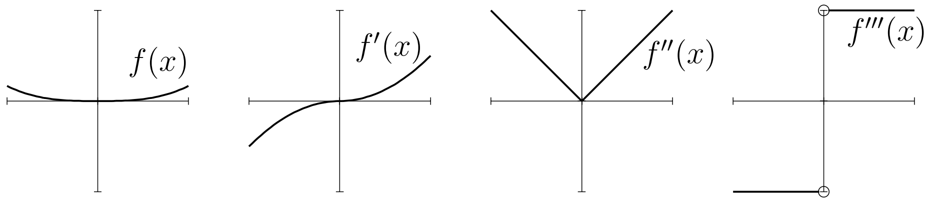
Obrázek 13: Funkce $f(z) = \tan z$

význam derivace má další důsledky. Má-li komplexní funkce v okolí nějakého bodu derivaci, má už v tomto bodu derivace všech řádů a lze ji tam rozvinout v mocninnou řadu tvaru

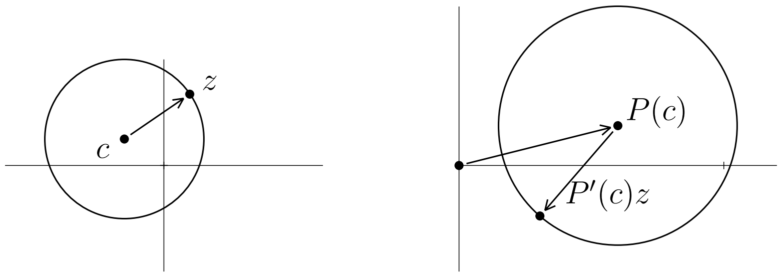
$$f(c+z) = f(c) + f'(c)z + \frac{f''(c)}{2}z^2 + \frac{f'''(c)}{3!}z^3 + \frac{f^{(iv)}(c)}{4!}z^4 + \cdots$$

Komplexní funkce které mají derivaci se nazývají holomorfní. Celistvost jejich tvaru znamená, že jsou určeny svými hodnotami v libovolně malém okolí libovolného bodu svého definičního oboru. Komplexní analýza tak má mnohem větší estetickou kvalitu než analýza reálná. Nic podobného totiž neplatí v reálné oblasti. Například funkce $f(x) = |x^3|/6$ má na celé reálné přímce derivaci $f'(z) = x \cdot |x|/2$, druhou derivaci $f''(x) = |x|$, tato funkce však již nemá derivaci v nule. Jsou také známy reálné funkce které mají derivace všech řádů ale přesto je nelze rozvinout do mocninné řady. Takovou vlastnost má například funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{pro} \quad x > 0 \end{cases}$$



Obrázek 14: Reálná diferencovatelná funkce $f(x) = |x^3|/6$



Obrázek 15: Základní věta algebry

8 Základní věta algebry

Další překvapivá vlastnost struktury komplexních čísel je, přidání řešení jedné kvadratické rovnice $x^2 + 1 = 0$ si již vynutí, že každá algebraická rovnice tvaru

$$P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n = 0$$

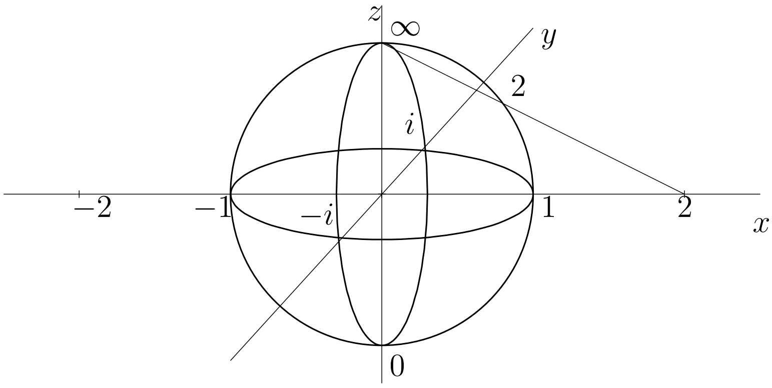
má v komplexní oblasti řešení. Důkaz objevil d'Alembert roku 1746 a je založen na geometrických vlastnostech komplexních funkcí. Pokud v nějakém bodě $c \in \mathbb{C}$ je $P(c) \neq 0$, pak v blízkosti tohoto bodu existuje bod $z + c$, ve kterém je absolutní hodnota P ostře menší, tj. $|P(c+z)| < |P(c)|$. Funkci P totiž můžeme psát ve tvaru

$$P(c+z) = P(c) + P'(c) \cdot z + \tilde{P}(z) \cdot z^2$$

kde $\tilde{P}$ je mnohočlen. Probíhá-li bod z po kružnici s poloměrem r kolem bodu c, probíhá bod $P(c) + P'(c)z$ po kružnici s poloměrem $r \cdot |P'(c)|$ kolem bodu $f(c)$. Je-li poloměr r dosti malý, přičtení členu $\tilde{P}(z)z^2$ tuto kružnici deformuje na křivku, která také obíhá kolem bodu $P(c)$ a na této křivce se najde bod s menší absolutní hodnotou než $P(c)$. To platí i v případě že $P'(c) = 0$. Je-li q nejmenší přirozené číslo pro které je q-tá derivace v c nenulová, proběhne bod $P(c) + P^{(q)}(c)z^q/q!$ kolem bodu $P(c)$ q-krát. Sestrojujeme-li posloupnost bodů c_n s klesající absolutní hodnotou $|P(c_n)|$, limitně se blížíme ke kořenu rovnice $P(c) = 0$. K tomu je již jen třeba ukázat, že při tomto postupu zůstáváme neustále uvnitř nějaké omezené oblasti, protože absolutní hodnoty polynomu $|P(z)|$ při rostoucím $|z|$ rostou do nekonečna.

9 Komplexní sféra

Racionální lomené funkce nejsou definovány v číslech, kde je jejich jmenovatel nulový. Proto se ke komplexní rovině přidává ještě nekonečné číslo ∞ a jednočetné



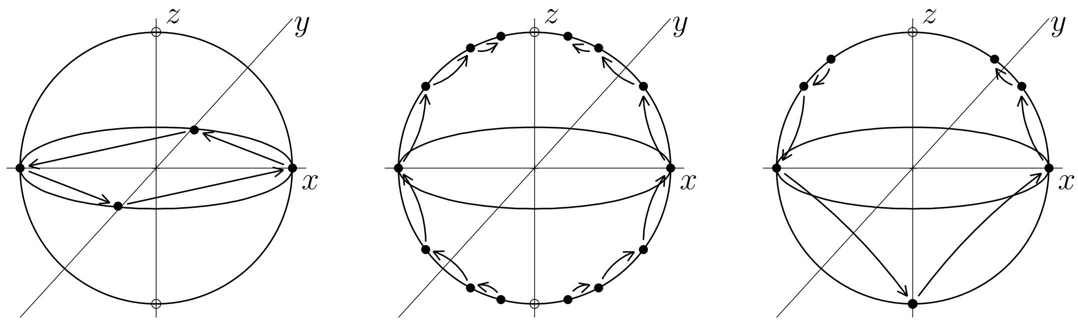
Obrázek 16: Stereografická projekce

aritmetické operace se na ∞ rozšiřují.

$$a \pm \infty = \infty, \quad b \cdot \infty = \infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{C}, \quad b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Výsledná struktura $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se nazývá komplexní sféra, protože její prvky lze vzájemně jednoznačně přiřadit povrchu koule. V třírozměrném eukleidovském prostoru s pravoúhlou soustavou souřadnic (x, y, z) ztotožníme komplexní rovinu $\mathbb{C}$ s vodorovnou rovinou $z = 0$ a jednotkovou sféru $\mathbb{S}$ s rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Stereografická projekce $P : \mathbb{C} \to \mathbb{S}$ promítá ze severního pólu se souřadnicemi $(0, 0, 1)$ body roviny $\mathbb{C}$ na body sféry $\mathbb{S}$. Projekce je dána vzorcem

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right) \\ P^{-1}(x,y,z) &= \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right), \quad z \neq 1 \end{aligned}$$



Obrázek 17: Möbiovy transfromace

Při projekci P se komplexní rovina zobrazuje na celou sféru s vyjímkou severního pólu $(0, 0, 1)$ a právě tento bod ztotožníme s přidaným číslem ∞. Číslo 0 je na jižním pólu sféry. Na rovníku sféry jsou čísla $1, i, -1, -i$ a celá jednotková kružnice. Komplexní funkce pak nahlížíme jako transformace komplexní sféry. Důležitou vlastností stereografické projekce, pro kterou se často používá v kartografii, je že zachovává úhly křivek. Proto také transformace komplexní sféry které odpovídají holomorfním funkcím s nenulovou derivací jsou konformní zobrazení, tj. zachovávají úhly. Pokud je to možné, rozšiřujeme definiční obor takto získaných transformací i na ∞ případně na body kde původní funkce nebyla definována, ale tak aby výsledná transformace byla spojitá. To lze udělat u všech racionálních lomených funkcí. Na druhé straně exponenciální ani goniometrické funkce nelze spojitě rozšířit na ∞, protože v blízkosti ∞ tyto funkce nabývají všech komplexních hodnot. Říkáme, že zde mají neodstranitelnou singularitu. Speciální význam mají pro komplexní sféru Möbiovy transformace tvaru

$$M_{a,b,c,d}(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ kde } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

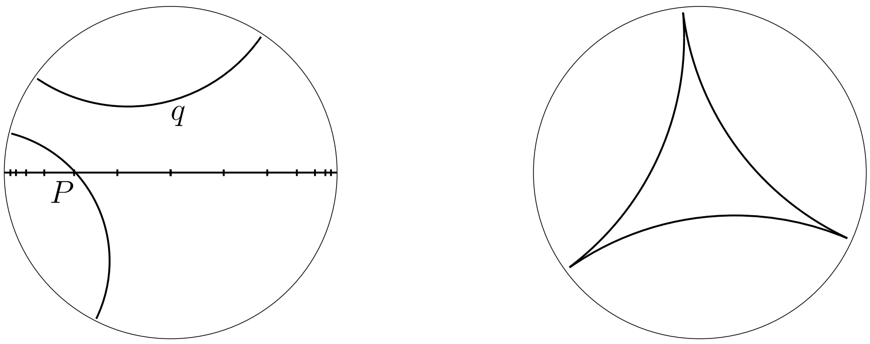
Transformace je určena maticí typu 2×2 s nenulovým determinantem. Pro $ad - bc = 0$ se ve vzorci čitatel a jmenovatel vykrátí a funkce je konstantní. Pro $ad - bc \neq 0$ je Möbiova transformace vzájemně jednoznačné zobrazení komplexní sféry na sebe a platí

$$M_{a,b,c,d}(-d/c) = \infty, \quad M_{a,b,c,d}(\infty) = a/c.$$

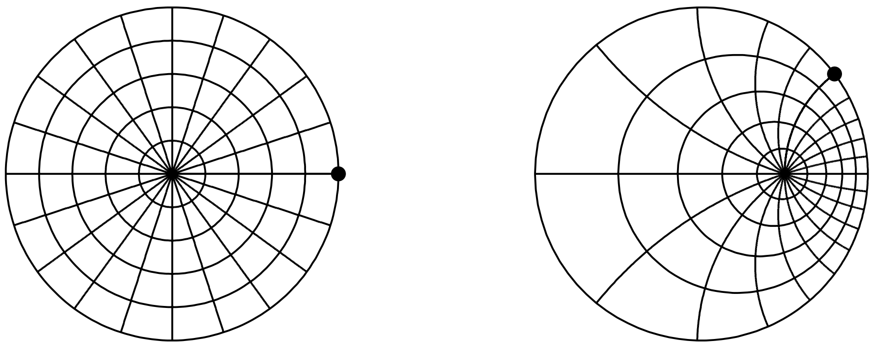
Möbiovy transformace zahrnují všechny lineární funkce tvaru $M(z) = az + b$ (pro $c = 0$, $d = 1$) a inverzní funkce $M(z) = 1/(cz+d)$ (pro $a = 0$, $b = 1$). Říkáme, že bod z je pevný bod Möbiovy transformace M, pokud platí $M(z) = z$. To je kvadratická rovnice, která má dvě řešení, nebo jedno dvounásobné. Transformace $M(z) = iz$ představuje otočení komplexní sféry kolem osy procházející severním a jižním pólem. Její pevné body jsou 0 a ∞. Stejné pevné body má transformace $M(z) = 2z$, která každou rovnoběžku zobrazuje na severněji ležící rovnoběžku. Transformace $M(z) = z + 1$ má jediný pevný bod ∞ (obr. 17).

Möbiova transformace $M_{a,b,c,d}$ zachovává úhly křivek i v bodech $-d/c$ a ∞, a každou kružnici převádí na kružnici. Pro každé $w \in \overline{\mathbb{C}}$ má rovnice $M_{a,b,c,d}(z) = w$ jediné řešení, takže transformace je vzájemně jednoznačná. Transformace k ní inverzní je také Möbiova transformace a složení dvou Möbiových transformací je opět Möbiova transformace. Přitom skládání odpovídá násobení jejich příslušných matic. Möbiovy transformace tedy tvoří grupu. Tak jako grupa lineárních zobrazení komplexní roviny s nenulovým koeficientem vytváří geometrii podobnosti, tak grupa Möbiových transformací vytváří konformní geometrii komplexní sféry, tj. těch vzájemně jednoznačných transfromací, které zachovávají úhly křivek.

Také každou racionální lomenou funkci tvaru $R(z) = P(z)/Q(z)$, kde P, Q jsou mnohočleny, lze rozšířit na celou komplexní sféru, tak že má všude derivaci. Naopak každá funkce, která je holomorfní na celé komplexní sféře, je racionální lomená. Stupeň racionální lomené funkce je maximum stupně jejího čitatele a jmenovatele. Je-li $R(z)$ racionální funkce stupně p, pak každá rovnice $R(z) = c$, kde $c \in \overline{\mathbb{C}}$, má právě p řešení, pokud se ovšem počítají se svou násobností. Vidíme, že pojem racionální lomené funkce a jejího stupně jsou pojmy geometrické: lze je vymezit jen na základě konformní geometrie komplexní sféry.



Obrázek 18: Beltramiho model hyperbolické roviny



Obrázek 19: Möbiova transformace jednotkového kruhu

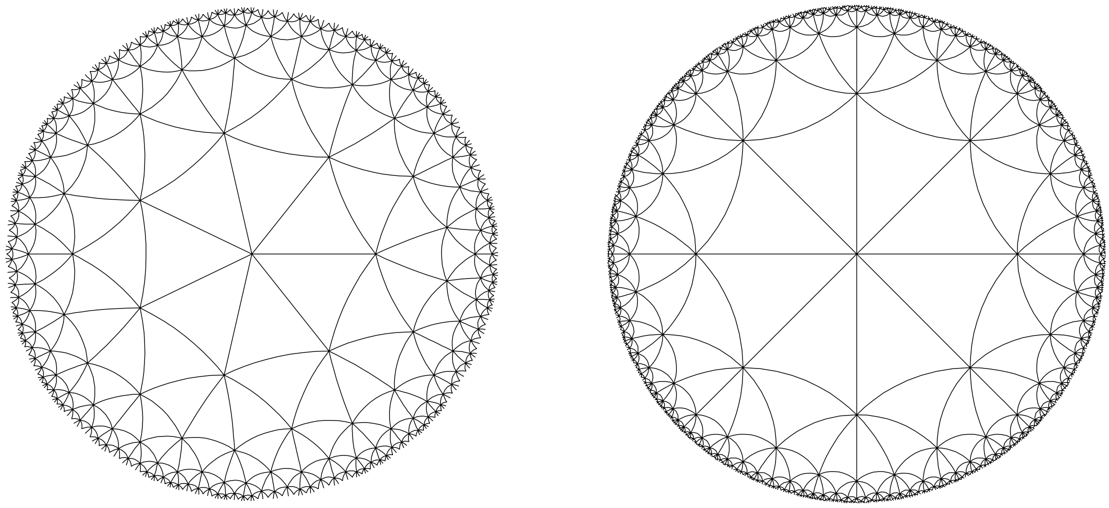
10 Hyperbolická geometrie

Jistá podgrupa Möbiových transformací vytváří neeukleidovskou hyperbolickou geometrii. V hyperbolické geometrii platí všechny axiomy eukleidovské geometrie kromě pátého axiomu o rovnoběžkách. Speciálně každé dva různé body určují jedinou přímku, která jimi prochází a dvě různé přímky se protínají nejvýše v jednom bodě. Daným bodem P, který neleží na dané přímce q lze však k této přímce vést nekonečně mnoho rovnoběžek, tj. přímek, které přímku q neprotínají. Součet úhlů v trojúhelníku je vždy ostře menší než $180°$. Čím je trojúhelník větší, tím menší je součet jeho úhlů. Bezespornost hyperbolické geometrie se vykazuje modely sestrojenými uvnitř eukleidovské geometrie. Za body hyperbolické roviny se považují některé body eukleidovské roviny, za přímky hyperbolické roviny se považují některé křivky eukleidovské roviny.

V Beltramiho modelu jsou body hyperbolické roviny reprezentovány vnitřními body jednotkového kruhu komplexní roviny. Přímky hyperbolické roviny jsou reprezentovány částmi kružnic uvnitř jednotkového kruhu, které s obvodem jednotkové kružnice svírají pravý úhel. Také každý průměr jednotkové kružnice reprezentuje přímku hyperbolické roviny. Na obr. 18 vlevo vidíme dvě různé rovnoběžky s přímkou q, které procházejí bodem P. Na obr. 18 vpravo vidíme trojúhelník s velmi malým součtem úhlů. Beltramiho model zachovává úhly mezi přímkami. To znamená, že úhel dvou přímek hyperbolické geometrie je stejný jako eukleidovský úhel tečen kružnic, které je reprezentují. Model ovšem nezachovává vzdálenosti. Hyperbolická metrika v eukleidovských souřadnicích x, y je dána vzorcem

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - x^2 - y^2}.$$

Zde (dx, dy) je infinitesimální vektor a ds je jeho délka. Tento vzorec umožňuje počítat délku každé křivky uvnitř jednotkové kružnice a vymezuje přímky hyperbolické geometrie jako spojnice nejkratší délky. Zkreslení hyperbolické metriky oproti eukleidovské metrice je malé v okolí středu kruhu a největší v blízkosti okrajové kružnice, kde malým eukleidovským délkám odpovídají velké délky hyperbolické geometrie. Škála hyperbolické geometrie je znázorněna na obr. 18 vlevo.



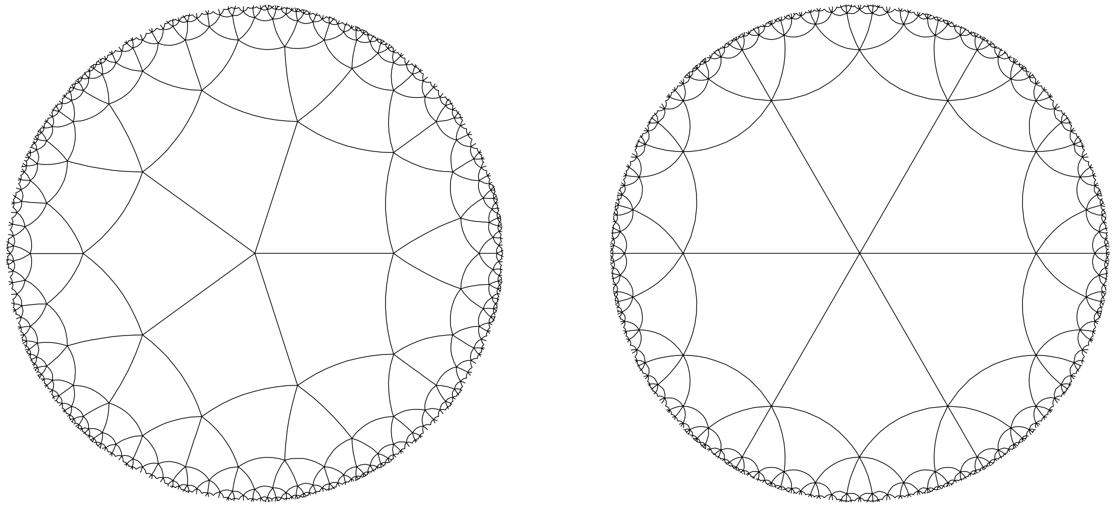
Obrázek 20: Dláždění hyperbolické roviny trojúhelníky

Shodné transformace hyperbolické geometrie, tj. transformace které zachovávají vzdálenosti a orientaci hyperbolické roviny, jsou pro Beltramiho model speciální Möbiovy transformace tvaru

$$M_{a,b}(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \text{ kde } |b| < |a|.$$

Tyto transformace totiž zachovávají jednotkovou kružnici, přímky hyperbolické geometrie převádí opět na přímky a také zachovávají hyperbolickou metriku (obr. 19).

Hyperbolickou geometrii lze zahlédnout na dlážděních, tj. rozkladech hyperbolické roviny na pravidelné mnohoúhelníky. V eukleidovské rovině existují pouze tři různá dláždění pravidelnými mnohoúhelníky, totiž rovnostrannými trojúhelníky, čtverci a pravidelnými šestiúhelníky. Protože v hyperbolické rovině je součet úhlů trojúhelníka menší než 180°, existují dláždění rovnostrannými trojúhelníky, kde se

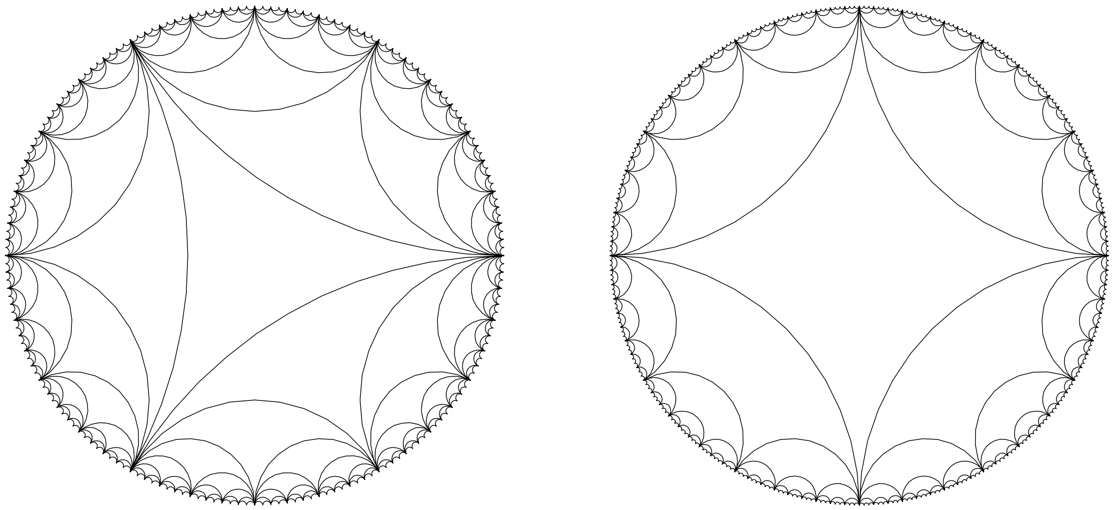


Obrázek 21: Dláždění hyperbolické roviny čtverci

v každém vrcholu stýká $k \geq 7$ trojúhelníků (obr. 20). Čím větší je k, tím větší je také strana trojúhelníka. Podobně pro každé $k \geq 5$ existuje dláždění hyperbolické roviny čtverci, kde se v každém vrcholu stýká k čtverců (obr. 21). Existují dokonce dláždění nekonečně velkými pravidelnými mnohoúhelníky, které mají nulový úhel a v každém vrcholu dláždění se jich stýká nekonečně mnoho (obr. 22). Na dlážděních hyperbolické roviny jsou založeny některé Escherovy grafiky.

Podivuhodné vlastnosti struktury komplexních čísel tím zdaleka neskončí. Mezi další velká témata komplexní analýzy patří teorie víceznačných komplexních analytických funkcí, jako je logaritmus nebo obecná mocnina nebo teorie konformních zobrazení. Platí zde pozoruhodná Riemannova věta, že každou jednoduše souvislou oblast komplexní roviny (s výjimkou celé roviny samotné) lze vzájemně jednoznačně konformně zobrazit na otevřený jednotkový kruh. Ve dvacátém století vznikla komplexní analytická dynamika, která odkryla pozoruhodné fraktální tvary atraktorů holomorfních zobrazení známých jako Juliovy množiny a jejich parametrického prostoru, ve kterém vyvstává Mandelbrotova množina. Nejpřekvapivější je však široké uplatnění komplexních čísel ve fyzice. Kvantová mechanika se odehrává v komplexních Hilbertových prostorech, které ve srovnání s reálnými Hilbertovými prostory mají mnohem zajímavější strukturu. Bez komplexních čísel by kvantová mechanika nebyla vůbec myslitelná.

Ve struktuře komplexních čísel se šťastně sešly metafory formálně-algebraické, geometrické i dynamické. Na struktuře komplexních čísel a na příběhu jejich vzniku je vidět, jak jsou matematické pojmy tvořeny metaforou, podobně jako pojmy filosofické. Před Platonem slovo idea znamenalo plán, ať už myšlený nebo nakreslený, podle kterého truhlář dělá židli (Arendtová [1]). Filosofický pojem ideje k této představě sahá, ale překračuje jí. Po mnoha staletích filosofického myšlení má pojem ideje podstatně odlišný význam než plán židle. Matematické pojmy a objekty také vznikají jako metafory, a existují do té míry, do jaké jsou navzájem provázanými metaforami podloženy. Tento matematický svět, stvořený a osvětlený metaforou, lze do



Obrázek 22: Dláždění hyperbolické roviny nekonečnými trojúhelníky a čtverci

jisté míry překračovat a rozšiřovat rozumem a logikou. Zde však již tápeme v polosvitu, dokud se neobjeví nová osvětlující metafora. Tímto neustálým tvořením skrze metaforu matematický svět vzniká. Stále je však za obzorem tohoto osvětleného světa přítomné apeiron - bezmezné a beztvaré. Tam již nepomáhá ani náhled ani logika.

Metaforická existence matematických objektů ale není existence podřadného druhu:

> Ricœur ukazuje, že nejen básnické obrazy, nýbrž i všechny vědecké modely a teorie, ať se tváří jakkoliv objektivně a definitivně, jsou vlastně *velkými metaforami* - způsoby mluvy pomocí představ a pojmů vzatých z jiné, známé zkušenosti (srv. "planetární model atomu" či "oblak elektronu"); všimněme si ostatně metaforičnosti i tak odborných termínů jako "hladina cukru v krvi", "kolísání cen" atp. To ovšem neznamená, že by tyto vědecké popisy světa nebyly pravdivé, že by to byly "pouhé metafory": vždyť jde o faktické poznatky par excellence. Jejich metaforická povaha naopak ukazuje, že sama pravda spočívá v metafoře, že *bytí samo je metaforické.* (Neubauer [8] str. 158).

Reference

[1] H.Arendtová: Řeč a metafora. in: Myšlení o divadle II (připravil M. Petříček) Herrmann a synové, Praha 1993.

[2] C.B.Boyer: A history of mathematics. John Wiley & sons, New York 1968.

[3] Eukleidés: Základy. Přeložil F.Servít. JČMF, Praha 1907.

[4] G.J.Chaitin: An algebraic equation for the halting probability. in: The universal Turing machine (R.Herken, ed.) pp. 279-283, Oxford University Press 1988.

[5] G.J.Chaitin: Randomness in arithmetics. Scientific American, pp. 80-85, July 1988.

[6] P.J.Davis, R.Hersh: The mathematical experience. Penguin Books, London 1988.

[7] G.Lakoff, R.E.Núñez: Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being. Basic Books 2000.

[8] Z.Neubauer: O sněhurce aneb cesta za smyslem bytí a poznání. Malvern, Praha 2004.

[9] R.Penrose: The emperor's new mind. Oxford University Press, Oxford 1989.

[10] H.Poincaré: La valeur de la science. Flammarion, Paris 1923

[11] J.Stillwell: Mathematics and its history. Springer-Verlag, Berlin 1989.

[12] R.L.Wilder: The evolution of mathematical concepts. John Wiley & sons, New York 1968.