Matematizace pojmů: spojitost a souvislost*

Petr Kůrka
Centrum pro teoretická studia UK a AVČR,
Jilská 1, CZ-11000 Praha 1

6. prosince 2010

1 Spojitost a souvislost

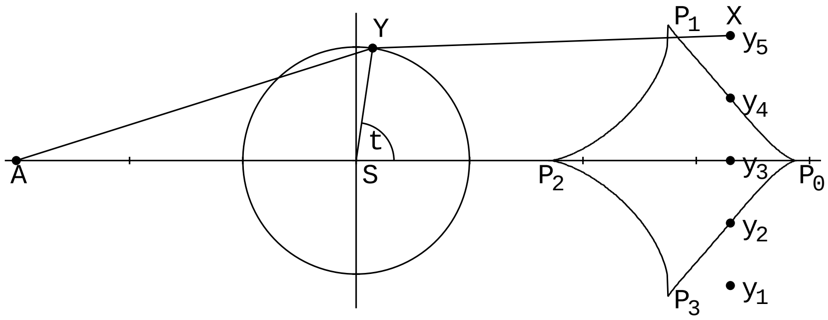
Pojmy spojitosti a souvislosti používáme v každodenním životě při popisu situací a dějů přirozeného světa. Děj je spojitý, pokud během krátkých časových intervalů dochází jen k malým změnám, nenastávají náhlé zvraty. Souvislá je taková oblast, která se neskládá z oddělených částí. V matematice byl jev spojitosti tematizován a explicitně definován v díle Bernarda Bolzana. Fukční závislost je spojitá, jestliže malé změny nezávisle proměnné způsobují malé změny závislé proměnné. Souvislost je jedna z podstatných vlastností kontinua reálných čísel a znamená, že mezi reálnými čísly nejsou žádné mezery. V průběhu 19. století byl pojem spojitosti postupně zobecňován a přitom se stále ostřeji zjevovala jeho podstata. Současně byla identifikována souvislost jako jedna z podstatných vlastností kontinua a objasnil se vztah těchto dvou pojmů. Tento vývoj vyvrcholil začátkem 20. století v obecné topologii. Souvislost se zde chápe jako vlastnost topologických prostorů a spojitost jako vlastnost zobrazení mezi topologickými prostory. Vztah mezi nimi je vyjádřen formálně velmi jednoduchou větou, že spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý prostor. Tato jednoduchost by však nebyla myslitelná bez předcházejícího dlouhého historického vývoje.

2 Teorie katastrof

Pojem spojitosti používáme ve smyslu spojité časové změny nebo spojité funkční závislosti. Zatěžuje-li se pružina stále větším a větším závažím, prodlužuje se, takže její délka je rostoucí spojitou funkcí zatížení. To ale platí jen v jistém rozsahu. Při velkém zatížení pružina praskne, dochází k nespojitosti. Situace, kdy malá změna nezávislých proměnných způsobí velkou změnu závislých proměnných, se nazývá nespojitost nebo katastrofa. Teorii katastrof rozpracoval René Thom [9] v kontextu teorie potenciálových dynamických systémů a jejich bifurkací. Pro každý stav takového systému je dána jeho potenciální energie a systém směřuje ke stavu, kde má potenciální energie lokální minimum. Předpokládejme nyní, že funkce potenciálu závisí na parametrech, které se pomalu mění - pomaleji než vlastní dynamika dosahování lokálního minima. Pak se systém neustále nachází v blízkosti lokálního minima a při malých změnách parametrů dochází k malým změnám tohoto potenciálního minima. Někdy však toto lokální minimum může zaniknout a systém se rychle přesouvá do jiného lokálního minima.

Principy teorie katastrof jsou dobře vidět na katastrofickém stroji E.C.Zeemana (viz Poston a Stewart [6]). Katastrofický stroj (obrázek 1) sestává z kruhové desky poloměru r, jejíž střed S je upevněn čepem na desce stolu. Deska se může kolem svého středu volně otáčet. V bodě Y na obvodu kruhové desky jsou upevněny dvě pružiny, jejichž druhé dva konce jsou upevněny v bodech A a X na desce stolu. Zatímco bod A je pevný, bod X je proměnný, můžeme s ním volně pohybovat v rovině stolu. Zvolme souřadnou soustavu ve které je střed $S = (0, 0)$ kruhové desky v počátku a bod $A = (-a, 0)$ je na ose x. Pozice otočné desky, tedy úhel t který svírají přímky AS a SY, závisí na pozici řídícího bodu se souřadnicemi $X = (x, y)$. Při malých změnách pozice (x, y) dochází většinou jen k malým změnám úhlu t, někdy však malá změna X vyvolá velkou změnu

*Text je určen pro zamýšlenou kolektivní monografii o matematizaci ve vědě. Vznikl v rámci řešení výzkumného záměru CTS MŠM 0021620845



Obrázek 1: Katastrofický stroj s parametry $r = 1$, $a = 3$, $l = 1.5$.

úhlu t, říkáme že došlo ke katastrofě. Toto chování katastrofického stroje lze vysvětlit jednoduchými fyzikálními principy. K prodloužení ideální pružiny je podle Hookeova zákona potřebná síla úměrná tomuto prodloužení. Je-li délka nazatížené pružiny l, pak k jejímu prodloužení na délku $x > l$ je potřebná síla $F = k(x - l)$, kde k je konstanta úměrnosti. Integrací $W = \int F dx$ získáme práci, neboli energii potřebnou na prodloužení pružiny z délky l na délku x:

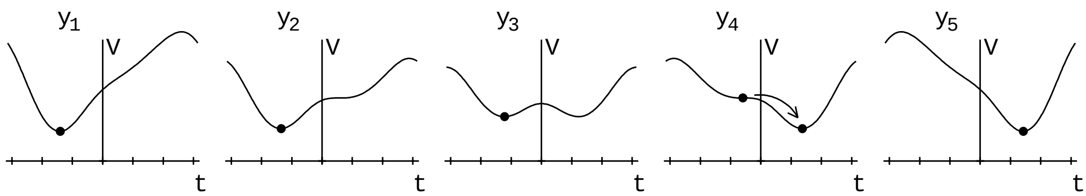
$$W_l(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}(x-l)^2 & \text{pro} \quad x \geq l \\ 0 & \text{pro} \quad x < l \end{cases}$$

Tento vzorec zahrnuje i případ kdy pružina není napnuta a vzdálenost x jejích konců je menší než l. Předpokládejme že obě pružiny katastrofického stroje mají délku l. Pak celková potenciální energie stroje při dané pozici bodů $A = (-a, 0)$, $X = (x, y)$ a $Y = (r \cos t, r \sin t)$ je

$$V(x, y, t) = W_l(||X - Y||) + W_l(||A - Y||)$$

kde

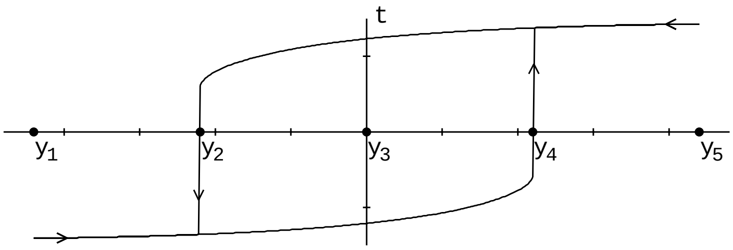
$$\begin{aligned} ||A - Y|| &= \sqrt{(a + r\cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} \\ ||X - Y|| &= \sqrt{(x - r\cos t)^2 + (y - r\sin t)^2} \end{aligned}$$



Obrázek 2: Potenciální energie katastrofického stroje.

Obrázek 2 znázorňuje průběh potenciální funkce při pěti hodnotách parametrů y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, vyznačených v parametrickém prostoru na obrázku 1 (parametr x přitom zůstává stejný). Otočení t je v rozsahu $t \in (-\pi, \pi)$. Při dané pozici řídícího bodu $X = (x, y)$ zaujme otočná deska takovou pozici t, ve které potenciální energie $V(x, y, t)$ má lokální minimum. V závislosti na parametrech x, y může mít funkce $V(x, y, t)$ jedno nebo dvě lokální minima. Uvažujme pohyb v parametrické rovině od bodu y_1 k bodu y_5, při kterém se hodnota x nemění a hodnota y roste od záporných hodnot ke kladným. V bodě y_1 má potenciálová funkce jediné lokální minimum v záporné oblasti. V bodě y_2 se objevuje druhé lokální minimum v kladné oblasti, ale systém zůstává v lokálním minimu v záporné oblasti a to i v bodě y_3, kde je funkce symetrická a obě lokální minima mají stejnou hodnotu. Teprve v bodě y_4 kdy záporné lokální minimum mizí, se stav systému nespojitě mění a přechází do kladné oblasti ve které zůstává i v bodě y_5.

Dolní křivka obrázku 3 zobrazuje změny otočení t v závislosti na parametru y při průchodu systému od bodu y_1 k bodu y_5. V bodě y_4 je tato funkce nespojitá, dochází ke katastrofě. Při



Obrázek 3: Hysterezní křivka

zpětném pohybu v parametrickém prostoru od bodu y_5 k bodu y_1 naopak systém zůstává v kladném lokálním minimu až do bodu y_2, kdy toto lokální minimum zanikne a systém se skokově přesune do lokálního minima v záporné oblasti. Tento vývoj je znázorněn horní křivkou na obrázku 3. Závislá proměnná t závisí nejen na y ale také na historii změn y. Tomuto jevu se říká hystereze a je znám také u magnetizace.

Dynamické vlastnosti katastrofického stroje jsou určeny bifurkační množinou, což je křivostranný čtyřúhelník $P_0P_1P_2P_3$ znázorněný na obrázku 1. Pro parametry x, y uvnitř tohoto čtyřúhelníku má potenciálová funkce dvě lokální minima, vně čtyřúhelníku má pouze jedno lokální minimum. Při přechodu z vnitřku do vnějšku bifurkační množiny jedno lokální minimum zaniká. Byl-li systém právě v tomto zanikajícím lokálním minimu, dochází ke katastrofě. Všimněme si, že z bodu y_1 lze do bodu y_5 dospět i bez katastrofy, jdeme-li po cestě, která obchází bod P_0 zprava.

3 Rovnice

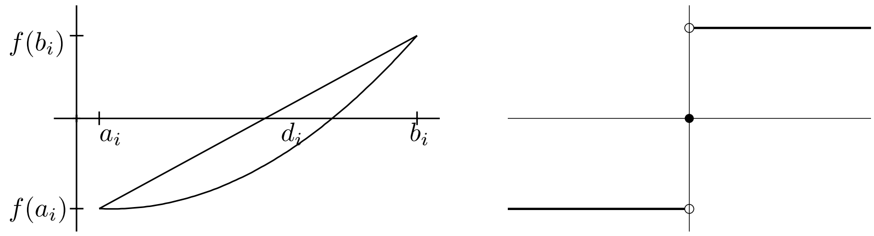
Pojem spojitosti začal krystalizovat koncem 18. století v souvislosti s řešením rovnic. Rovnice představují úlohu nalézt neznámé číslo s danými vlastnostmi. Nejjednodušší řešení mají lineární rovnice tvaru $ax + b = 0$, jednoduché řešení mají i kvadratické rovnice tvaru $ax^2 + bx + c = 0$. Renesanční matematika začíná objevem vzorce na řešení rovnice třetího stupně a později byl nalezen i vzorec pro řešení rovnice čtvrtého stupně. Problém nalézt vzorec pro řešení rovnic pátého a vyššího stupně byl dlouho otevřený až začátkem 19. století Evariste Galois ukázal, že je neřešitelný. Neexistuje žádný vzorec sestavený z algebraických operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování pro řešení obecné rovnice alespoň pátého stupně.

Neexistence vzorce pro řešení rovnice ale neznamená neexistenci řešení této rovnice. Jednoduchý argument ukazuje, že každá rovnice pátého stupně alespoň jedno řešení má. Funkce x^5 je totiž záporná v záporné oblasti a kladná v kladné oblasti, přitom roste rychleji než jakýkoliv mnohočlen čtvrtého stupně. Funkce pátého stupně $f(x) = x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ je tedy záporná pro dostatatečně malá záporná čísla a kladná pro dostatečně velká kladná čísla: existují čísla $a_0 < 0 < b_0$, pro která platí $f(a_0) < 0 < f(b_0)$. Mění-li se proměnná x od a_0 k b_0, prochází funkční hodnota $f(x)$ všechna čísla mezi $f(a_0)$ a $f(b_0)$, tedy i číslo 0. To znamená, že existuje reálné číslo x mezi a_0 a b_0, pro které platí $f(x) = 0$. Tato úvaha dokonce i dává návod, jak řešení x vypočítat, neboli jak se k němu libovolně přiblížit. Položme $d_0 = (a_0 + b_0)/2$ a podívejme se na znaménko $f(d_0)$. Je-li $f(d_0) = 0$, nalezli jsme řešení rovnice $x = d_0$. Je-li $f(d_0) < 0$, položme $a_1 = d_0$, $b_1 = b_0$ v opačném případě položme $a_1 = a_0$, $b_1 = d_0$. V obou případech platí $f(a_1) < 0 < f(b_1)$ a postup můžeme opakovat s a_1 a b_1. Konvergenci můžeme zrychlit jestliže funkci $f(x)$ nahradíme mezi body a_i, b_i její lineární aproximací a vypočítáme kořen této aproximace (obrázek 4 vlevo). Je-li $f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$, položme

$$d_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}, \qquad \begin{array}{lll} a_{i+1} = a_i & b_{i+1} = d_i & \text{pokud} \quad \mathbf{sgn} f(d_i) = \mathbf{sgn} f(b_i) \\ a_{i+1} = d_i & b_{i+1} = b_i & \text{pokud} \quad \mathbf{sgn} f(d_i) = \mathbf{sgn} f(a_i) \end{array}$$

Opět platí $a_{i+1} \cdot b_{i+1} < 0$ a dostáváme posloupnosti $a_0 \le a_1 \le a_2 < \cdots < b_2 \le b_1 \le b_0$. Obě posloupnosti a_i i b_i konvergují ke stejnému číslu x, které je řešením rovnice. To je **iterativní interpolační algoritmus** pro řešení rovnic.

Tato úvaha neplatí pouze pro rovnice pátého stupně, ale pro každou rovnici lichého stupně. Platí dokonce i pro rovnice které algebraické nejsou a o nějakém vzorci pro jejich řešení nemůže



Obrázek 4: Interpolační algoritmus (vlevo) a funkce signum (vpravo)

být ani řeči. Pro funkci $f(x) = x - \cos x$ platí $-1 = f(0) < 0 < f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ a tedy existuje x mezi nulou a $\pi/2$, pro které $f(x) = 0$. Lze tedy tímto iterativním způsobem najít řešení každé rovnice? A zde právě vstupuje do hry spojitost. Aby takovýto postup fungoval, musí být funkce f v intervalu $[a_0, a_1]$ spojitá. Typický příklad nespojité funkce je funkce znaménka $\mathbf{sgn}(x)$ (obrázek 4 vpravo) definovaná předpisem

$$\mathbf{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad x < 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0 \\ 1 & \text{pro} \quad x > 0 \end{cases}$$

Rovnice $f(x) = \mathbf{sgn}(x) - \frac{1}{2} = 0$ nemá řešení ačkoliv $f(-1) = -\frac{3}{2} < 0 < \frac{1}{2} = f(1)$.

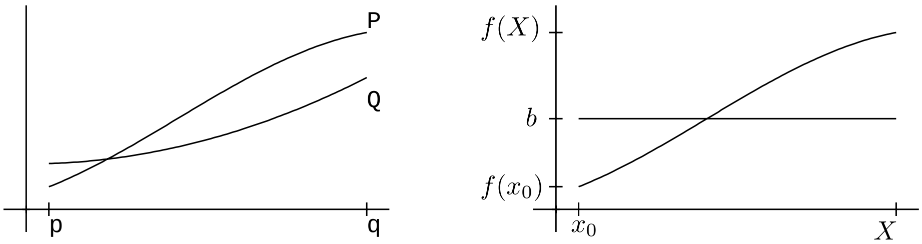
4 Lagrangeovo numerické řešení rovnic

Na přelomu 18. a 19. století se ovšem nespojité funkce jako je $\mathbf{sgn}(x)$ v matematice neuvažovaly. Typickými funkcemi kterými se analýza zabývala byly mnohočleny, elementární funkce jako exponenciála, případně funkce analytické které lze napsat jako součet mocninné řady. Pojem spojitosti nebyl explicitně formulován ale používal se intuitivně. K představě funkce patřilo, že její graf lze nakreslit jedním tahem, aniž bychom zvedli tužku z papíru. Graf funkce se chápal jako záznam pohybu hmotného tělesa a v takovém pohybu nemohou být žádné skoky. J.L.Lagrange (1808) [5] argumentuje na základě této představy v díle které se věnuje řešení algebraických rovnic.

> Teorém: Je-li dána jakákoliv rovnice a jsou-li známa dvě čísla taková, že když jsou dosazena na místo neznámé této rovnice dávají výsledky opačných znamének, pak rovnice bude mít nutně alespoň jeden reálný kořen, jehož hodnota bude mezi těmito dvěma hodnotami (Lagrange [5] str. 1).

Důkaz věty je založen na rozkladu dané rovnice na lineární členy. Tento důkaz však platí jen v případě, že všechny kořeny dané rovnice jsou reálné, není tedy úplně obecný. Navíc je to ještě důkaz kruhem protože možnost rozkladu mnohočlenu na lineární členy je založen na existenci řešení rovnice. V dodatku 1 uvádí Lagrange ještě jeden důkaz, který je založen na dynamické představě pohybujících se vozidel (obrázek 5 vlevo).

> Vyjádřeme danou rovnici jako $P - Q = 0$, kde P je součet všech kladných členů a Q je součet všech záporných členů. Předpokládejme nejdříve, že čísla p a q jsou kladná a že q je větší než p. Předpokládejme dále že pro $x = p$ platí $P - Q < 0$ a pro $x = q$ platí $P - Q > 0$. Je jasné že v prvním případě je $P < Q$ a v druhém případě bude $P > Q$. Nuže vzhledem k tvaru P a Q které obsahují pouze kladné členy s mocninami kladných členů je evidentní, že tyto kvantity nutně rostou tak jak roste x. Jestliže necháme x v nerozeznatelných stupních (dans tous les degrés insensibles) postupně zvětšovat od p ke q, budou se také v nerozeznatelných stupních zvětšovat P a Q takovým způsobem, že P se zvětší více než Q, protože z menšího se stane větším. Tedy nutně bude existovat výraz (term) mezi dvěma hodnotami p a q kde P bude rovno Q. Tak jako dvě vozidla (mobiles) která jedou stejnou cestou ve stejném směru, vyjela ze dvou různých míst a přijedou ve stejný čas do jiných dvou míst tak že to které bylo nejprve vzadu se nakonec bude nacházet vpředu, se nutně během cesty musela potkat. Lagrange [5] str. 101-102



Obrázek 5: Lagrangeova (vlevo) a Cauchyho (vpravo) věta o mezihodnotě

5 Bolzanův ryze analytický důkaz

Problematickou hodnotu takových důkazů založených pouze na geometrické intuici si uvědomoval Bernard Bolzano. Problematice se věnuje ve své práci [1] z roku 1817 (český překlad [7]) o analytickém důkazu věty o mezihodnotě. Sousloví "ryze analytický" je míněno jako protiklad k intuitivně geometrickému. Bolzano především analyticky definuje pojem spojitosti. Po kritice dosavadních pojetí spojitosti a důkazů věty o mezihodnotě (mezi jinými diskutuje i nedostatečnost Lagrangeova důkazu) zavádí Bolzano spojitost definicí:

> Dle pravého výkladu se totiž výrokem, že funkce fx pro všechny hodnoty x, ležící vně nebo krom jistých mezí, mění se dle zákona spojitosti, rozumí jen tolik, že když x značí nějakou hodnotu takovou, rozdíl $f(x+\omega)-fx$ možná učiniti menším nežli každou danou hodnotu, možná-li jen dosaditi za ω hodnotu tak malou, jak vůbec libo, (Bolzano [7], str. 11).

Neméně důležitá část Bolzanovy práce se zabývá vlastnostmi reálných čísel. Interpolační algoritmus sestrojuje dvě posloupnosti $a_0 \le a_1 \le a_2 < \cdots < b_2 \le b_1 \le b_0$ a řešení rovnice je jejich společná limita. Avšak existence této limity není samozřejmá: ve struktuře racionálních čísel taková limita nemusí existovat. Podstatnou vlastností struktury reálných čísel je to, že každá aproximující posloupnost k nějakému číslu konverguje. Problém ovšem je, jak charakterizovat ty posloupnosti, které nějakou hodnotu aproximují. Tato charakterizace je vyjádřena podmínkou, která se dnes nazývá Bolzano-Cauchyova (BC). V §7 Bolzano tuto podmínku formuluje a dokazuje, že každá BC posloupnost má limitu.

> Poučka. Jestli v řadě hodnot $F^1x, F^2x, F^3x, \dots, F^nx, \dots, F^{n+r}x, \dots$ rozdíl mezi n-tým členem F^nx a každým pozdějším $F^{n+r}x$ sebe vzdálenějším od něho menší nežli každá veličina daná, jest vždy určitá stálá veličina, jíž se členové této řady vždy více blíží a jíž se mohou tak přiblížiti, jak jen libo, prodlouží-li se řada dosti daleko. (Bolzano [7], §7).

Dokazuje také ekvivalentní tvrzení, že každá shora omezená množina reálných čísel má supremum

> Poučka. Nepřísluší-li nějaká vlastnost M všem hodnotám proměnné veličiny x, nýbrž jen těm, kteréž jsou menší nežli jakési u: existuje vždy veličina U, která jest největší z těch, o nichž možná tvrditi, že všechny menší x mají vlastnost M. (Bolzano [7], §12).

Argumentace v důkazech obou těchto vět se ovšem točí v kruhu. Bolzano dosud nemá pojem reálného čísla a jeho důkazy jsou založeny na konstrukci jiných aproximujících posloupností. V důkazu věty §12 konstruuje nekonečný binární rozvoj hledaného suprema, nikde však předtím nezaručuje, že každý nekonečný binární rozvoj určuje nějaké reálné číslo. Tuto mezeru v argumentaci Bolzano doplňuje v pozdějším rukopise Reine Zahlenlehre (viz Bolzano(1969-) [10] IIA8, anglický překlad Russ(2004) [8]), kde již reálná čísla (kvantity) konstruuje (definuje) jako nekonečné měřitelné číselné výrazy.

6 Cauchyho Cours d'analyse

Bolzanova práce nevešla v širší známost a pojem spojitosti se rozšířil teprve ze slavné a vlivné učebnice Cours d'analyse A.L.Cauchyho [2] z roku 1825. Grattan-Guinness [4],[3] přesvědčivě argumentuje, že Cauchy před napsáním Cours d´analyse Bolzanovu práci četl a podstatným způsobem z ní čerpal, i když jí necitoval. Speciálně Cauchy od Bolzana přebírá definici spojitosti.

> Funkce $f(x)$ je v určitém rozmezí spojitou funkcí proměnné x, pokud pro každou hodnotu x v tomto rozmezí numerická hodnota rozdílu $f(x+\alpha)-f(x)$ neomezeně klesá s neomezeně klesajícím α. Jinými slovy, funkce $f(x)$ zůstane v tomto rozmezí spojitá vzhledem k x, jestliže v tomto rozmezí nekonečně malé zvětšení proměnné x způsobí vždy jen nekonečně malé zvětšení této funkce. Cauchy [2] str. 34-35

V důkaze věty o mezihodnotě však Cauchy tuto definice spojitosti vůbec nepoužívá (obrázek 5 vpravo) a zakládá ho pouze na geometrické intuici, jak bylo v jeho době obvyklé:

> Teorém. Pokud funkce $f(x)$ je spojitá vzhledem k proměnné x mezi hodnotami $x = x_0, x = X$ a pokud označíme jako b mezilehlou hodnotu mezi $f(x_0)$ a $f(X)$, pak lze vždy vyhovět rovnici $f(x) = b$ jednou nebo více reálnými hodnotami v rozmezí od x_0 k X.
>
> Důkaz: Pro ustanovení předcházející propozice stačí vidět, že křivka s rovnicí $y = f(x)$ protne jednou nebo vícekrát přímku s rovnicí $y = b$ v intervalu obsaženém mezi dvěma ordinátami které odpovídají abscisám x_0 a X. To se evidentně stane za daných předpokladů. Skutečně, vzhledem k tomu že funkce $f(x)$ je spojitá v mezích $x = x_0$, $x = X$, křivka s rovnicí $y = f(x)$ která prochází 1° bodem se souřadnicemi $x_0, f(x_0)$, 2° bodem se souřadnicemi $X, f(X)$ bude mezi těmito dvěma body spojitá. A protože konstantní ordináta b přímky s rovnicí $y = b$ se nachází mezi ordinátami $f(x_0)$, $f(X)$ dvou uvažovaných bodů, přímka projde nutně mezi těmito dvěma body což nemůže udělat aniž by protla v tomto intervalu zmíněnou křivku. (Cauchy [2] str 43-44).

V dodatku III sice Cauchy uvádí ještě zmíněný iterativní algoritmus na výpočet kořene rovnice, nepociťuje však potřebu dokazovat, že tento algoritmus určuje nějaké reálné číslo.

7 Aritmetizace analýzy

Bolzanovy analytické principy byly později rozpracovány v aritmetizačním projektu Dedekinda, Cantora a Weierstrasse. Především bylo třeba definovat reálná čísla a Dedekind je definuje jako řezy. Řez je rozklad množiny racionálních čísel na dvě disjunktní podmnožiny takové, že každý prvek první množiny je menší než každý prvek druhé množiny. Je to tedy dvojice neprázdných podmnožin $A, B \subset \mathbb{Q}$ takových že platí
1. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,
2. $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$,
3. $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$
Říkáme že řez (A, B) je prvního druhu jestliže množina A má největší prvek, druhého druhu jestliže množina B má nejmenší prvek a třetího druhu jestliže ani A nemá největší prvek ani B nemá nejmenší prvek. Čtvrtý případ, že by A měla největší prvek a B měla nejmenší prvek nastat nemůže. Každé racionální číslo c určuje dva řezy:
1. $A = \{x \in \mathbb{Q} :\ x \leq c\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} :\ x > c\}$ řez prvního druhu,
2. $A = \{x \in \mathbb{Q} :\ x < c\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} :\ x \geq c\}$ řez druhého druhu.
Iracionální čísla jsou reprezentovány řezy třetího druhu. Například $\sqrt{2}$ je reprezentováno řezem $A = \{x \in \mathbb{Q} :\ x^2 < 2 \text{ nebo } x < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} :\ x^2 > 2 \text{ a } x > 0\}$.
Množinu $\mathbb{R}$ lze definovat jako sjednocení množiny racionálních čísel s množinou řezů třetího druhu. Na $\mathbb{R}$ pak lze definovat algebraické operace i relace nerovnosti s obvyklými vlastnostmi.

Na množině reálných čísel lze ale také definovat řezy obdobným způsobem jako na číslech racionálních. Řez na reálných číslech je rozklad množiny reálných čísel na dvě neprázdné disjunktní podmnožiny takové, že každý prvek první množiny je menší než každý prvek druhé množiny. Tyto řezy jsou buďto prvního druhu nebo druhého druhu. Řezy třetího druhu na struktuře reálných čísel neexistují. Právě tato vlastnost vyjadřuje, že struktura reálných čísel je souvislá, nelze ji rozdělit na dvě oddělené části. Kdykoliv jí rozdělíme na řez (A, B), v jedné z nich se nalézá prvek (maximum množiny A nebo minimum množiny B) ke kterému se libovolně přibližují prvky druhé množiny. Lze ukázat, že tato vlastnost platí nejen pro řezy ale pro libovolný rozklad:

Věta 1 *Struktura reálných čísel je souvislá. To znamená, že jsou-li $A, B \subset \mathbb{R}$ neprázdné množiny pro které platí $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$, pak buď existuje posloupnost $b_i \in B$ která konverguje k nějakému $a \in A$, nebo existuje posloupnost $a_i \in A$, která konverguje k nějakému $b \in B$.*

Weierstrassova definice spojitosti je stejná jako Bolzanova.

Definice 2 *Reálná funkce f je spojitá v bodě x, pokud pro každé $\varepsilon > 0$, existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé y, které splňuje $|y - x| < \delta$ platí $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Říkáme že reálná funkce je spojitá, je-li spojitá v každém bodě.*

Větu o mezihodnotě lze pak dokázat v následujícím tvaru:

Věta 3 *Pokud pro reálnou spojitou funkci f platí $f(a) \cdot f(b) < 0$, kde $a < b$, pak existuje $x \in (a, b)$ pro které $f(x) = 0$.*

.

Při studiu reálných funkcí se často setkáváme s funkcemi které nejsou definovány pro všechna reálná čísla ale jen na menším definičním oboru, nejčastěji intervalu. Například rovnice polokružnice $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ je definována na uzavřeném intervalu $[-1, 1]$. Rozeznáváme intervaly uzavřené $[a, b]$ které obsahují své krajní body a otevřené intervaly (a, b) které je neobsahují. Dále existují ještě intervaly polouzavřené (či polootevřené) $[a, b)$ a $(a, b]$. Kromě těchto konečných intervalů máme ještě nekonečné intervaly $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$ a plný interval $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Větu o mezihodnotě lze ekvivalentně ale ale elegantněji vyjádřit ve tvaru, že spojitý obraz intervalu je interval.

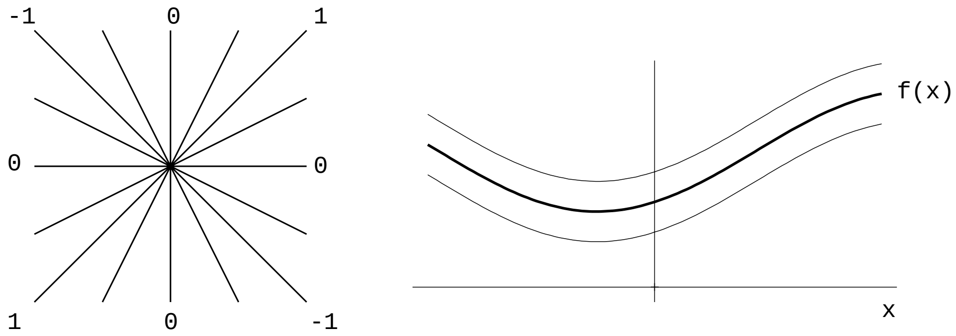
Věta 4 *Je-li $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá reálná funkce definovaná na intervalu, pak její obor hodnot $f[a, b] = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ je také interval.*

Tvrzení že $f[a, b]$ je interval totiž znamená, že do $f[a, b]$ patří každé číslo c mezi $f(a)$ a $f(b)$, tedy že pro každé takové číslo existuje $x \in [a, b]$ pro které $f(x) = c$.

8 Funkce více proměnných

Zobecnění rovnice o jedné neznámé jsou soustavy rovnic o více neznámých. Typicky pro určení n neznámých potřebujeme n rovnic, pokud jsou tyto rovnice nezávislé. Máme-li dvě rovnice o dvou neznámých $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ snažíme se nejprve z první rovnice vypočítat kořen y při daném x, tj. hledáme funkci $y = h(x)$ která splňuje $f(x, h(x)) = 0$. Potom řešíme rovnici $g(x, h(x)) = 0$ a z nalezeného řešení x vypočítáme $y = h(x)$. Řešení soustav rovnic je tedy založeno na řešení rovnic o jedné neznámé, takže zde bude opět hrát roli spojitost obou funkcí $f(x, y)$ a $g(x, y)$. Co však znamená spojitost funkce dvou proměných? Protože rovnici $f(x, y) = 0$ řešíme při pevném x, stačí nám podmínka, že $f(x, y)$ je spojitou funkcí proměnné y při každém pevném x. Protože pořadí proměnných můžeme obrátit, je rozumné též požadovat aby $f(x, y)$ byla spojitou funkcí proměnné x při každém pevném y. Podobně budeme předpokládat že také $g(x, y)$ je spojitou funkcí y při pevném x a spojitou funkcí x při pevném y. Je za těchto předpokladů funkce $g(x, h(x))$ spojitá v proměnné x? Ukazuje se, že to obecně neplatí.

Pro pochopení situace pomůže geometrický názor. Graf funkce dvou proměnných $f(x, y)$ je plocha, která sestává ze všech bodů v třírozměrném prostoru se souřadnicemi $(x, y, f(x, y))$. V analogii s jednorozměrným případem se nabízí kritérium spojitosti v tom že plocha grafu nemá trhliny. Jak to vyjádřit matematicky? Stačí k tomu spojitost v každé proměné zvlášť? Pro řešení těchto otázek se matematici obrací k příkladům a protipříkladům. Hledají se netypické příklady které splňují dané předpoklady, přitom ale nebyly vzaty v úvahu při vytváření názoru. Takovým protipříkladem může být funkce daná vzorcem $f(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2)$. V nulovém bodě $(x, y) = (0, 0)$ dostáváme neurčitý výraz, takže definujme $f(0, 0) = 0$. Snadno nahlédneme že pro každé pevné x je $f(x, y)$ spojitou funkcí y a pro každé pevné y je $f(x, y)$ spojitou funkcí x. Speciálně $f(x, 0) = 0$ a $f(0, y)$ jsou konstatntní funkce. Ale právě v nulovém bodě graf funkce trhlinu má. Vyjádříme-li proměnné x, y v polárních souřadnicích $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, dostaneme $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 2\cos\varphi \cdot \sin\varphi = \sin 2\varphi$, což nezávisí na r. V libovolné blízkosti nulového bodu tedy funkce f nabývá všech hodnot mezi -1 a 1. Vrstevnice (křivky, na kterých má funkce danou



Obrázek 6: Nespojitost v nule (vlevo) a metrika na $\mathcal{C}[a,b]$ (vpravo)

hodnotu) naší funkce jsou všechny přímky které procházejí nulovým bodem (obrázek 6 vlevo), takže funkce není v nule spojitá.

Klíčová slova v těchto úvahách jsou blízkost a vzdálenost. Funkce $f(x_1, x_2)$ dvou proměnných bude spojitá v bodě $x = (x_1, x_2)$ jestliže v blízkých bodech $y = (y_1, y_2)$ budou také blízké hodnoty $f(x_1, x_2)$ a $f(y_1, y_2)$. Vzdálenost bodů v dvourozměrném prostoru počítáme podle Pythágorovy věty $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Uvážíme-li že vzdálenost v jednorozměrném prostoru je absolutní hodnota rozdílu $d_1(x, y) = |x - y|$, dostáváme definici spojitosti která je založena jen na pojmu vzdálenosti: Funkce f dvou proměnných je spojitá v bodě $x = (x_1, x_2)$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové že pro všechna $y = (y_1, y_2)$ která splňují $d_2(x, y) < \delta$ platí $d_1(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Čistě formálním způsobem tuto definici zobecníme na funkce n proměnných ale také na zobrazení z n-rozměrného prostoru do m-rozměrného prostoru. Eukleidovská vzdálenost dvou bodů $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ n-rozměrného prostoru je

$$d_n(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je spojité v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n (d_n(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; d_m(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

Když se ukázalo, že pojem spojitosti je založen pouze na pojmu vzálenosti, otevřela se cesta k zobecnění a k abstrakci. Při studiu spojitosti můžeme úplně pominout algebraickou strukturu a soustředit se pouze na strukturu metrickou. Toto pojetí se uskutečnilo v rámci teorie metrických prostorů.

9 Funkcionální analýza a metrické prostory

Koncem 19. století dochází v chápání spojitosti k další kvalitativní změně. Je to spojeno opět s řešením rovnic teď se ale jedná o rovnice diferenciální a integrální. Nehledá se již neznámé číslo, ale hledá se funkce, která splňuje určité podmínky. Problematika řešení diferenciálních rovnic vznikla současně s diferenciálním počtem. Newtonův pohybový zákon $F = ma$ dává diferenciální rovnici. Známe-li sílu $F(x)$ která působí na mechanický systém v pozici x, dostáváme diferenciální rovnici druhého stupně $m \cdot x''(t) = F(x(t))$ pro neznámou funkci pozice $x(t)$ v čase t. Zde $x''(t) = a$ znamená druhou derivaci pozice podle času, tedy zrychlení.

Během 18. století bylo formulováno mnoho diferenciálních rovnic v různých oblastech fyziky a geometrie a byly vypracovány důmyslné metody jejich řešení. Nejjednodušší příklad diferenciální rovnice je lineární diferenciální rovnice pro růst populace při neomezených zdrojích. Označíme-li $x(t)$ velikost populace v čase t a r koeficient reproduktivity, je přírůstek populace $x(t + \Delta t) - x(t)$ za krátké časové období Δt roven $r \cdot x(t)$. Při limitním přechodu Δt k nule dostáváme diferenciální rovnici $x'(t) = r \cdot x(t)$. Jejím řešením je exponenciální funkce $x(t) = x(0) \cdot e^{rt}$, kde $x(0)$ je velikost populace v čase 0. Každou diferenciální rovnici ovšem takto jednoduše řešit nelze. Opakuje se situace kterou jsme viděli u algebraických rovnic. Pro mnoho diferenciálních rovnic žádné vzorečky nemáme a vyvstávají tak otázky, zda nějaké řešení vůbec existuje, zda je takových řešení více, jaké jsou jejich kvalitativní vlastnosti (například rostoucí či klesající) a jakým způsobem je lze numericky vypočíst.

A podobně jako u algebraických rovnic, odpovědi na tyto otázky závisí na tom, v jaké třídě funkcí řešení hledáme, je tedy třeba nejprve uvažovat množinu všech možných řešení. Funkcionální analýza vzniká, když se na množinu všech možných řešení podíváme metaforicky jako na jakýsi zobecněný prostor. Obecná diferenciální rovnice prvního řádu pro neznámou reálnou funkci $x(t)$ má tvar $f(x'(t), x(t), t) = 0$, kde $f(y, x, t)$ je daná funkce tří proměnných a $x'(t)$ je derivace funkce $x(t)$ podle času t. Na pravou stranu diferenciální rovnice se můžeme dívat jako na operátor, což je zobrazení které funkci $x(t)$ přiřazuje funkci $z(t) = f(x'(t), x(t), t)$. Definičním oborem tohoto operátoru jsou všechny diferencovatelné reálné funkce a řešení rovnice je taková funkce, které tento operátor přiřazuje nulovou funkci. Množina všech diferencovatelných reálných funkcí se označuje $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ a je na ní bohatá struktura. Například součet, rozdíl a součin diferencovatelných funkcí je opět diferencovatelná funkce takže na množině $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ máme strukturu algebraickou. Často se uvažují funkcionální prostory na omezených intervalech, například množina $\mathcal{C}[a, b]$ všech spojitých reálných funkcí $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definovaných na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Na této množině lze zavést vzdálenost předpisem

$$d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : \ x \in [a, b]\}$$

Vzdálenost dvou spojitých funkcí f, g definovaných na uzavřeném intervalu $[a, b]$ je tedy maximum odchylek jejich funkčních hodnot. Blízké jsou takové funkce, jejichž grafy jsou blízké. Funkce jejichž vzdálenost od dané funkce f není větší než dané ε se musí pohybovat v pásu vyznačeném na obrázku 6 vpravo. Pro takto definovanou vzdálenost platí mnohé vlastnosti které jsou analogické vlastnostem eukleidovské metriky na n-rozměrném prostoru. Tyto vlastnosti lze studovat v obecnosti jen z vlastností vzálenosti (metriky). To je podstatou kroku, který koncem 19. století učinil Fréchet zavedením pojmu metrického prostoru.

Definice 5 *Metrický prostor je množina X, spolu s funkcí vzdálenosti $d : X \times X \to [0, \infty)$, která splňuje následující předpoklady:*
1. $d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Každý eukleidovský prostor $\mathbb{R}^n$ s metrikou d_n je metrickým prostorem a stejně tak prostor $\mathcal{C}[a, b]$ spojitých funkcí s metrikou d. Abstraktní pojem metriky však připouští velkou rozmanitost dalších příkladů. Na množině všech n-tic reálných čísel můžeme kromě eukleidovské metriky definovat pravoúhlou metriku $d(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$, kterou můžeme interpretovat jako vzdálenost ve městě s pravoúhlou sítí ulic. Z jednoho či více metrických prostorů lze různými konstrukcemi získávat další metrické prostory. Například každá podmnožina Y daného metrického prostoru X je metrický prostor, definujeme-li metriku na Y stejným způsobem jako na X. Speciálně tedy každý interval je metrický prostor. V tomto abstraktním pojetí obecných metrických prostorů se spojitost objevuje jako vlastnost zobrazení z jednoho metrického prostoru do druhého.

Definice 6 *Zobrazení $f : X \to Y$ z metrického prostoru X s metrikou d_X do metrického prostoru Y s metrikou d_Y je spojité v bodě $x \in X$, pokud pro každé kladné ε existuje kladné δ takové že pro každé $x' \in X$ které splňuje $d_X(x, x') < \delta$, platí $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Říkáme, že zobrazení f je spojité, je-li spojité v každém bodě $x \in X$.*

10 Topologické vlastnosti

Teorie metrických prostorů studuje mnoho vlastností metrických prostorů a nachází mezi nimi nejrůznější vztahy. Mezi nimi jsou nejdůležitější vlastnosti topologické tj. takové, které se zachovávají při spojitých transformacích. Nejdůležitější topologické pojmy jsou otevřenost a uzavřenost podmnožin metrického prostoru. Podmnožina metrického prostoru je otevřená, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem, to znamená náleží do dané množiny s celým svým nějakým okolím. Co jsou to však okolí bodu? Ta lze definovat pomocí pojmu koule, který zobecňuje koule třídimenzionálního eukleidovského prostoru a kruhy dvourozměrného eukleidovského prostoru.

Definice 7 *V daném metrickém prostoru X s metrikou d nazýváme koulí se středem x a poloměrem $r > 0$ množinu $B_r(x) = \{z \in X : \ d(z, x) < r\}$ všech prvků, které jsou od x vzáleny méně než r. Podmnožina U metrického prostoru X je otevřená, pokud pro každé $x \in U$ existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \subseteq U$.*

Spojitost lze vyjádřit ekvivalentně pouze s použitím pojmu otevřených množin.

Věta 8 *Zobrazení $f : X \to Y$ mezi metrickými prostory je spojité právě když vzor každé otevřené podmnožiny prostoru Y je otevřená podmnožina X.*

Důkaz: Je-li $V \subseteq Y$ podmnožina Y její vzor $f^{-1}(V)$ sestává ze všech bodů X, které se do ní zobrazují tj. $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$. Dokažme nejprve, že pro každé spojité zobrazení platí že vzor otevřené množiny je otevřená množina. Máme tedy dokázat, že pokud $V \subseteq Y$ je otevřená pak $f^{-1}(V)$ je také otevřená tedy každý bod $x \in f^{-1}(V)$ je její vnitřní bod. Protože $f(x) \in V$, existuje kladné ε takové že $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$. Podle definice spojitosti existuje δ takové že pro každé $x' \in X$ které splňuje $d_X(x, x') < \delta$ platí $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ a tedy $f(x') \in B_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$. Z toho plyne $x' \in f^{-1}(V)$, takže jsme ukázali že $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(V)$ a $f^{-1}(V)$ je tedy otevřená množina. Naopak je třeba ukázat, že pokud platí podmínka věty, pak zobrazení f je spojité. K tomu je nejprve třeba ukázat že každá koule $B_\varepsilon(f(x))$ je otevřená množina, což plyne z trojúhelníkové nerovnosti. Podle předpokladu také její vzor $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ je otevřená množina. Protože do této množiny náleží také x, existuje $\delta > 0$ takové že $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Ale tato inkluze jen reformuluje podmínku spojitosti, říká totiž, že pokud $d(x', x) < \delta$ pak $f(x') \in B_\varepsilon(f(x))$, tj. $d(f(x'), f(x)) < \varepsilon$.

Nejdůležitější vlastnosti otevřených množin postihuje následující věta.

Věta 9 *Průnik dvou otevřených množin je otevřená množina. Sjednocení libovolného souboru otevřených množin je otevřená množina.*

Důkaz: Předpokládejme že $U, V \subseteq X$ jsou otevřené množiny. Je-li $x \in U \cap V$ prvkem jejich průniku, náleží x do obou z nich takže existují kladná δ a η taková že $B_\delta(x) \subseteq U$ a $B_\eta(x) \subseteq V$. Je-li $\varepsilon = \min\{\delta, \eta\}$ menší z nich je $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ i $B_\varepsilon(x) \subseteq V$ takže $B_\delta(x) \subseteq U \cap V$ a $U \cap V$ je tedy otevřená množina. Ve větě o sjednocení se mluví o libovolném souboru podmnožin tedy konečném nebo nekonečném. Máme tedy dány otevřené množiny $U_i \subseteq X$ kde indexy $i \in I$ jsou z nějaké (konečné nebo nekonečné) indexove množiny I. Bod $x \in X$ patří do jejich sjednocení U, pokud patří aspoň do jednoho U_i. Ale v tomto případě existuje kladné ε takové že $B_\varepsilon(x) \subseteq U_i$ a protože $U_i \subseteq U$ je také $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Tím je ukázáno, že U je otevřená množina.

Duální pojem k otevřené množině je uzavřená množina. Podmnožina $V \subseteq X$ je uzavřená, jestliže její doplněk $X \setminus V$ sestávající ze všech bodů které nenáleží do V, je otevřená množina. Z duality plyne, že sjednocení dvou uzavřených množin je uzavřená množina a průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina. Uzavřenost není opak otevřenosti. Některé množiny jako polouzavřené intervaly nejsou ani otevřené ani uzavřené. Naopak existují množiny které jsou jak uzavřené tak otevřené. Takovým množinám říkáme obojetné. V každém prostoru máme aspoň dvě obojetné množiny, totiž práznou množinu $\emptyset$ a celý prostor X. Prostor, jehož jediné obojetné množiny jsou $\emptyset$ a X se nazývá souvislý. Příkladem souvislého prostoru je reálná přímka $\mathbb{R}$. To plyne z věty 1. Kdyby totiž byla $A \subset \mathbb{R}$ neprázdná obojetná množina, byl by její doplněk $B = \mathbb{R} \setminus A$ sestávající z těch prvků které nepatří do A, také neprázdnou obojetnou množinou. Podle věty 1 však v jedné z těchto množin existuje posloupnost prvků které konvergují k nějakému prvku druhé množiny, například prvky $a_i \in A$ které konvergují k nějakému $b \in B$. To ale není možné protože B je otevřená množina a tedy nějaké okolí prvku b obsahuje jen prvky B a žádný prvek posloupnosti a_i. Podobně lze ukázat, že také každý reálný interval je souvislá množina (tj. jakožto metrický prostor je to souvislý prostor). Naopak sjednocení dvou disjunktních intervalů $X = (0, 1) \cup (2, 3)$ souvislý prostor není. Má totiž obojetné množiny $(0, 1)$ a $(2, 3)$. Platí dokonce

Věta 10 *Podmnožina $V \subseteq \mathbb{R}$ je jakožto podprostor souvislá právě když je to interval.*

Speciálně množina racionálních čísel není souvislá protože existují řezy racionálních čísel třetího druhu. Věta o mezihodnotě tak má následující topologické zobecnění

Věta 11 *Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý prostor: Je-li $f : X \to Y$ spojité zobrazení které je surjektivní (to znamená že $f(X) = Y$) a je-li X souvislý prostor, je také Y souvislý prostor.*

Důkaz této zobecněné věty o mezihodnotě je velmi jednoduchý: Předpokládejme sporem, že Y není souvislý, to znamená že existuje obojetná neprázdná vlastní podmnožina $\emptyset \neq V \subset X$. Potom množina $f^{-1}(V)$ je neprázdná vlastní obojetná podmnožina X, což je spor.

11 Topologie

Studium topologických vlastností metrických prostorů vede k dalšímu stupni abstrakce, ve které výchozí struktura topologického prostoru pouze specifikuje které podmnožiny prostoru jsou otevřené. Tuto další hladinu abstrakce uskutečnil Felix Hausdorff začátkem 20. století.

Definice 12 *Topologický prostor je abstraktní množina X spolu se systémem τ podmnožin X, který obsahuje prázdnou a plnou množinu a je uzavřený na konečné průniky a libovolná sjednocení. To znamená že platí*
1. $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.
2. Je-li $U_0 \in \tau$ a $U_1 \in \tau$ pak také $U_0 \cap U_1 \in \tau$.
3 Je-li $U_i \in \tau$ pro každé $i \in I$, pak také sjednocení $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Definice 13 *Topologický prostor je souvislý, jestliže jediné jeho obojetné (otevřené a uzavřené) množiny jsou $\emptyset$ a X.*

Definice 14 *Zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory je spojité, jestliže pro každou otevřenou množinu $U \in \tau_Y$ prostoru Y platí že její vzor $f^{-1}(U) \in \tau_X$ je otevřená množina v X.*

Věta 15 *Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý prostor.*

Důkaz této topologické věty je stejný jako v případě metrických prostorů. V teorii topologických prostorů dosáhly pojmy spojitosti a souvislosti svého nejobecnějšího vyjádření, oproštěného od všech nepodstatných a nahodilých okolností kterými jsou doprovázeny na nižších stupních abstrakce. Zatímco ještě teorie metrických prostorů je plně závislá na teorii reálných čísel (protože vzdálenosti jsou reálná čísla), teorie topologických prostorů je už od této závislosti zcela osvobozena a vyjadřuje ideje spojitosti a souvislosti v jejich čistých podobách.

Reference

[1] B. Bolzano. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatz, dass zwischen jeder zwey Werthen, die ein entgegensetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege.* Gottliebe Hase, Prag, 1817.

[2] A. L. Cauchy. *Cours d'Analyse de l'École Royal Polytechnique.* Debure, Paris, 1821.

[3] I. Grattan-Guinness. *The development of the foundation of mathematical analysis from Euler to Riemann.* MIT Press, Cambridge, 1970.

[4] I. Grattan-Guinness. Četl Cauchy Bolzana před napsáním Cours d'analyse? *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 15(3-4):133–137, 1970.

[5] J. L. Lagrange. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés.* Courcier, Paris, 1808.

[6] T. Poston and I. Stewart. *Catastrophe theory and its aplications.* Pitman, Boston, 1978.

[7] B. Bolzano (překlad F.J.Studnička). Ryze analytický důkaz poučky, že mezi dvěma hodnotami, jež poskytují opačně označené výsledky, leží nejméně jeden realný kořen rovnice. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, XI:1–38, 1881.

[8] S. Russ. *The Mathematical Works of Bernard Bolzano.* Oxford University Press, Oxford, 2004.

[9] R. Thom. *Modèles mathématiques de la morphogenèse.* Union générale d'editions, Paris, 1974.

[10] E. Winter, J. Berg, F. Kambartel, J. Loužil, E. Morscher, and B. van Rootselaar, editors. *Bernard Bolzano Gesamtausgabe.* Frommann-Holzboog, Stuttgart, 1969-.