

Jak vidíme čísla

Ivan M. Havel

Centrum pro teoretická studia UK a AV ČR
Jilská 1, 110 00 Praha 1, ČR
E-mail: havel@cts.cuni.cz

Abstrakt

Práce se zabývá vztahem mezi (a) počtem prvků nějakého souboru, (b) abstraktním pojmem čísla a (c) reprezentací čísel (např. číslovkami), a to hlavně s důrazem na kognitivní aspekty těchto vztahů. Kazuistiky autistů se zázračnými schopnostmi vedou k otázce, zda je člověk schopen přímo „vidět“ nejen malé ale i velké počty objektů. Jako podklad k úvahám je spekulativně navržena reprezentace čísel pomocí tvarů rovinných křivek a jednoduchý vizuální algoritmus k detekci prvočísel.¹

1 Úvod

Vím a vidím, že mám *dvě* ruce, na každé *pět* prstů, že sedím u stolu, který má *čtyři* nohy, otevírám si už *třetí* láhev piva – vůbec se nezdá, že by v tom všem byl nějaký problém. Co to však vůbec je: dvě, pět, čtyři, tři? Má to spolu něco společného? Ano, řeknete asi, jsou to přece počty – popřípadě řeknete rovnou: čísla. Prostě, ale zamysleme se nad tím trochu.

William James ve svých slavných *Principech psychologie* z roku 1890 ([2], s. 629) uvedl sedm etap formování elementárních mentálních kategorií, které mají přirozený původ. Na třetím místě v jeho seznamu je *smysl pro čas, prostor a počet*. (Předchozí dvě etapy dle něho jsou: (1) elementární druhy počtů a smysl pro vlastní aktivitu, (2) emoce, touhy, instinkty, smysl pro hodnotu, estetický smysl).

O času a prostoru existuje bohatá literatura, mně zde jde hlavně o ten počet, který jako by s nimi byl na stejné úrovni. Lze ony etapy chápat evolučně? Jak to „opravdu“ v evoluci bylo s různými schopnostmi, to se asi nikdy nedozvíme, můžeme jen spekulovat a hledat nepřímé argumenty, například se odvolávat na užitečnost k přežití a zkoumat, jak je to v přírodě u jiných druhů.

Mluvíme-li o *smyslu pro* prostor a čas, jistě nemáme na mysli prostor a čas v plné šíři a nezměrnosti – do dálky i do jemnosti –, nýbrž v radikálním zúžení na rozsah a dosah (tj. horizont) našich schopností vnímat a rozlišovat. Podobně, jde-li o počty, máme na mysli především *malé počty* – a jak uvidíme, jde o věc povýtce relevantní.

Co vůbec znamená, mít *smysl pro počet*? Rozumí se pro *počet něčeho*, což ještě neznámá znát *čísla jako taková* (k těm se dostanu). V češtině naštěstí rozlišujeme slova „počet“ a „číslo“ – Jamesovo anglické „number“ by mohlo znamenat obojí („abstract number“ stejně jako „count“).

Pro hlavní proud dnešní kognitivní vědy je charakteristické, že místo zkoumání bezprostředních prožitků a představ (v takzvané perspektivě první osoby) je snaha vycházet z jejich *reprezentace*, ať už v mysli (psychologie) či v mozku (neurovědy). Jak píše Randy Gallistel: „Podmínkou jakékoliv zkušenosti vůbec je schopnost reprezentovat čas, prostor a počet.“ (cituje Callaway [3]). Přitom převládá názor, že lidský smysl pro počet a aritmetiku (podobně jako kterýkoliv jiný „smysl“ pro něco) je zabudován přímo ve strukturách mozku (srov. např. [4, 5, 6]).

V této studii se vydám poněkud jinou cestou a zaměřím se více na otázku, jak sám subjekt může počty a čísla² *aktuálně prožívat* (srov. též mé eseje ve *Vesmíru* [7, 8]). Můj zájem je tedy spíše fenomenologický (ve filosofickém smyslu slova), než vědecký a přiznávám, že dám přednost úvahám dosti volným a spekulativním, než abych se opíral jen o konkrétní empirické a dedukcí získané poznatky. Proto též užívám termín „prožitek“ (a „prožívání“) ve filosofickém významu – jako označení souboru vědomých či polovědomých subjektivních stavů mysli v určité situaci či události.

Je na čase, abychom vyjasnili pojmy. Jak jsem již poznamenal, v češtině rozlišujeme *počty* a *čísla*, nicméně samo slovo „číslo“ užíváme ve dvou významech: (1) pro abstraktní entity, definované hromadně, například v rámci

¹ Tato studie je upravenou a podstatně rozšířenou českou verzí autorovy práce [1]. Vznikla v rámci řešení výzkumného záměru CTS MSM 0021620845.

² V celé této práci se jedná pouze o *přirozená* čísla.

nějaké axiomatické teorie čísel, nebo (2) pro *číslovky*, které tato abstraktní čísla pojmenovávají pomocí sekvencí *číslic* v nějaké poziční, např. desítkové soustavě, popřípadě pomocí slovních výrazů vytvořených z několika základních slov. Řeknu-li „vidím číslo“ (viz název této studie), mělo by být jasné, zda mám před svým vnitřním, mentálním zrakem nějaký počet něčeho (tři sestry) nebo číslovku („3“ resp. „tři“) nebo abstraktní číslo (nejmenší liché prvočíslo). Zajisté to jsou banality, ale nám zde půjde právě o ten vnitřní zrak. Potažmo o zcela nové možnosti, jak „vidět“ čísla – jak je třeba „vidí“ někteří nadaní a zázrační počtáři?

2 Smysl pro počet jako vnitřní smysl

Slovní spojení „mysl pro počet“ jsem zde zvolil k poněkud neurčitěmu označení lidské dispozice, schopnosti či vlohy rozpoznávat a rozlišovat některé (asi nepřilíš velké) počty objektů, které jsou vnímány, pamatovány či imaginativně představovány. Tato schopnost či vlohová se typově v něčem trochu podobá a v něčem podstatně liší od běžných percepčních smyslů (zrak, sluch, hmat atd.); stejnou podobnost a rozlišnost mají i další mentální „mysly pro (něco)“. Může být proto užitečné se u srovnání s percepčními smysly pozdržet.³

Vezměme si kupříkladu *mysl pro humor*. Ten není trvale aktivní a je tedy, podobně jako percepční smysly, spíše jakousi latentní dispozicí (nesmějeme se pořád a všemu), a navíc jsou tací, kterým zcela chybí. Proč smysl pro humor nechápat také jako druh *smyslu*, v poněkud obecnějším smyslu slova „mysl“? Navrhuji zavést zkusmo novou, o individuální zkušenost opřenou kategorii, kterou lze chápat jako *mysl pro (něco)*.⁴ Ostatně jsme se zde již setkali (s odvoláním na W. Jamese) se smyslem pro čas a pro prostor a je zcela běžné mluvit o smyslu pro čest, právo, spravedlnost, pořádek, krádu apod.

Ve sféře lidského mentálního života nalezneme asi velké množství různých „smyslů pro X “, kde X je vždy nějaká, typicky, ale nikoliv nutně abstraktní kvalita. Takovéto „mysly pro...“ patří tomu, kdo je jimi vybaven, kdo je tedy v jakémsi ohledu jejich „vlastníkem“ a nejsou to tedy atributy dotyčného X (to bychom spíš říkali, že X má či dává smysl). Dále, jak už jsem naznačil, jde spíš o dispozice (což ještě neznamená, že jsou u svého nositele trvalé a neměnné), než o jejich

případné aktualizace. Smysl pro odpovědnost je jedna věc a cítit se odpovědným za to či ono je věc druhá. Takovéto rozdíly zpravidla nejsou v literatuře tematizovány, nicméně z kontextu je zpravidla věc jasná.

Současná kognitivní věda, hlavně její fenomenologicky orientovaný směr (viz např. [9]) se obšírně zabývá rozličnými aspekty vědomé zkušenosti, které jsou uváděny též jako „mysly pro...“ (senses of...). Patří k nim například smysl pro osobní Já, pro vlastní tělo, pro autorství fyzických pohybů, pro vlastní aktivitu, pro volní rozhodování a jednání, pro druhé (osoby), pro minulost, pro budoucnost, pro reálnost světa, pro kontinuitu života atp. Některé lze identifikovat díky různým patologickým kazuistikám (kdy u někoho jeden smysl chybí, druhý nikoliv), jiné jsou spíše hypotetické, otevřené jen tázavému zkoumání (mimořádně, z existence smyslu pro X logicky neplyne existence X). Nesetkal jsem se s tím, že by se v rámci kognitivní vědy tyto „mysly pro...“ explicitně shrnovaly pod nějaké obecné „senzorium“ (pokud by nebylo ztotožněno s vědomím vcelku); k takovému senzoriu by patřilo nejen pět percepčních smyslů, ale i různé typy synestézy a další kognitivní mohoucnosti. Asi by to bylo trochu ukvapené – jde o věci povýtce intuitivní, neurčité a vyvíjející se.

Na rozdíl od dispozic čistě mentálních, jejichž projevy (a jen projevy) jsou přístupné jen fenomenálně, jsou obvyklé *percepční smysly*, navíc vybaveny korespondujícími tělesnými orgány (jako jsou oči, uši, hmatové, chuťové a čichové buňky, atd.), od nichž se i odvíjí běžné rozlišování pěti percepčních smyslů (zrak, sluch, hmat, chuť, čich) a případně i propriocepce (kinestézie apod.). Na tělesné orgány přirozeně navazují specifické struktury v mozku a neurovědná studia dobře podporují i různá jemnější rozlišování v rámci téhož percepčního smyslu (mysl pro barvu, pro tvar, pro prostorovou hloubku, pro pohyb, pro rovnováhu, orientační smysl apod.). Všimněme si ovšem, že kdykoliv užíváme slovo „mysl“, má to vždy též své fenomenální opodstatnění.

Myšlenka konceptuální kontinuity mezi percepčními smysly a vnitřními „mysly pro něco“ v našem pojetí svádí ke dvěma typům extrapolace, u nichž by byla na místě určitá opatrnost. Je to jednak již zmíněná hypotéza, že i vnitřním smyslům by mohly náležet specifické struktury v mozku, a jednak podobnost lidských smyslových orgánů a obdobných orgánů u zvířat by nás mohla lákat k představě, že i u jiných živočichů existuje jisté odpovídající vnitřní prožitky, a to nejen percepční, ale i v (našem širším) pojetí smyslovosti. (Jsem přesvědčen, že můj oslík David měl smysl pro humor!)

I s touto výhradou se zdá plauzibilní (aspoň v případě člověka) hodnotit rozličné „mysly pro něco“ podle kritéria, zda větší váhu má fyziologie anebo

³ Následující partie je založena na mém eseji [10].

⁴ Čeština odlišuje akusativní vazbu (mysl *pro co*) od vazby s genitivem (mysl *čeho*), zatímco v angličtině je „the sense of“ dvojznačné. Alternativa „cit pro“ je jistě možná, ale trochu zavádějící.

fenomenologie. Takové pojetí nebývá ve vědecké literatuře explicitně zohledněno, vždy je však v pozadí. Je to speciálně důležité pro kognitivní vědu, aspoň v té míře, v jaké jsou výrazy typu „smysl pro...“ či „cít pro...“ užívány pro specifické dispozice *vědomých subjektů*, přičemž, jakožto dispozice, má své kořeny spíše v *nevědomí* (kde je můj smysl pro humor, když zrovna není čemu se smát?).

K odlišení od percepčních smyslů v obvyklém významu budu dispozice na fenomenální straně zmíněného spektra dále označovat jako *vnitřní smysly*.

Vnitřní smysly lze chápat jako implicitní, latentní a předreflexivní aspekty naší každodenní zkušenosti, v níž jako by byly „rozpuštěny“. To ovšem neznamená, že si je nemůžeme občas uvědomit a učinit je předmětem vědomé reflexe (podobně jako v případě percepčních smyslů). Zejména je lze reflektovat vždy poté, co byly aktualizovány v nějaké konkrétní situaci (svůj smysl pro humor si mohu uvědomit nejlépe tehdy, když se mi podařilo pochopit dobrý vtip).

Vnitřní smysly tedy mají svou více subjektivně prožívanou stránku, ale lze je často též objektivně zkoumat a klasifikovat psychologickými metodami jakožto dispozice, které jsou myslitelné (i když ne vždy stejně vyvinuté) u všech lidí. To ostatně platí mutatis mutandis i o percepčních smyslech, ty však mají navíc i ony výše zmíněné tělesné orgány propojené s dnes již většinou dosti známými specifickými oblastmi mozku.

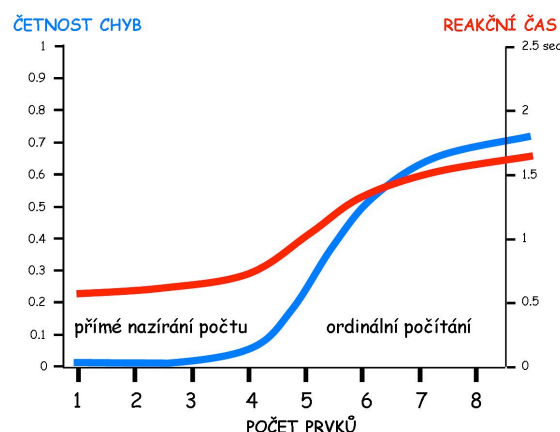
Smysl pro počet, o který nám zde půjde, je jedním z typů vnitřního smyslu, nicméně při své genezi předpokládá i percepční smysly a při svých aktualizacích je zpravidla i potřebuje. Počet lze totiž typicky vidět a/nebo hmatat (např. počet oblázků), vidět a/nebo slyšet (počet úderů do bubnu) atp. (zatímco např. barvu lze pouze vidět). Povaha toho, co je počítané, přitom ustupuje do pozadí (tři oblázky a tři údery jsou si v jistém ohledu blíže než tři oblázky a pět oblázků).

Vyvstává ihned otázka, zda vedle smyslu pro počet lze myslet i něco hlubšího, totiž *smysl pro čísla* jako taková (nikoliv jen číselky). Ten se zdá být i prvotnější než znalost aritmetických operací. V názvu této studie – Jak vidíme čísla – chápeme slovo „vidět“ spíše jako metaforu pro hypotetické vnitřní nazírání (či zření) jakýchsi „obrazů“ či mentálních představ (abstraktních) čísel – jak uvidíme, s vizuálním názorem to nakonec nějak souviset může.

Nabízí se myšlenka, že jistý minimální předreflexivní smysl pro počet je vrozenou dispozicí, která – podobně jako smysl pro čas a prostor – náleží přímo do samé struktury zkušenosti, čímž však netvrdím, že je její součástí nutnou či evolučně prvotní. Z kognitivního hlediska je možné – a jak uvidíme vhodné – u smyslu pro počet rozlišovat různé jeho úrovně podle početnosti

prvků skupiny na níž je použit – jde-li (předběžně řečeno) o počty malé (přímo nazírané), středně velké (ale ještě počítatelné) a velmi velké (definované nepřímo, například pomocí aritmetických operací).

Velmi malé počty vnímáme takřka jíc „na jeden pohled“, bez počítání: vidíme dvojtečku, trojnožku, čtyřhran, pěticipou hvězdu, aniž bychom museli tečky, nožky, hrany či cípy počítat. V psychologii se pro takovéto *přímé nazírání* počtů někdy užívá anglický termín *subitizing*⁵, navržený E. L. Kaufmanem v r. 1949 (na základě latinského „subitus“, náhlý; viz [11]). U větších skupin, zpravidla kolem sedmi osmi prvků (což je individuálně a kontextuálně závislé), se začínáme plést a



Obr. 1 Přechod mezi přímým nazíráním malých počtů a ordinálním počítáním.

chceme-li znát počet, musíme se uchýlit k pomalejšímu *ordinálnímu počítání* – pomalejšímu v tom smyslu, potřebný čas na určení počtu roste s velikostí skupiny. Na obr. 1 je empirická křivka rostoucí četnosti chyb a prodlužujícího se reakčního času v závislosti na velikosti skupiny (adaptováno z [11]).

Smysl pro počet (stejně jako kterýkoliv jiný smysl) má svůj *horizont*. Obecně slovem „horizont“ odkazují k pomyslné a vždy neurčité hranici, na níž dotýčný smysl (pro něco) přestává tím či oním způsobem plnit svou úlohu. Zpravidla to bývá horizont (či práh) rozlišitelnosti, citlivosti, přístupnosti či přípustnosti; mluvit o něčem „za“ takovým horizontem lze jedině radikálním přechodem k jinému diskurzu či k jiné perspektivě, což může být například nějaká objektivní metoda měření anebo nějaký jiný „smysl pro něco“ (tj. smysl pro něco jiného). V našem případě by se ve světle řečeného dalo smyslu pro počet přisoudit dva odlišné horizonty:

⁵ Termín se mi nezdá vhodný pro češtinu, budu proto nadále mluvit o „přímém nazírání“.

horizont přímého nazírání počtu (subitizing) a horizont prakticky proveditelného ordinálního počítání. Tyto horizonty ohraničují v prvním případě „malé“, ve druhém „středně velké“ počty – takto lze však důsledně mluvit jen jakoby z objektivního (zde aritmetického) pohledu, ten teoreticky připouští i „velmi velké“ počty (odpovídající neohraničené posloupnosti přirozených čísel; v té souvislosti odkazují na pojem horizontu či obzoru v pojetí Petra Vopěnky [22]).

Další důležitá věc: zavedme si termín *početnost* pro situaci, kdy něčeho je nesporně a neproblematicky hodně, přičemž skutečný počet je nedůležitý (říkáme: bezpočet), nebo dokonce nesmyslný (paradoxy „nepočtu“⁶). Nicméně pro takové případy lze uvažovat o specifickém vnitřním smyslu, totiž *smyslu pro početnost*, který se zdá být dokonce přirozenější a původnější než smysl pro počet. Smysl pro početnost obecně nepředpokládá smysl pro počet (tj. speciálně schopnost počítat prvky), ba nepředpokládá ani znalost *pojmu* počet. K tomu, abych si všiml, že na nočním nebi je hodně hvězd, nepotřebuji hvězdy počítat. Hromadu pisku nebo kulometnou palbu mohu považovat za jediný objekt (resp. událost), i když vím, že hromada sestává z jednotlivých zrněk a palba z jednotlivých střel – počítat zrnka či střely nemusím, prostě stačí, že jich je (z mého hlediska) opravdu hodně.

Pojem smyslu pro početnost můžeme dále zpřesnit tak, aby pokryl i schopnost poznat, že nějaké seskupení prvků se *zvětšilo* nebo *zmenšilo* nebo (lépe), že jedno seskupení prvků je větší nebo menší než jiné seskupení. Dalo by se říci, že smysl pro početnost svým způsobem propojuje smysl pro počet se smyslem pro prostor (velikost) a čas (trvání).

Někteří autoři hovoří o *numerickém smyslu* (number sense) jako o „schopnosti rychle chápat, odhadovat a manipulovat s numerickými kvantitami“ [5]. Nedomnívám se, že obecná schopnost prakticky počítat (určovat počet prvků ve skupině, ať už přímým nazíráním, ordinálním počítáním nebo jinak) je nutnou podmínkou pro numerický smysl. Zdá se tudíž, že lze vystačit se dvěma elementárními vnitřními smysly – smyslem pro počet a smyslem pro početnost (s rozlišením větší–menší). Ty by spolu byly základem pokročilejšího, numerického smyslu, vposledku i smyslu pro abstraktní čísla a základní aritmetické operace.

3 Jak počítají zvířata

Naznačil jsem, že obecný smysl pro čísla a aritmetiku by mohl být založen na elementárnějších či původnějších

vnitřních smyslech (pro počet a pro početnost). První, co nás napadne, je asi otázka, jak se tyto smysly asi vyvíjely v přírodě, co z toho bylo evolučně dřív a co později. Dostí hypotetickým a nepřímým podkladem evolučních úvah mohou být pozorované schopnosti současných živočišných druhů a (za převládajícího darwinovského paradigmatu) by tyto schopnosti byly zkoumány ve světle hypotéz o jejich případných evolučních výhodách. Empirický materiál je celkem k dispozici, v odborné literatuře se stále víc objevují studie o zvířatech projevujících pozoruhodné schopnosti rozlišovat (malé) počty a – jak se o tom dokonce někdy píše – provádět elementární aritmetické operace (viz např. [12, 13]).

Lze se domnívat, že původní „numerické“ dovednosti *nebyly* založeny na procesu postupného (ordinálního) počítání. Spíše to mohly být schopnosti dvojího typu: (1) schopnost přímým nazíráním poznávat malé počty (např. vajec, mláďat, členů tlupy) a (2) schopnost bez počítání rozlišit menší od větších množství (zrní, ovoce, much), ve smyslu Jamesova bonmotu: „více než více je více než méně“ [2]. Teprve o hodně později, nejspíš už jako lidé, jsme se naučili ordinálně počítat, a ještě později zacházet s abstraktním pojmem čísla, s aritmetickými operacemi a s představou číselné osy přirozených (a posléze reálných) čísel. Čísla se rozmnožila a většina z nich unikla za horizont smyslu pro konkrétní počet.

Řada experimentů nás opravňuje přisuzovat zvířatům především smysl pro (malé) počty. Různé studie dokládají tento smysl u primátů (hlavně šimpanzů), slonů, obojživelníků, ptáků, dokonce i ryb a včel [12]. Rekord mají čtyřdenní kuřata (u nichž nelze předpokládat, že byla trénována), která byla údajně schopna určit, že $1 + 2$ je víc než $4 - 2$, že $0 + 3$ je víc než $5 - 3$ a že $4 - 1$ je víc než $1 + 1$. Doporučuji však jistou opatrnost při interpretaci takovýchto experimentů. Badatelé v oboru zvířecí kognice se často uchylují k různým impresivním formulacím, jako např. „rozpoznávání čísel“ nebo i „aritmetické dovednosti“. Analyzoval jsem si několik studií a zjistil jsem, za prvé, že experimenty se vždy týkaly počtů nějakých specifických objektů, zpravidla relevantních pro život daného druhu (vejce, potraviny apod.). Šlo tedy o počty, nikoliv čísla. Za druhé, ve většině případů bylo možno testované dovednosti vysvětlit čistě schopností rozlišovat jen mezi větší a menší početností, bez potřeby přikročit ke skutečnému počítání. (Unáhlené výroky o „aritmetických“ schopnostech zvířat jsou ovlivněny jednak tím, že početnost se u malých skupin redukuje na počet, a jednak že člověk má ve zvyku užívat aritmetické operace i u malých počtů, kdy by se dalo spolehnout na přímé nazírání.)

Hypotézy o evolučním původu smyslu pro počty a čísla lze opírat o dva typy argumentů. Jeden byl již zmíněn: poukazovat na zjevné evoluční výhody té či oné

⁶ Počet (objektivně) neexistuje, je však myslitelný spodní i horní odhad, takže formálně se lze uchýlit k tzv. intervalové aritmetice.

dovednosti. Takové argumenty vypadají přesvědčivě, chybí jim však (dosud) náležitý genetický podklad. Druhý typ argumentace může mít spíše logickou povahu. Tak třeba smysl pro počet nutně předpokládá další, souběžně vyvíjené anebo již vyvinuté vnitřní smysly, například *smysl pro stejnost a různost* – přesněji řečeno, smysl pro individualitu jednotlivých prvků skupiny a současně smysl pro jistou jejich konkrétní podobnost, bez níž by skupina nebyla skupinou. Tento předpoklad platí i pro přímé nazírání malých počtů: dvě různé tečky téže dvojtečky, tři různé nožky téže trojnožky apod. (V této souvislosti poněkud překvapuje, že James umístil smysl pro rozdíl a podobnost až do další, čtvrté etapy formování elementárních mentálních kategorií.)

4 Reprezentace čísel

Jak jsme si my, lidé, vyvinuli *smysl pro čísla*, rozumí se pro abstraktní čísla, jako pro něco, co inherentně souvisí s počty, avšak bez vazby na to, *co* je počítáno? Uvažovat a mluvit lidským způsobem o abstraktních číslech je možné jedině za pomoci patřičné slovní nebo symbolické reprezentace čísel. (V tomto ohledu nesdílím názor některých autorů, jako je například známý neurovědec Jean-Pierre Changeux či výše citovaný Stanislas Dehaene, kteří ztotožňují smysl pro čísla s aktivací specializovaných neuronálních obvodů v mozku – což by mělo platit o člověku stejně jako o zvířatech. Dle těchto autorů zacházení s numerickými kvantitami nevyžaduje ani řeč ani vědomí, stačí mozek.)

Pojem reprezentace předpokládá určité rozlišení – *co* se reprezentuje *čím* –, přičemž běžný význam českého slova „číslo“ je polyvalentní (máme dokonce i čísla telefonní a popisná). Proto k odlišení (abstraktních) čísel od jejich reprezentací budu ve druhém významu důsledně užívat slovo „číslovka“ (viz kap. 1). Číslovky nicméně chápeme v co nejobecnějším smyslu, nejen jako slova („jedna“, „dvě“, „tři“,…) a jejich kombinace („třicet šest“), ale i jako kterékoliv jiné dohodnuté symboly či seskupení symbolů určených k reprezentování čísel. Mohou to být grafické znaky (1, 2, 3, 4, ..., nebo 01, 10, 11, 100,..., nebo I, II, III, IV,...), ba i jiné reprezentace (aspoň pro účely této studie), například geometrické tvary, buď kreslené nebo představované v mysli (viz kap. 8), nebo signály pro jiné percepční smysly (sluch, hmat).

Abychom se vyhnuli nedorozumění: nepředpokládám, že číslovky jsou vždy odvozeny či závislé na již předem existující představě či pojmu (abstraktního) čísla, jak by k tomu navádělo samo sloveso „reprezentovat“. V našem pojetí mohou být číslovky stejně dobře přiřazeny přímo počtům. V tom případě nejprimitivnější a nejméně úsporná by byla *reprezentace analogická* (též zvaná *unární*), kdy číslovky reprezentují daný počet *stejným*

počtem nějakých značek (teček, čárek, zářezů, uzlů apod.), popřípadě i zvuků (úderů zvonu).

Je známo, že mnoho lidských kultur užívá analogické číslovky pro tři, někdy čtyři i pět nejmenších čísel (či počtů), pro něž je přímé nazírání počtu ještě spolehlivé

Cuneiform Notation	𐎶	𐎶𐎶	𐎶𐎶𐎶	𐎶𐎶𐎶𐎶	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
Etruscan Notation					^
Roman Notation	I	II	III	IV	V
Mayan Notation	.	..	...		—
Chinese Notation	一	二	三	四	五
Ancient Indian Notation	—	=	≡	+	Υ
Handwritten Arabic	1	٢	٣	٤	٥
Modern "Arabic" Notation	1	2	3	4	5

Obr. 2 Symbolická reprezentace prvních čísel v různých notacích (podle [14]).

(viz obr. 2). Pro větší čísla se užívají dílem speciální symboly, dílem juxtapozice (zřetězení) menších číslovek – příklad druhého typu je běžný desítkový poziční systém.⁷ Princip juxtapozice svou iterativností eliminuje principiální omezení na velikost reprezentovaného čísla a tím nás osvobozuje od předpokladu, že něco je číslem *jen* tehdy, když reprezentuje nějaký *přirozený* počet (tj. počet věcí v „našem“ světě). Bez tohoto předpokladu lze myslet čísla „jako taková“, rodí se *abstraktní pojem čísla*.

V tuto chvíli se můžeme vrátit k otázce ze začátku této kapitoly (kde se vzal smysl pro čísla?). Stěží se dožijeme empirické odpovědi na tuto otázku, nic však nebrání si hrát se spekulacemi. Dobrá, představme si zkusmo a na základě předchozích úvah vývoj číselného smyslu u našich dávných předků, a to v několika stadiích, které se navzájem asi všelijak prolínají a zpětně ovlivňují (a postupem času jsou spíše kulturně než evolučně přenášené mezi generacemi):

- (1) Smysl pro stejnost a různost.
- (2) Smysl pro malé, přímo nazírané počty (něčeho konkrétního) a na něm zcela nezávislý smysl pro početnost (viz předchozí kapitolu).

⁷ Zde nemohu než vzpomenout na Funes, hrdinu Borgesovy povídky „Funes, muž se zázračnou pamětí“ ([23], s. 111–122). Funesovi se znelíbil princip juxtapozice a rozhodl se pro každé číslo vymyslet nové individuální jméno. V několika dnech dospěl ve své originální číselné soustavě za číslo dvacet čtyři tisíc.

- (3) Jakási velmi primitivní „konkrétní aritmetika“ nad těmito počty (po useknutí prstu se pět prstů změní na čtyři prsty).
- (4) Tato aritmetika umožňuje fyzicky a poté i mentálně zvětšovat či zmenšovat počet (jednoho a téhož) a/nebo různé počty (opět téhož) mezi sebou porovnávat (prstů na jedné ruce je méně než prstů na obou rukách).
- (5) Přichází velký mentální skok: poznání, že počet a početnost (vztaheno k témuž souboru) spolu svým způsobem souvisí.
- (6) Ordinální počítání prvků ve větších souborech.
- (7) Druhý velký mentální skok: poznání, že počet něčeho nějak souvisí s počtem něčeho jiného; přinejmenším lze oba počty spolu porovnávat.
- (8) Počet něčeho důležitého (plodů, dětí, ovcí, kanoí) lze porovnávat s počtem něčeho náhradního (teček, čárek, zářezů, uzlů).
- (9) Číslovky.
- (10) Čísla.
- (11) Číselná osa nebo jiná potenciální reprezentace množiny *všech* čísel.
- (12) Aritmetické operace.
- (13) Formální aritmetika (teorie přirozených čísel).

Poslední tři stadia jsem trochu odbyl, nejsou tématem této práce. Z hlediska kognitivní vědy jsou asi nejdůležitější dva přechody: od (5) k (6) a od (8) k (10). V prvním přechodu člověk vykročil od malých, přímo nazíraných počtů směrem k velkým počtům, zatímco ve druhém přechodu vykročil od počtů k číslům. Zda číslovky předcházely čísla anebo čísla číslovky, nevím, viděl bych to spíš jako hermeneutický kruh.

Pro vztah čísel a číslovek jsou zajímavé poznatky S. Beller a A. Benderové [15] o tom, že některé jazyky (např. polynézké) si dodnes zachovaly specifické číslovky podle typu počítaných věcí – například, zda jde o nástroje, plody pandánu, plody chlebovníku, chobotnice apod. (však i my máme své párky, tucty, kopy, mandele a veletucty). Není jednota v názoru, zda objektově specifické číslovky předcházely abstraktní pojem čísla a číselné osy, anebo naopak. Já si ve světle předchozích úvah myslím, že ano, kdežto Beller a Benderová argumentují ve prospěch opačné hypotézy.

5 Tanec s čísly

Na předchozí úvahy by se dalo navázat zkoumáním vzájemných inherentních vztahů mezi třemi variantami před-aritmetického smyslu pro čísla a na nich založených konceptualizací. Jak už víme, jsou to: (1) čísla jako počty

identifikovatelných (viditelných či jinak vnímatelných) entit, (2) abstraktní čísla (neviditelná a nehmatatelná, pouze pomyslná) a (3) čísla ztotožněná s *číslovkami* toho či onoho typu (a tudíž viditelná, sdělitelná a pamatovatelná). Bylo by jistě zajímavé se zamýšlet, jak tyto jednotlivé varianty mohou posloužit jako podklad pro intuitivní představu o potenciálním nekonečnu. V prvním případě si můžeme představovat postupný nárůst početnosti prvků nějaké skupiny, což nepodléhá ani jednomu z horizontů zmíněných v kap. 2 (nemusí se totiž nic počítat, je tu jen ten nárůst), v druhém případě si můžeme vymýšlet další a další formální definice extrémně velkých čísel⁸ (aniž bychom čekali, že to někdy skončí), v třetím případě si prostě uvědomíme, že systém číslovek s juxtapozicí nemá principiální omezení (principiální v tom smyslu, že odhlížíme od fyzického prostoru, času či paměti pro číslovky samotné).

Zkusme otevřít poněkud jiný okruh otázek, které by mohly říct něco podstatného o lidské kognici a vědomí. Zkousím se ponořit hlouběji do nitra své mysli a ptám se, co si to vůbec *představuji*, když myslím na nějaké číslo. Je-li to představa vizuální, *co* vidím? Je to představa přesná, nebo je to spíše neurčitá množina podobných čísel? Jak je taková představa ovlivněna velikostí představovaného čísla, jeho aritmetickými vlastnostmi, popřípadě způsobem, jak mi bylo číslo prezentováno – zda explicitně (v podobě počtu něčeho nebo v podobě číslovky) nebo implicitně, pomocí aritmetické definice (např.: „nejmenší liché prvočíslo“)? Nebo jinak?

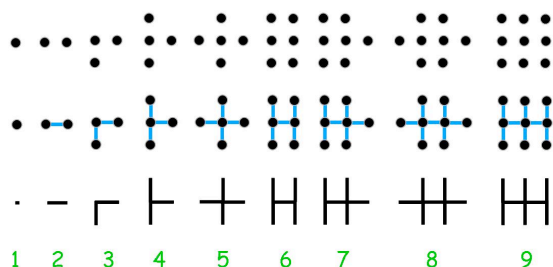
Dovolím si uvažovat trochu spekulativně. Jsme-li schopni přímo nazírat (bez počítání) malé počty, co nám principiálně brání takto přímo „vidět“ i daleko větší počty, nebo dokonce čísla, která nejsou počtem ničeho? V naší kultuře jsme příliš v zajetí slov, grafických znaků, aritmetických operací a ovšem i lineárního uspořádání čísel. Vidím to sám na sobě: slyším „třicetšest“ a buď mi naskočí vizuální představa dvouciferné číslovky „36“, nebo mi v duchu zazní „šest–krát–šest“ (zafixovalo se mi to na obecné škole v hodinách násobilky), nebo mě třeba i napadne formule „ $36 = 2^2 \times 3^2$ “ (mám-li v oblíbené prvočíselné rozklady), případně i tečku na myšlené ose čísel. Kupodivu si (aspoň já) nepředstavím raději třeba čtverec z teček o šesti řádcích a šesti sloupcích nebo hranol z kostek, čtyři vodorovně, tři svisle a tři dozadu. Proč? Takovéto geometrické tvary bychom si přece daleko lépe představovali, pamatovali, ba mohli si s nimi v duchu všelijak zajímavě hrát. Zkuste si třeba představit,

⁸ O formálním zápisu extrémně velkých čísel existuje bohatá literatura (stačí si otevřít Wikipedii pod heslem „large numbers“). Jde většinou o čísla „nepřirozená“ v tom smyslu, že pokud jim odpovídají nějaké počty, pak jsou to počty opět jen čísel.

že váš vnitřní zrak by viděl čísla v podobě zprohýbaných barevných linií o různé tloušťce, jako na obr 3 od malíře Zdeňka Sýkory. Bezpochyby by s tím bylo spojeno mnoho problémů, ale co kdyby šlo třeba řešit aritmetické úlohy mentálním pohybem takových linií? Přinejmenším pro ty z vás, kdo máte obrazovou představivost i paměť, by se horizont přímého nazírání čísel posunul podstatně dál.

Budeme si trochu hrát. Na obr. 4 je příklad možného způsobu, jak odvodit “tvar” (relativně malého) čísla přímo z analogické reprezentace počtů (počtem teček). V první řadě je devět skupin o různém počtu teček (singleton, dvojice, trojice, ... až devítice). Zafixujeme v těchto skupinách vzájemné polohy teček (v druhé řadě na obr. 4 vyznačeno modrými spojnicemi), takže již můžeme zapomenout na tečky a výsledné tvary (v třetí řadě) považovat přímo za číslovky (či za číslice). Jak je snadno vidět, jednotlivé tvary vznikly prostou juxtapozicí některých předchozích tvarů; díky podobné juxtapozici (třeba i trojrozměrné) by bylo možno reprezentovat daleko větší počty (či čísla). Tato reprezentace by pro rychlé přímé nazírání čísel (subitizing) a pro jejich mentální obrazy byla jistě vhodnější než běžný dekadický nebo binární jednosměrný poziční systém. (Jsem dalek si nechat popsanou reprezentaci patentovat – vše, co zde píši, nepovažuji za víc než heuristické vodítko k hlubším teoretickým spekulacím. Ostatně viz kap. 8.)

Není vyloučeno, že určitá vložka pro tvarovou reprezentaci počtů a čísel latentně dřímá kdesi hluboko pod hladinou lidského vědomí (podobně jako vložka pro



Obr. 4 Konstrukce nestandardních číslovek (číslic) z analogové reprezentace počtu.

rozpoznávání lidských tváří). Jenom ji neumíme probudit a využít. Nesmyslná fantazie, řeknete. Ne tak docela.

Existují hypotézy, že geniální autisté s mimořádnými počtářskými dovednostmi užívají synestetickou mentální reprezentaci čísel v jiných než přirozených percepčních modalitách, tj jako objekty vizuální, sluchové, taktilní apod., či možná i objekty dynamické. Jako příklad lze

uvést neuvěřitelného Daniela Tammeta (proslaveného rekordem v pamatování si čísla π , jehož prvních 22,514 číslic desetinného rozvoje byl schopen odříkat z paměti). Cituji několik úryvků z jeho vlastní reflexe [16]:

Abstraktní informaci – například čísla – jsem si vždy představoval ve vizuální dynamické podobě. Čísla v mé hlavě nabývají složitý, mnohorozměrný tvar, s nímž mohu manipulovat, abych získal výsledky sčítání nebo je porovnávat, abych určil, zda to jsou nebo nejsou prvočísla. [...] V mé mysli jsou čísla a slova něčím daleko víc než



Obr. 3. Zdeněk Sýkora, Line č 56, 1988

inkoustové klikyháky na papíře. Mají tvar, barvu, texturu apod. Zjevovaly se mi jako živé, a proto jsem je jako dítě považoval za své „přátele.“ [...] Nechroustám čísla jako počítač, spíš si s nimi tančím. [...] Překvapuje mě, že jiní lidé nemyslí stejně jako já. Nemohu si představit svět, v němž by čísla a slova byla jiná, než jak je prožívám já! [...] Tvary mých čísel mají sémantický význam, což znamená, že jsem schopen vizualizovat jejich vztah k jiným číslům. Jednoduchým příkladem by mohlo být číslo 37, které je žmolkovité jako ovesná mouka, nebo číslo 111, které je podobně žmolkovité, ale též zakulacené jako číslo tři (protože to je 37×3).

Jde o výjimečný případ v tom, že zázračný počtář byl schopen dát zprávu o své vnitřní zkušenosti. Není divu, že takové sdělení vyvolá víc otázek než odpovědí. Jak jsem již poznamenal, v současných diskusích se předpokládá, že vysvětlení poskytne studium mozku – tento názor ani moc nepřekvapuje v době překotného rozvoje zobrazovacích metod. Nemyslím si však, že bychom mohli studiem mozku získat přímé a platné odpovědi na fenomenálně formulované otázky o subjektivní zkušenosti. Řekne-li Tammet, že čísla „nabývají složitý, mnohorozměrný tvar“ nebo že si „s nimi zatancuje“, příliš to neurovědům nepomůže v jejich hledání korespondujících jevů či dějů v mozku. Tím v žádném případě nechci tvrdit, že Tammetovo líčení nedává smysl – spíše naopak, domnívám se, že jeho výpovědi říkají svým metaforickým jazykem o lidské mysli víc, než cokoliv, co by byl neurovědec schopen popsat na základě neuronální dynamiky.

6 Tajemství prvočíselných dvojčat

Nechci mást, nejde o dvojice prvočísel lišících se jen o dvojku. Mám na mysli Johna a Michaela, proslavená silně retardovaná autistická dvojčata, která studoval Oliver Sacks v 60. letech minulého století [17]. Přistihl je jednou, jak si hbitě vymýšlela a vzájemně sdělovala šestimístná prvočísla a údajně to za Sacksovy asistence dotáhla i na hodně větší prvočísla, až vznikl problém, jak je ověřovat – k údivu nám ovšem stačí i ta šestimístná.

Nemám v úmyslu se zde zabývat možnými důsledky Sacksova případu s dvojčaty pro neurovědu nebo psychologii – chci jej užít ke spekulativním úvahám v jiném směru, totiž jak lidské vědomí či spíše podvědomí může vůbec zacházet s velkými čísly. Důležitá při tom je skutečnost, že dotyčná dvojčata neuměla provádět ani jednoduché aritmetické operace, jako je sčítání nebo odčítání, a už vůbec nechápala, co je to dělení nebo násobení ([17], s. 204). Stojí za to ocitovat úryvek ze Sacksova vlastního líčení situace, jeho setkání s Johnem and Michaellem (tamt., s. 208):

[S]eděli v koutě, tajemně se usmívali, jak jsem to u nich ještě nikdy neviděl; užívali si nějaké skryté společné radosti a pohody. Zůstal jsem potichu, abych je nevyrušil. Bavili se nějakou neznámou, čistě numerickou hrou: John vyslovil nějaké šestimístné číslo; Michael číslo opakoval, přikývl a usmál se. Vypadal, jako by to číslo vychutnával, převaloval na jazyku. Pak zase on vyslovil šestimístné číslo, Michael ho přijal a vychutnal. Zpovzdálí vypadali jako dva koštěři, kteří si předávají vína vzácných chutí a vůní. Neviděli mě a já jsem zůstal potichu, očarován a plně zaujat.

Sacks si pohotově čísla zapsal a později v knize numerických tabulek objevil, že ona šesticiferná čísla byla *prvočísla*! Příští den chtěl dvojčata překvapit a zkusil to s osmiciferným prvočíslem. Dvojčata po krátké pauze současně vyprskla smíchy. Hra s prvočísly pokračovala další dny za rostoucí délky číslovek, až dvojčata přispěla s dvacetificiferným číslem, pro něž Sacks už nebyl schopen zjistit, zda jsou to prvočísla (tehdy ještě neexistovala Wikipedie).

Upozorňuji na tři – pro nás relevantní – průvodní jevy činnosti dvojčat:

- (1) Nápadné emoční zaujetí pro prvočísla;
- (2) Reakce dvojčat jsou mírně zpožděné, a to tak, že čím větší počet cifer (čím delší číslovka), tím déle jim trvá nalézt nebo rozpoznat prvočísla (typicky několik minut);
- (3) Jsou náznaky, že jistou důležitou roli při tom hraje vizualizace.

Tento poslední bod je podložen pozorováním dvojčat při jiných numerických výkonech, jako jsou (stejně

obdivuhodné) kalendářové výpočty. Sacks referuje ([17], s. 204):

Při „výpočtu“ můžeme sledovat, jak se pohybují a potom ustrnou jejich oči, jako by ohledávaly nějakou vnitřní krajinu [...], jako by měli vnitřní „vidění“, jako by docházelo k vizualizaci [...]

Zůstane navždy záhadou, co se dělo v myslích oněch dvojčat – jediné, co sama byla schopna sdělit, že to nějak *prostě vidí*.

Není divu, že případ vzbudil velký zájem a objevilo se již několik pokusů vysvětlit prvočíselné schopnosti dvojčat (viz např. [18], [24]). Většinou se zakládají na aritmetických vlastnostech prvočísel a na známých algoritmech.⁹

Příkladem může být studie A. W. Snydera and D. J. Mitchella [24]; její autoři se domnívají, že složité aritmetické kalkulace (násobení velkých čísel, dělení, faktorizace apod.) jsou již nějak zabudovány v mozku každého z nás (jak a proč neříkají), ale že k nim – na rozdíl od zázračných autistických počtářů – nemáme efektivní přístup. V pozadí jejich teorie je přesvědčení, že (a) vše důležité se odehrává na neuronální úrovni, (b) že identifikace prvočísel automaticky vyžaduje znalost standardních aritmetických operací a (c) že všichni máme (tj. naše mozky mají) v principu stejné latentní dovednosti. S ničím z toho nesouhlasím (což neznamená, že jsem přesvědčen o opaku). Vybral jsem si bod (b), který chci zproblematizovat ad hoc vymyšleným příkladem níže.

7 Prvočísla bez aritmetiky

V předchozí kapitole jsem uvedl tři průvodní jevy pozorované na Sacksových dvojčatech; druhý jev (prodleva v reakci) napovídá, že při produkování nebo rozpoznávání prvočísel hraje roli nějaká vnitřní *procedura* (tak bychom to nazývali my), která potřebuje čas. Pravda, je to čas celkem krátký ve srovnání s teoretickými prvočíselnými algoritmy, nikoliv však zanedbatelný ve srovnání s přímým nazíráním malých počtů (u kohokoliv), anebo i větších počtů (u výjimečných autistických jedinců). Snad by se u našich prvočíselných dvojčat dalo uvažovat o vhodném propojení přímého nazírání tvarů a nějaké nearitmetické procedury založené na mentální manipulaci s určitými tvarovými vizuálními představami. V takovém případě by nebylo již těžké předpokládat, že takové vizuální tvary jsou celé anebo částečně uchovávány v nevědomí, stejně

⁹ Mimochodem teprve nedávno byl objeven deterministický algoritmus na rozpoznávání prvočísel, který je polynomiální v čase [19].

jako bezpočet tváří našich známých, třeba i všech osob, s nimiž jsme se kdy setkali.

Na příkladu ukáží, že podobná procedura pro poznávání prvočísel je myslitelná, a to až podezřele snadno. Především, že se tím nehodlám pokoušet o vysvětlení konkrétních schopností Sacksových dvojčat (ta si ostatně prvočísla nejspíš říkala anglicky), ani jiných zázračných počtářů. Jde mi spíše o jakýsi myšlenkový experiment: ukázat, že je principiálně možné rozpoznat prvočíselný počet bez použití obvyklé aritmetiky.

Možná si pamatujete, jak jsem se v kap. 5 letmo zmínil o možnosti „vidět“ číslo 36 v podobě čtverce z teček uspořádaných v šesti řádcích a šesti sloupcích. Dobrá, uvažujme nyní libovolnou skupinu teček, nebo raději kuliček (nebo kostiček nebo vojáků – jak chcete, já zůstanu u kuliček). Víme, že pokud se tuto skupinu nepodaří přeskupit do tvaru netriviálního obdélníka,¹⁰ odpovídá počet kuliček prvočíslu. Stačí tedy systematicky přesouvat přebytečné kuličky vždy do nového sloupce a jen sledovat, zda vzniknul netriviální obdélník. Pokud ano, není počet kuliček prvočíslem. Pokud naopak několik kuliček přebývá, lze je přesunout vždy do neúplného, popřípadě do nového sloupce. Činnost se opakuje, v krajním případě tvoří celá skupina kuliček jedinou řadu, což znamená, že počet kuliček je prvočíslo.

Na obr. 5 je blokové schéma jedné z možných implementací této procedury, při níž by se přesouvaly opravdové kuličky uvnitř prostoru omezeného stěnami, z nichž jedna je pohyblivá – jde tedy o fyzickou implementaci. Bylo by jistě snadné tuto proceduru naprogramovat i pro počítač (což je však přesně to, o čem nám zde nejde).

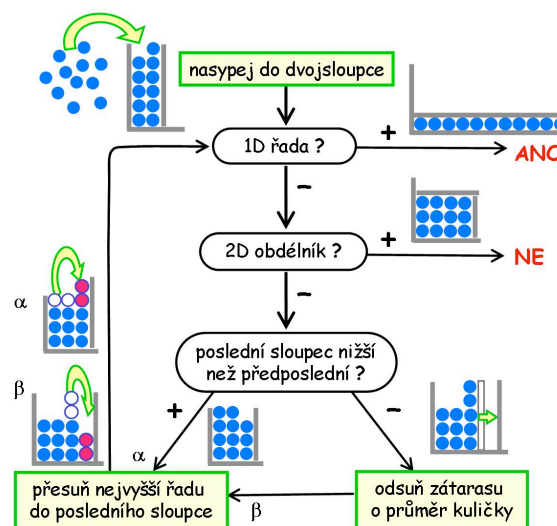
Všimněme si několika vlastností popsané (nebo podobné) procedury, které by pro naše účely mohly mít význam:

- (1) Proceduru lze v principu realizovat též v pouhé vizuální představě, obdobně jako si šachisté představují budoucí tahy na šachovnici.
- (2) Nicméně taková čistě pomyslná realizace by pro příliš velké (tj. početné) skupiny dříve či později narazila na biologické nebo psychologické hranice.
- (3) S rostoucí velikostí skupiny roste počet kroků, které je třeba vykonat (přesouvání kuliček, testování obdélníka) a tedy i potřebný čas.¹¹

¹⁰ Obdélníkem zde nazývám seskupení nějakých entit ve tvaru pravidelné mřížky s pevným počtem sloupců a řad. Samotný sloupec nebo samotná řada je *triviální* obdélník.

¹¹ Pro n kuliček je odhad časových nároků procedury úměrný n^2 (což je maximální počet přesunů jednotlivých kuliček) nebo n (počítáme-li jen hromadné přesuny přebývajících kuliček).

- (4) Procedura nevyžaduje žádnou informaci o tom, *kolik* prvků (kuliček) testovaná skupina skutečně má.
- (5) Rovněž nevyžaduje pracovní paměť pro nějaké mezivýsledky.



Obr. 5 Procedura rozpoznávání prvočíselného počtu přesouváním kuliček.

Jaké kognitivní schopnosti taková procedura předpokládá? Zhruba řečeno tyto: (a) schopnost rozpoznat obdélníkový tvar, (b) schopnost identifikovat přebytečné prvky a (c) přesouvat je jednu po druhé nebo hromadně na určené místo, (d) jistotu, že skupina má stále stejný počet prvků (konstantní početnost). Mezi předpoklady *není* znalost aritmetických operací (snad s výjimkou (d), i když konstantní početnost není třeba ověřovat aktuálním počítáním prvků – v tom je fyzická realizace spolehlivější než mentální).

8 Čísla zkroucená do číslovek

Procedura rozpoznání prvočísel z předchozí kapitoly je sice univerzální v tom smyslu, že nezávisí na velikosti testovaného souboru prvků, existují však drastická omezení na fyzickou i imaginativní realizaci. Procedura je omezena na reprezentace čísel v podobě počtu prvků nějaké skupiny; výkony autistických dvojčat sice považujeme za zázračné, myslet si však, že ve svých hlavách přesouvají z místa na místo miliony imaginárních kuliček by už bylo trochu moc.

Dostáváme se tak k jinému tématu: jaké by mohly být *další* mentální reprezentace čísel a o jakých

transformací z jedné reprezentace na jinou by šlo principiálně uvažovat pro mentální imaginaci.

Zatím jsme se vlastně setkali jen se dvěma konkrétními typy reprezentace: číslo vyjádřené počtem (něčeho, třeba kuliček) a číslo vyjádřené číslovkou v (nějaké) poziční soustavě (číslovka jako slovní druh je v západních jazycích více méně slovním vyjádřením číslovek desítkové soustavy). V této kapitole uvedu – opět jen jako nezávazný myšlenkový experiment – příklad relativně jednoduchého překladu z obvyklé reprezentace čísel v poziční soustavě (desítkové, to však není podstatné) do uměle vytvořených (totiž mnou vymyšlených) grafických „číslovek“, které mají potenci reprezentovat i obrovská čísla, a to jen svým tvarem, záměrně takovým, aby dovoľoval přímé nazírání (rozpoznání na jeden pohled, viz kap. 2).

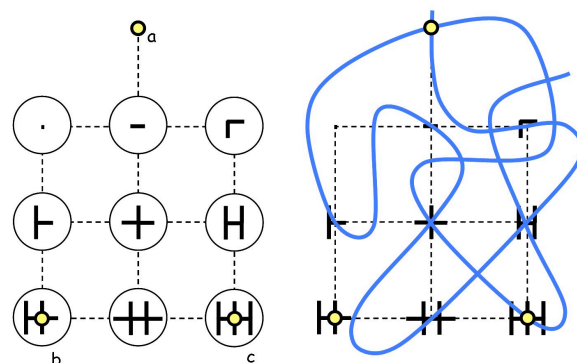
V zájmu konkrétnosti začneme malým souborem – označme jej N_0 –, obsahujícím devět znaků-číslic z obr. 4 (mohlo by to být cokoliv jiného, např. arabské číslice, zde jen chci potlačit tendenci automaticky ztotožňovat číslice s čísly). Nebudeme tento soubor dále rozšiřovat (víme, že by to bylo snadné pomocí dvousměrné juxtapozice), nýbrž budeme N_0 považovat za *první*, nejjednodušší a nakonec vlastně skrytou reprezentační úroveň. (Soudím totiž, že pro reprezentaci může být důležité, má-li hierarchickou stavbu.¹² Ostatně už i desítná poziční soustava je hierarchická: první úroveň odpovídá číslicím, druhá místům, které tyto číslice mohou zaujmout v myšlené sekvenci pozic; směrem doleva tato místa postupně zastupují rostoucí mocniny čísla 10. Naš níže popsany systém má rovněž dvě úrovně, „viditelná“ bude jen ta vyšší.)

V dalším kroku rozmístíme a zafixujeme znaky z N_0 do nějaké předem stanovené formace; v našem konkrétním příkladu zvolíme pravidelnou 3×3 mřížku a znaky N_0 přidělíme jejím devíti vrcholům jako na obr. 6 vlevo. K mřížce navíc přidáme speciální vrchol a (k reprezentaci nuly). Výslednou mřížku i s pevným přidělením prvků N_0 k jejím vrcholům označme $G(N_0)$. Protože přidělení znaků z N_0 vrcholům mřížky je trvalé, můžeme si dále představovat už jen samotnou mřížku, dokonce ještě méně: víme, že k jednoznačnému určení takovéto pravidelné mřížky (v eukleidovské rovině) stačí jen tři referenční body, např. a , b , c na našem obrázku, kde jsou vyznačeny žlutě.

Představme si nyní nějaké číslo n zadané číslovkou v desítné poziční soustavě, řekněme $n = 6\,950\,425\,863$. Nakreslíme (nebo si jen představíme?) hladkou křivku procházející mřížkou $G(N_0)$ – na obr. 6 modrá linie –; začátek křivky je v referenčním bodě a a prochází

popořadě všemi (a jen těmi) vrcholy mřížky, k nimž jsou přiděleny (znaky pro) číslice 3, 6, 8, 5, 2, 4, 0, 5, 9, 6 (jde o desítný zápis číslovky n v opačném pořadí; první průchod bodem a slouží pouze k orientaci). Mezi jednotlivými průchody skrze vrcholy je tvar křivky libovolný a není proto divu, že k témuž číslu existuje nespočetně nekonečná množina křivek. Naproti tomu každá konkrétní konečná¹³ křivka (i se svými třemi referenčními body, u jednoho z nichž – řekněme a – začíná) vždy reprezentuje *jediné* číslo (několik příkladů je na obr. 7).

Jak toto číslo zpětně získáme? Předpokládejme, že je dán (myšlen, vybavován) obraz sestávající z křivky a tří referenčních bodů a , b , c . Nad těmito body nejprve zkonstruujeme¹⁴ mřížku $G(N_0)$. Ta se s křivkou překrývá a je k ní vlastně jakýmsi dešifrovacím klíčem. Začneme



Obr. 6 Konstrukce křivky reprezentující číslo 6 950 425 863.

sledovat křivku od bodu a a zapisujeme znaky (lépe rovnou arabské číslice dle obr. 4 dole) přidělené vrcholům, kterými křivka prochází (zapisujeme je zprava

¹³ Konečná co do délky i co do plochy, kterou celá pokrývá.

¹⁴ Pro ty, kdo nevědí, uvádím elementární návod k této konstrukci v šesti krocích: (1) nakreslíme úsečku p spojující dva navzájem si nejbližší referenční body a a b ; (2) vyznačíme bod, který ji půlí; (3) tento bod spojíme s třetím (vzdálenějším) referenčním bodem úsečkou q , kterou poté (4) rozdělíme na tři stejné díly. Tím získáme nové dva body, jimiž (5) vedeme přímky r a s rovnoběžné s úsečkou p . Poté (6) koncovými body úsečky p vedeme přímky t a u rovnoběžné s úsečkou q . Získali jsme celkem 6 čar (p , q , r , s , t , u), které se protínají v 9 bodech – výsledek je mřížka s 9 vrcholy, k nimž už jen zbývá standardně přidělit znaky souboru N_0 (viz obr. 6). (Ponechávám na čtenáři, aby si domyslel mírné požadavky na vzájemné polohy referenčních bodů, aby se vyloučily degenerované případy, popřípadě také – vlastně přípustné – zkosené mřížky.)

¹² Termín „hierarchie“ poukazuje ke skutečnosti, že na každé úrovni je užita jiná reprezentační strategie.

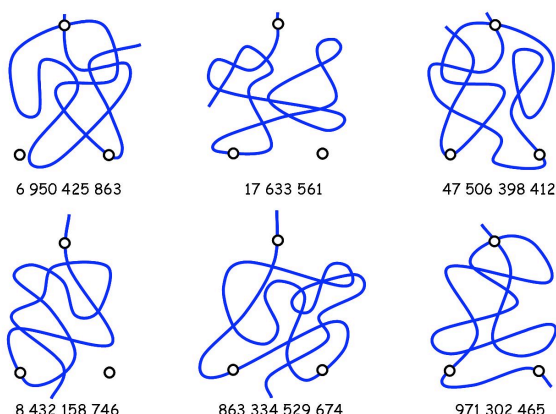
doleva). Nakonec tak dostaneme jedno jediné číslo, které křivka reprezentuje.

Připouštím, že popsany způsob reprezentace i obě transformační procedury jsou velmi nepřírozené, vlastně i docela podivné. Více méně však splňují můj záměr: demonstrovat, že čísla principiálně *lze* reprezentovat pomocí tvarů (zde křivek), a to takových, které lze přímo nazírat v daleko větším rozsahu (do větších čísel, srov. obr. 7), než u pozičních zápisů (kolikamístné číslovky poznáte na jeden pohled?).¹⁵ Navíc, jak jsme viděli, jsou myslitelné ukládací i rozpoznávací postupy, které lze v jisté míře provádět jen v představách (takříkajíc z hlavy) a které nevyžadují žádné postupné (ordinální) počítání, tím méně znalost standardních aritmetických operací.

9 Prvočísla jako jeden objekt

Až doposud jsem uvažoval o vnitřním smyslu pro počet a pro čísla (včetně prvočísel) v poněkud zúženém pohledu – vždy šlo totiž o singulární (i když libovolnou) *instanci* počtu, čísla apod. Je však možný i jiný pohled, v němž by šlo o lidské nazírání *celé* množiny čísel (speciálně prvočísel).

Je například myslitelné, že Sacksovým autistickým



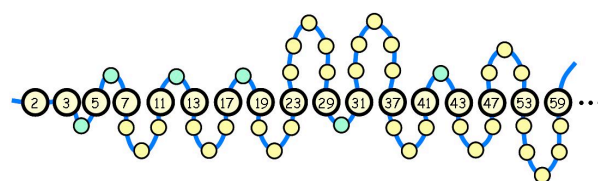
Obr. 7 Ukázky tvarové reprezentace poměrně velkých čísel.

dvojčatům vůbec nešlo o konkrétní čísla a jejich prvočíselnost, nýbrž že měla před očima nějakou množinu prvočísel nebo čísel jako celek. Podobně totiž Vilayanur Ramachandran a Edward Hubbard referují o prožitcích zkoumaných synestetických subjektů [20]:

Když je [dotyčný] subjekt požádán o vizualizaci čísel, sděluje, že se mu jeví rozmístěna na souvislé linii, která je

rozezpjata od jednoho bodu v zorném poli k jinému, vzdálenému bodu – například z horního levého bodu směrem dolů doprava. Linie nemusí být přímá – někdy je zakřivená nebo zkroucená nebo se i vrací zpět. U jednoho z našich subjektů je číselná linie centrovaná okolo „světostředných“ [world centered] koordinát – subjekt se může procházet po 3D krajině čísel a zkoumat [inspect] čísla z nových nekanonických zorných úhlů. Menší čísla jsou na linii zpravidla více nahuštěná a bývají též zbarvená.

Pro Sacksova dvojčata bychom mohli hypoteticky uvažovat o modifikaci takového prožitku, při němž by měla přímý přístup k celé množině prvočísel, malých i velkých (určitě nikoliv k množině *všech* prvočísel



Obr. 8. Přímá řada prvočísel protíná křivku všech čísel.

v matematickém smyslu). Možná si představují jeden velmi složitý geometrický útvar, z něhož nápadně vyčnívá podmnožina prvočísel, zatímco čísla složená vyplňují nezajímavý prostor mezi nimi nebo okolo nich. Na obr. 8 je uveden velmi primitivní příklad, v němž se složená čísla proplétají kolem přímé linie prvočísel. Velmi vzdáleně to připomíná známý pojem *kognitivní mapy*, což je individuální vnitřní reprezentace uspořádání okolního světa (například města), v němž z neurčitěho pozadí ostře vystupují místa (domy, ulice), která jsou pro subjekt tak či onak důležitá.

Uvědomuji si sám na sobě, že kdykoliv přemýšlím o přirozených číslech jako takových (tedy nikoliv o počtech něčeho), představuji si je jako pomyslnou lineární řadu, která jako by ode mne ubíhala kamsi do dále, k neurčitěmu horizontu. Pro mne je ovšem ten horizont poměrně blízko a pokud vůbec z řady něco vystupuje nápadněji, nejsou to prvočísla ale mocniny desítky. Autistou bych byl rád, ale jen na krátkou chvíli.

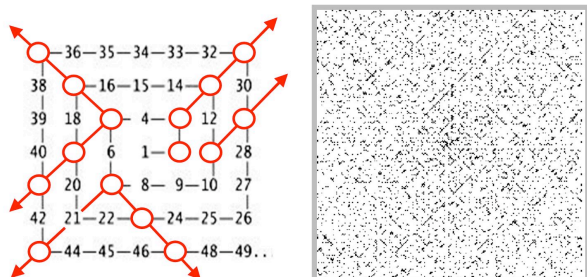
Nezapomeňme na jednu otázku, která se týká zvláštního zaujetí oněch, byť jinak silně retardovaných, dvojčat právě pro prvočísla. Proč právě ta, mezi všemi čísly, je tolik rozveselovala?

Jedna z možností by souvisela onou charakteristikou prvočísel, na níž je založena rozpoznávací procedura v kapitole 7, totiž že prvočísla odpovídají takovým počtům nějakých prvků, které vzdorují jakémukoliv uspořádání do (netriviální) obdélníkové formace. Jako by

¹⁵ Mimochodem délka křivky pro číslo n je úměrná $\log n$.

právě to, co se vymyká něčemu tak banálnímu, jako je pravidelné uspořádání, bylo zvlášť radostně vítáno.

Proč však neuvažovat i o jiné možnosti? Třeba to, co v dvojčatech budilo emočně silné, snad i estetické



- [11] G. Lakoff, R.E. Núñez: *Where Mathematics Comes From: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books, NY 2000.
- [12] E. Callaway: Animals that count: How numeracy evolved. *New Scientist*, 23 June 2009.
- [13] P. Koucká: Umějí zvířata počítat? *Psychologie dnes* 4/2007.
- [14] G. Ifrah: *Histoire universelle des chiffres* (vol. I et II). Robert Laffont, Paris, 1994.
- [15] S. Beller, A. Bender: The limits of counting: numerical cognition between evolution and culture. *Science* 319 (2008) 213–215.
- [16] J. Lehrer, Inside the savant mind: Tips for thinking from an extraordinary thinker. *Scientific American*, January 8, 2009 (www.scientificamerican.com/article.cfm?id=savants-cognition-thinking).
- [17] O. Sacks: Dvojčata. In: *Muž, který si pletl manželku s kloboukem* (překl. A. Čechová), Dybbuk, Praha 2008: 202–219 (orig. *The Man Who Mistook His Wife for a Hat*. Pan Books, London, 1985: 185–203).
- [18] M. Yamaguchi: On the savant syndrome and prime numbers. *Dynamical Psychology* (electronic journal), 2009 (viz www.goertzel.org/dynapsyc/yamaguchi.htm).
- [19] M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena: PRIMES in P, *Ann. of Math.* (2) 160:2 (2004) 781–793.
- [20] V. S. Ramachandran, E. M. Hubbard.: The phenomenology of synaesthesia. *Journal of Consciousness Studies*, 10 (8) (2003.) 49–57.
- [21] N. Wiener: Věda a společnost. In: *Kybernetika a společnost*. Nakladaelsví ČSAV, Praha 1963, 179–187.
- [22] P. Vopěnka: *Pojednání o jevech povstávajících na množstvích*. Plzeň a Nymburk 2008.
- [23] J. L. Borges: *Fikce. Alef*. Argo, Praha 2009.
- [24] A. W. Snyder, D. J. Mitchell: Is Integer Arithmetic Fundamental to Mental Processing? The mind's secret arithmetic. Viz www.centreforthemind.com/publications/integerarithmetic.cfm (2009).
- [25] J. Vojáček: Prvočíslo. Viz <http://maths.cz/clanky/prvocislo.html>.