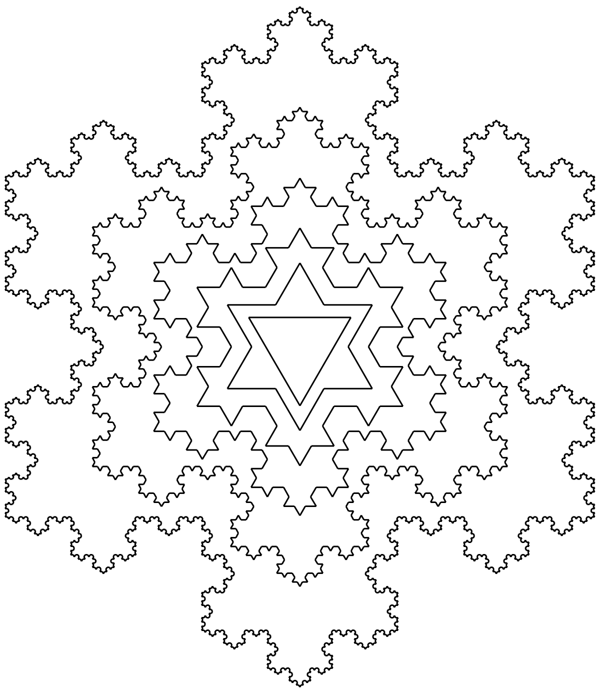
Fraktály

Petr Kůrka, Michal Kupsa

Obsah

1 Úvod

Fraktály jsou složitě členité geometrické útvary, jejichž význačnou vlastností je neceločíselná dimenze. Pojem dimenze známe především z teorie vektorových prostorů. Zde se dimenzí rozumí počet prvků báze prostoru. Dimenze konečně-dimenzionální prostory plně charakterizuje. Každé dva prostory se stejnou konečnou dimenzí jsou izomorfní. Zobecnění pojmu dimenze na metrické či topologické prostory není jednoznačné. Typické jednodimenzionální útvary jako úsečka či kružnice se od typických dvoudimenzionálních útvarů jako kruh či čtverec liší v mnoha vlastnostech. Topologie zná několik definic dimenze, například malou induktivní dimenzi, velkou induktivní dimenzi či pokrývací dimenzi, které jsou sice obecně různé, ale v nejčastěji uvažovaných prostorech splývají. V teorii metrických prostorů k tomu ještě přibývá Hausdorffova dimenze, kapacita a vyplňovací (packing) dimenze. Zatímco topologické dimenze jsou celočíselné, tyto metrické dimenze mohou nabývat libovolných i neceločíselných hodnot a dobře charakterizují členitost či složitost geometrických útvarů. Fraktální útvary se většinou sestrojují postupnými aproximacemi jako limity jednodušších útvarů.



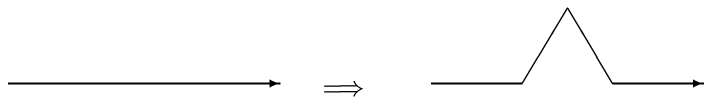
Obrázek 1: Sněhová vločka

1.1 Kochova, Cantorova a Sierpińského množina

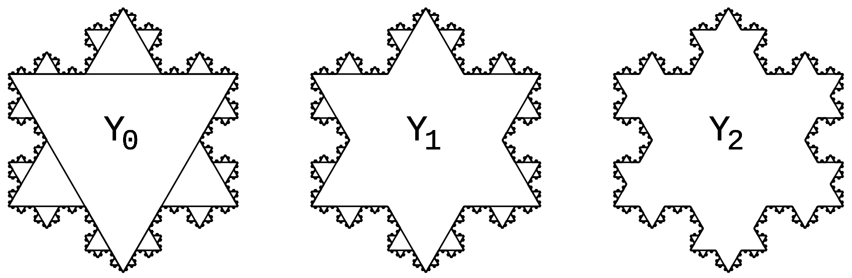
Sněhová vločka (Kochova množina) na Obrázku 1 je rovinný útvar, který sestrojujeme postupně v nekonečné řadě kroků. Začneme s obvodem rovnostranného trojúhelníka se stranou délky 1, který si označíme X_0. V dalším kroku použijeme substituci τ na Obrázku 2.

Každou úsečku délky 1 nahradíme lomenou čárou sestavenou z úseček délky 1/3 a dostaneme uzavřenou lomenou čáru X_1. To zapisujeme $X_1 = \tau(X_0)$. V dalším kroku opět každou úsečku délky 1/3 nahradíme lomenou čárou sestavenou z úseček délky 1/9 a dostaneme rovinný útvar $X_2 = \tau(X_1)$. Na Obrázku 1 jsou tyto úvary kresleny stále s větším zvětšením aby se nepřekrývaly. Kochova množina není žádná z těchto postupných aproximací $X_0, X_1, \ldots$

τ :



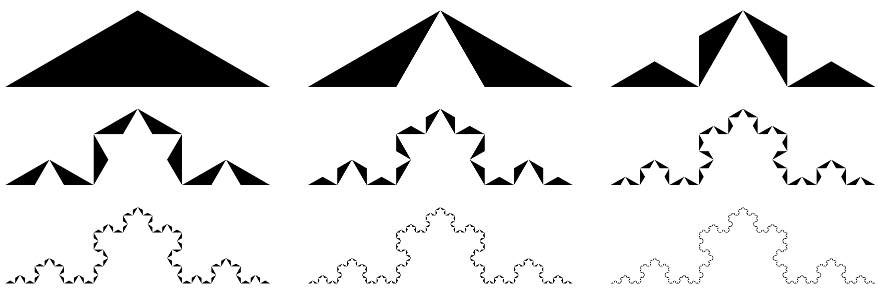
Obrázek 2: Kochova substituce



Obrázek 3: Aproximace Kochovy množiny

ale jejich limita

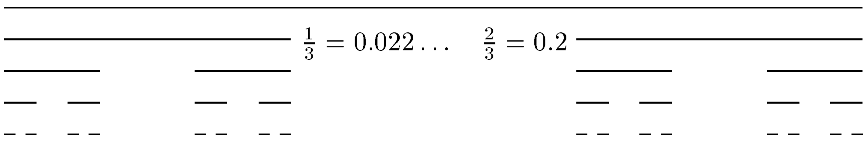
$$X = \lim_{n\to\infty} X_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \underbrace{\overline{\bigcup_{m=n}^{\infty} X_m}}_{Y_n}, \quad \text{kde } X_0 = \triangle, \quad X_{n+1} = \tau(X_n).$$



Obrázek 4: Kochova množina

Množina Y_n je uzávěr sjednocení množin $X_n, X_{n+1}, \dots$ (Obrázek 3). Platí $Y_{n+1} \subset Y_n$ a Kochova množina je průnik všech těchto množin Y_n. Kochovu množinu můžeme sestrojit ještě jiným způsobem. Na Obrázku 4 je konstrukce jedné její části (horní třetiny). Vyjdeme z rovnoramenného trojúhelníka X_0 se základnou délky 1 a výškou délky $\sqrt{3}/6$ a odstraníme z něj prostřední rovnostranný trojúhelník o straně délky $1/3$. Dostaneme útvar X_1, sestávající ze dvou dotýkajících se trojúhelníků, které vzniknou zmenšením původního trojúhelníka v poměru $\sqrt{3}$. Tato operace představuje opět jistou substituci τ, která určuje posloupnost množin $X_{n+1} = \tau(X_n)$. Nyní je ale $X_{n+1} \subset X_n$ a Kochova množina $X = \bigcap_{n\geq 0} X_n$ je jejich průnikem.

Jako průnik klesající posloupnosti uzavřených množin se sestrojuje klasická Cantorova množina. Vyjdeme z jednotkového intervalu $X_0 = [0,1]$, odebereme prostřední otevřenou třetinu a dostaneme $X_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Nyní opět z každého intervalu odebereme jeho prostřední (otevřenou) třetinu a dostaneme $X_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, 1] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ a tak pokračujeme dále. Cantorova množina na Obrázku 5 je průnik všech těchto množin. Zapisujeme-li reálná

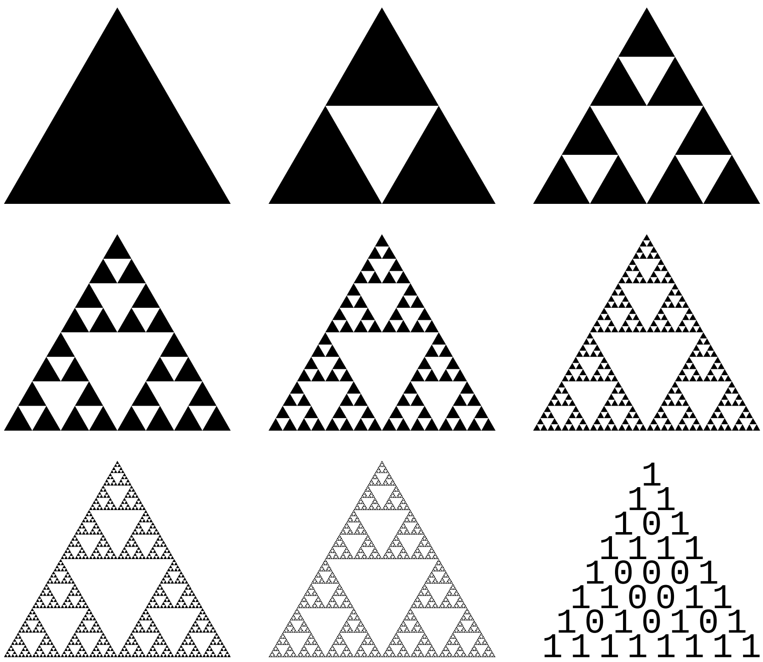


Obrázek 5: Cantorova množina

čísla intervalu $[0, 1]$ v ternárním tvaru (v pozičním systému se základem 3) jako

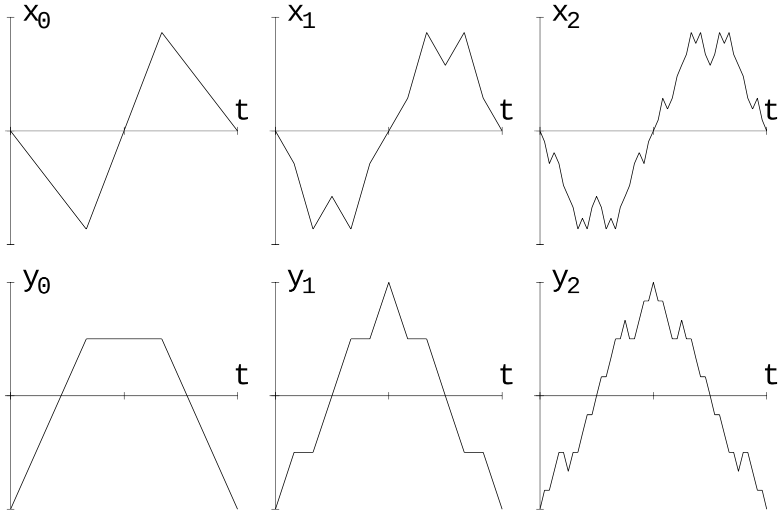
$$x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{9} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 3^{-i}, \text{ kde } x_i \in \{0, 1, 2\},$$

jsou čísla z prostřední třetiny právě ta, která na první pozici musejí mít 1. Cantorova množina je množina těch čísel, která lze v ternárním tvaru vyjádřit pouze s nulami a dvojkami. VarCísla tvaru $k/3^n$, která jsou koncovými body intervalů množin X_n, mají v ternární soustavě právě dvě vyjádření, z nichž jedno neobsahuje jednotky. Například $\frac{1}{3} = 0.1 = 0.0222\ldots$ a $\frac{2}{3} = 0.2 = 0.1222\ldots$ Každý bod Cantorovy množiny lze tedy takto vyjádřit jediným způsobem.



Obrázek 6: Sierpińského množina

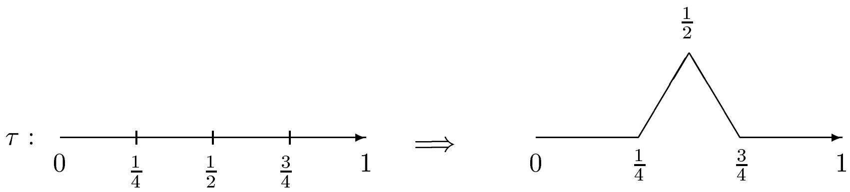
Odebíráme-li z rovnostranných trojúhelníků prostřední rovnostranné trojúhelníky poloviční strany, vznikne Sierpińského množina na Obrázku 6. Rozmístění plných a prázdných trojúhelníků je vždy dáno Pascalovým trojúhelníkem modulo 2 na Obrázku 6 vpravo dole. Každé číslo je součtem dvou čísel nad ním, sčítá se však modulo 2, tj. $1 + 1 = 0$.



Obrázek 7: Kochova křivka

1.2 Kochova a Hilbertova křivka

Sněhovou vločku na Obrázku 1 můžeme popsat nejen jako podmnožinu eukleidovské roviny ale také jako rovinnou křivku, tj. spojité zobrazení $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^2$ jednotkového intervalu $\mathbf{I} = [0,1]$ do roviny, jejíž obraz je Kochova množina. Každá aproximace $X_n = f_n(\mathbf{I})$ je obraz rovinné křivky $f_n : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^2$. Nultá funkce $f_0(t) = (x_0(t), y_0(t))$ vytváří rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy jsou $(0, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$ a $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$. Komponenty x_0, y_0 křivky f_0 jsou lineární na intervalech $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ a $(\frac{2}{3}, 1)$ (Obrázek 7 vlevo). Při přechodu od f_0 k f_1 se každá lineární část funkce f_0 nahrazuje lomenou čárou substituce τ (Obrázek 8). Přitom pro každé $t \in \mathbf{I}$ platí



Obrázek 8: Parametrická substituce

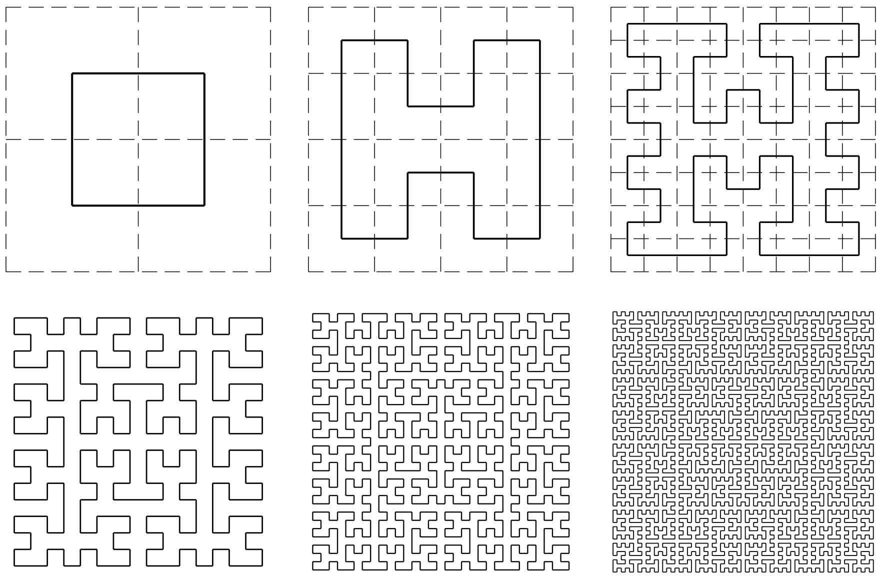
$$d(f_1(t), f_0(t)) \leq d(f_1(\tfrac{1}{2}), f_0(\tfrac{1}{2})) = \tfrac{\sqrt{3}}{6},$$

kde $d(x,y)$ je eukleidovská vzdálenost bodů x a y. Při dalších iteracích se tento rozdíl vždy třikrát zmenšuje, takže

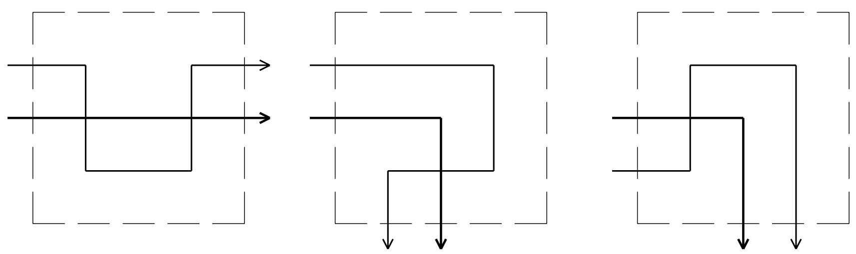
$$d(f_n(t), f_{n+1}(t)) \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad d(f_n(t), f_{n+m}(t)) \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

To znamená, že každá posloupnost $f_n(t)$ je cauchyovská, a má tedy limitu $f(t)$. Funkce f_n konvergují k f stejnoměrně, protože také $d(f_n(t), f(t)) \leq \sqrt{3} \cdot 3^{-n}/4$. Protože stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá, je také $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^2$ spojitá funkce. Srovnáním s konstrukcí na Obrázku 3 navíc ukážeme, že funkce f je prostá, tj. Kochova křivka sama sebe neprotíná. Celá Kochova množina je totiž podmnožinou trojúhelníku s vrcholy $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ a $(0, \frac{\sqrt{3}}{6})$ na Obrázku 4 nahoře vlevo. Podobně je celá množina částí dvou menších trojúhelníků na

Obrázku 4 nahoře uprostřed, a tedy se žádný bod její první poloviny neprotíná žádný bod její druhé poloviny. Přechodem k dalším iteracím plyne, že Kochova křivka sama sebe neprotíná, tj. funkce f je prostá.



Obrázek 9: Hilbertova křivka

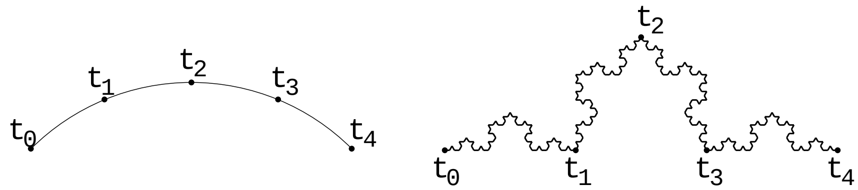


Obrázek 10: Substituce Hilbertovy křivky

Podobnou fraktální konstrukce je Hilbertova křivka na Obrázku 9. Sestrojuje se opět jako stejnoměrná limita po částech lineárních funkcí. Funkce f_1 je uzavřená křivka která spojuje středy čtyř čtverců o straně $1/2$, ze kterých se skládá čtverec $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$. V dalším kroku sestrojíme křivku která spojuje středy všech 16 čtverců o straně $1/4$. Při její konstrukci používáme substituci na Obrázku 10. Křivka f_n spojuje středy čtverců se stranami délky 2^{-n}. Do každého tohoto čtverce vchází středem jedné jeho hrany a opouští ho středem jiné hrany. Křivka f_{n+1} vstupuje i vystupuje stejnou hranou jako f_n, spojuje však 4 středy menších čtverců o hranách 2^{-n-1}. Limitní funkce $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ je spojitá a vyplňuje celý čtverec $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$, není však (na rozdíl od Kochovy křivky) prostá.

1.3 Délka křivky a kapacita

Jednou z typických vlastností fraktálních křivek je jejich nekonečná délka. Délka křivky dané v parametrickém tvaru funkcí $f(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbf{I}$ se určuje z aproximací této křivky lomenou čárou (Obrázek 11). Pro dané $\varepsilon > 0$ sestrojíme posloupnost t_i předpisem



Obrázek 11: Délka křivky

$$t_0 = 0, \quad t_{i+1} = \inf\{t > t_i : \ d(f(t), f(t_i)) = \varepsilon\}$$

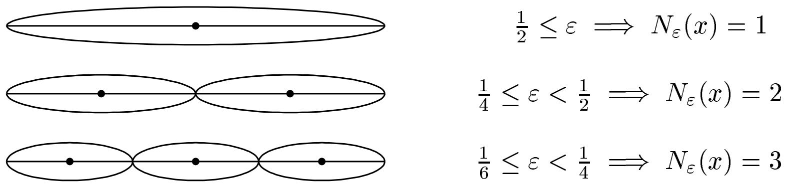
Je-li n první číslo, pro které t_n není definováno, položíme $t_n = 1$ a ε-aproximace délky křivky je $L_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n-1} d(f(t_{i+1}), f(t_i))$. Pokud je křivka f diferencovatelná (Obrázek 11 vlevo), existuje limita, kterou lze spočítat integrálem

$$L \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon = \int_0^1 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\; dt.$$

Pro Kochovu křivku dostáváme $L_1 = 1$, $L_{1/3} = 4/3$ a obecně $L_{3^{-n}} = (4/3)^n$, takže $L = \lim_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon = \infty$ (Obrázek 11 vpravo).

Délka křivky vyjadřuje její velikost, chápeme-li ji jako jednorozměrný útvar. To že Kochova křivka má nekonečnou délku znamená, že její dimenze je větší než než 1. Poměrně jednoduchým i když trochu hrubým prostředkem pro měření dimenze geometrických útvarů je kapacita. Je-li $X \subset \mathbf{R}^n$ omezená podmnožina eukleidovského prostoru, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ konečná množina $K_\varepsilon \subset X$, taková, že každý bod množiny X je od nějakého bod množiny K_ε vzdálen nejvýše ε. Takovou množinu K_ε nazýváme ε-síť množiny X. Kapacita množiny je charakteristika, která vyjadřuje jak rychle velikost ε-sítě roste při klesajícím ε. Pro lineární útvary je počet prvků K_ε úměrný $1/\varepsilon$, u útvarů dimenze d je to $\#K_\varepsilon \approx \varepsilon^{-d}$. Exponent d lze pak získat logaritmováním $d = \ln \#K_\varepsilon / \ln(1/\varepsilon)$. Obecně je-li $X \subset \mathbf{R}^n$ podmnožina metrického prostoru, definujeme její kapacitu $C(X)$ ve dvou krocích

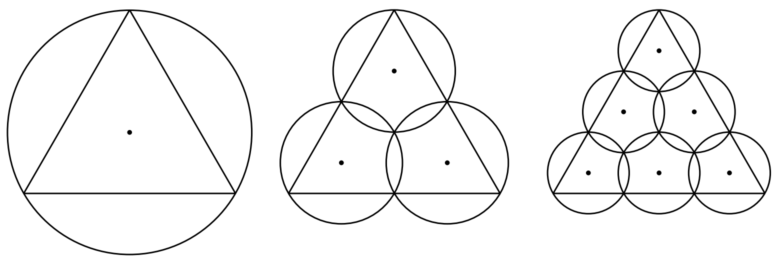
$$\begin{aligned} N_\varepsilon(X) &= \min\{\#K : \forall x \in X, \exists y \in K, d(x,y) \le \varepsilon\} \\ C(X) &= \limsup_{n\to\infty} \ln N_\varepsilon(X)/\ln(1/\varepsilon). \end{aligned}$$



Obrázek 12: Kapacita intervalu

Pro jednotkový interval $\mathbf{I} = [0,1]$ a $\frac{1}{2n} \le \varepsilon < \frac{1}{2n-2}$ je $N_\varepsilon = n$ (Obrázek 12) takže kapacita je

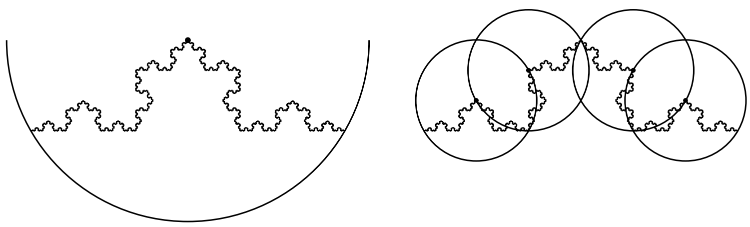
$$C(\mathbf{I}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(2n-2)} = 1$$



Obrázek 13: Kapacita trojúhellníku

Pro rovnostranný trojúhelník se stranou jedna a pro $\varepsilon = 1/\sqrt{3}n$ dostáváme (Obrázek 13)

$$N_{1/\sqrt{3}n}(X) = n(n+1)/2 \implies C(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n(n+1)/2}{\ln \sqrt{3}n} = 2$$

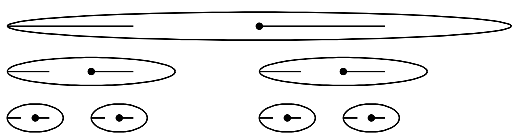


Obrázek 14: Kapacita Kochovy křivky

Pro Kochovu křivku sestrojujeme ε-sítě podle Obrázku 14. Pro $\varepsilon = 1/\sqrt{3}\cdot 3^n$ je $N_\varepsilon(X) = 4^n$, takže

$$C(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \doteq 1.262$$

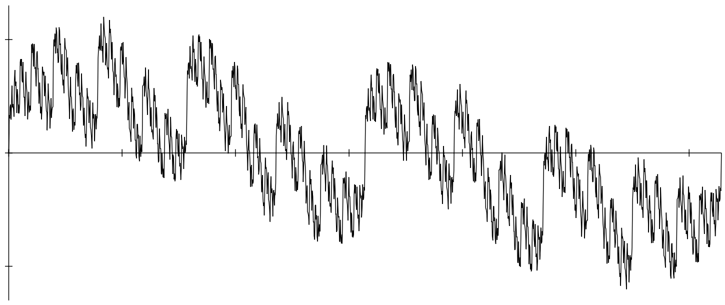
Kapacita Kochovy křivky takto vychází proto, že křivka se skládá ze čtyř částí které jsou její 3-krát zmenšené obrazy. Obdobně Cantorovo diskontinuum se skládá ze dvou částí které jsou jeho třikrát zmenšené obrazy. Pro $\varepsilon = 2\cdot 3^{-n-1}$ je $N_\varepsilon(X) = 2^n$ takže kapacita Cantorovy množiny je $C(X) = \ln 2/\ln 3 \doteq 0.631$. Sierpińského množina se skládá ze tří částí, které jsou její dvakrát zmenšené kopie. Pro $\varepsilon = 1/\sqrt{3}\cdot 2^n$ je $N_\varepsilon(X) = 3^n$, takže $C(X) = \ln 3/\ln 2 \doteq 1.585$.



Obrázek 15: Kapacita Cantorovy množiny

Parametrické složky $x(t)$, $y(t)$ Kochovy křivky nemohou být diferencovatelné. Jinak by totiž bylo možné její délku spočítat integrací, a tato délka by byla konečná. Spojitou funkce, která v žádném bodě nemá derivaci sestrojil již v devatenáctém století Weierstrass jako součet goniometrických funkcí

$$f(t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(c^n t), \;\; a<1, \;\; ac>1.$$



Obrázek 16: Weierstrassova funkce

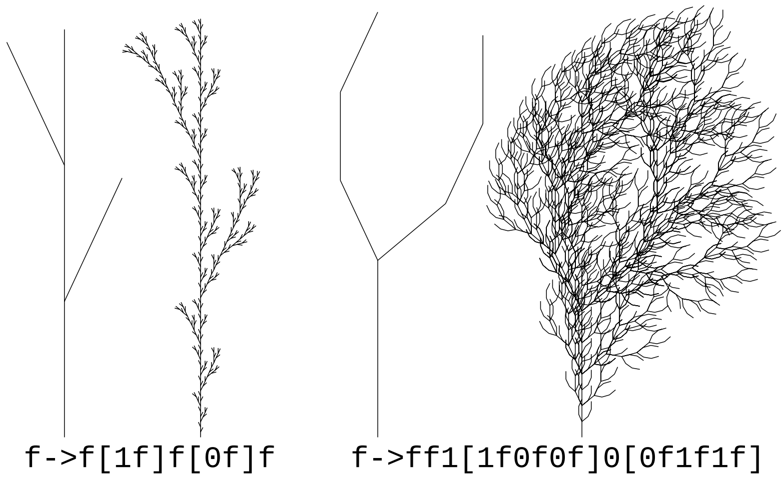
Je-li $a < 1$, je tato řada absolutně stejnoměrně konvergentní a její součet je spojitá funkce. Chceme-li ale derivovat tuto řadu člen po členu, dostáváme řadu $\sum_{n=0}^{\infty}(ac)^n \cos(c^n t)$, která již konvergentní není. Lze ukázat, že pro dosti velké ac funkce f nemá derivaci v žádném bodě.

1.4 Substituce

Při konstrukci Kochovy a Hilbertovy křivky jsme používali v intuitivním smyslu geometrické substituce. V symbolické dynamice se uvažují substituce na konečné abecedě A jako zobrazení $\tau : A \to A^*$, kde A^* je množina konečných slov nad A. Substituce τ se pak rozšiřuje na zobrazení $\tau : A^* \to A^*$ operací konkatenace (spojení) předpisem $\tau(u_0 \dots u_{n-1}) = \tau(u_0) \dots \tau(u_{n-1})$. Například Cantorova substituce je dána předpisem $\tau(0) = 000, \tau(1) = 101$.

$$\tau : \begin{cases} 0 \to 000 \to 000000000 \to 000000000\ 000000000\ 000000000 \\ 1 \to 101 \to 101000101 \to 101000101\ 000000000\ 101000101 \end{cases}$$

Její n-tou iteraci, tj. její složení se sebou samou n-krát, značíme τ^n. Slovo $\tau^n(1)$ je návod či instrukce na nakreslení n-té aproximace Cantorovy množiny. Přitom se interpretuje 1 jako "nakreslení jednotkové úsečky" a 0 jako "přemístění pera o jednotkovou úsečku". Při kreslení další iterace je jen třeba vždy zmenšit jednotkovou úsečku třikrát.



Obrázek 17: Stromy

Pro kreslení lomených křivek uvažujeme abecedu $A = \{f, 0, 1\}$. Algoritmus, který interpretuje slovo v abecedě A, si pamatuje souřadnice bodu (x, y) roviny a úhel φ. Písmeno f

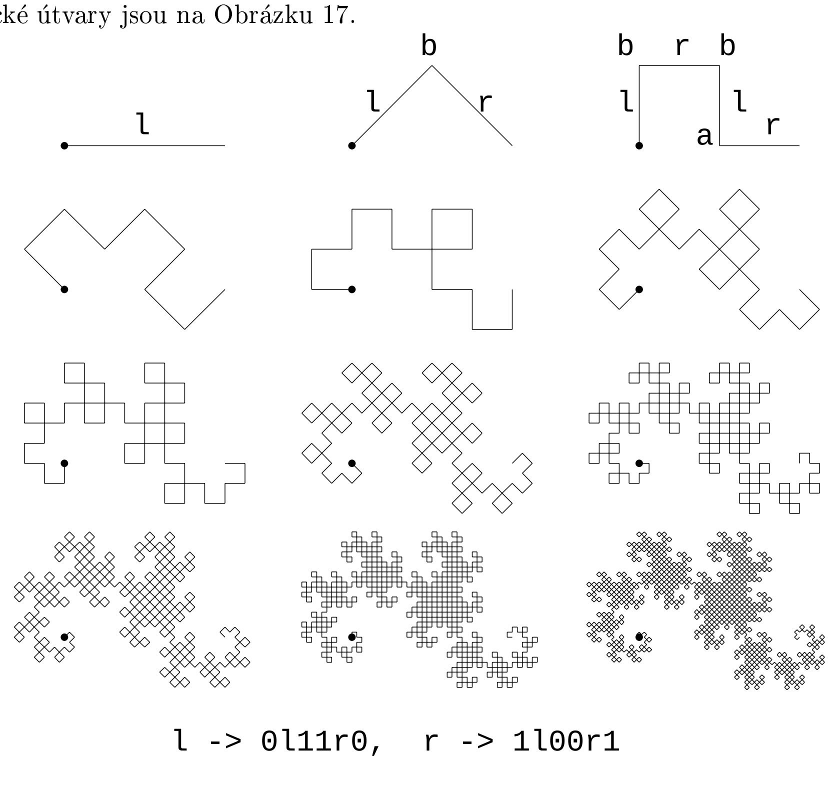
znamená nakreslit úsečku od bodu (x,y) k bodu v dané vzdálenosti r ve směru φ. Písmeno 0 znamená otočení doleva o daný úhel α a písmeno 1 znamená otočení doprava:

$$f : (x,y) := (x + r\cos\varphi, x + r\sin\varphi), \quad 0 : \varphi := \varphi + \alpha, \quad 1 : \varphi := \varphi - \alpha.$$

kde r a α jsou dané parametry. Je-li $\alpha = 60°$, je $f11f11f$ instrukce pro nakreslení rovnostranného trojúhelníka. Substituce $\tau : A \to A^*$ definovaná předpisem $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$, $\tau(f) = f0f11f0f$ vyjadřuje geometrickou substituci Kochovy křivky na Obrázku 2. Pak $\tau^n(f11f11f)$ znamená instrukci pro nakreslení n-té aproximace Kochovy křivky. Při každé další iteraci je ovšem třeba zmenšit délku r třikrát.

$$\tau : f \to f0f11f0f \to f0f11f0f\ 0\ f0f11f0f\ 11\ f0f11f0f\ 0\ f0f11f0f.$$

S použitím datové struktury zásobníku můžeme uvažovat složitější algoritmy, které kreslí stromové struktury. Přidáme další dva symboly [,], které interpretujeme jako uložení pozice a úhlu do zásobníku a přečtení pozice a úhlu ze zásobníku. Substituce opět mění pouze symbol f, na ostatních znacích je identická. Dvě takové substituce a jejich odpovídající geometrické útvary jsou na Obrázku 17.

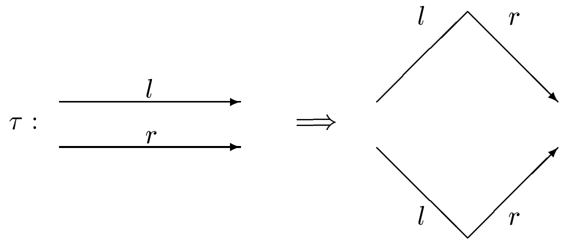


Obrázek 18: Heighwayův drak

Další fraktální útvar, Heighwayův drak, lze generovat postupným překládáním papíru. Přeložíme-li papír napůl, a opět rozložíme, vidíme jeden záhyb tak jako na Obrázku 18 nahoře uprostřed. Pokud papír přeložíme dvakrát a opět rozložíme tak aby záhyby měly pravý úhel, dostáváme tvar se třemi záhyby na Obrázku 18 nahoře vpravo, a tak pokračujeme dále. Každý tento útvar lze popsat posloupností v abecedě $A = \{a, b\}$, kde a znamená otočení vlevo a b otočení vpravo. Dostáváme tak posloupnost slov

$$W_1 = b, \;\; W_2 = bba, \;\; W_3 = bbabbaa, \;\; W_4 = bbabbaa\ b\ bbaabaa, \ldots$$

Tyto posloupnosti splňují rekurentní vztah $W_{n+1} = W_n b(\overline{W_n})^{-1}$, kde $\overline{u}$ znamená opačnou posloupnost definovanou $\overline{u}_i \neq u_i$, a u^{-1} znamená posloupnost v obráceném pořadí definovanou $(u^{-1})_i = u_{n-i}$. Také tyto posloupnosti lze generovat substitucí, pokud použijeme



Obrázek 19: Substituce Heighwayova draku

pomocné symboly. Geometrická substituce, která útvar generuje, je na Obrázku 19. Při generování dalšího útvaru se substituce provádí střídavě doleva a doprava. Uvažujme abecedu $A = \{0, 1, l, r\}$, kde 0 znamená otočení doleva o 45°, 1 znamená otočení doprava o 45° a l i r znamenají totéž co v předcházejích příkladech f, totiž vykreslení jednotkové úsečky. Substituce je dána $\tau(l) = 0l11r0$, $\tau(r) = 1l00r1$, ostatní symboly se nemění. Intepretujeme-li 11 jako b, 00 jako a a 01, 10 jako prázdná slova, získáváme iteracemi posloupnost W_n:

$$\begin{aligned} l \quad &\to \quad 0l\overbrace{11}^{b}r0 \to 00l\overbrace{11}^{b}r\overbrace{0111}^{b}l\overbrace{00}^{a}r10 \\ &\to \quad 000l\overbrace{11}^{b}r\overbrace{0111}^{b}l\overbrace{00}^{a}r10\overbrace{1110}^{b}l\overbrace{11}^{b}r\overbrace{0001}^{a}l\overbrace{00}^{a}r110 \end{aligned}$$

1.5 Číselné systémy

Dekadický či binární číselný systém lze zobecnit tak, že za základ použijeme libovolné reálné nebo i komplexní číslo $c \in \mathbf{C}$, jehož absolutní hodnota $|c|$ je větší než 1. Jako číslice použijeme konečnou množinu $A \subset \mathbf{C}$ obecně komplexních čísel. Budeme uvažovat především čísla, která lze vyjádřit nekonečnými rozvoji se základem c a číslicemi A, tj. množinu čísel ve tvaru

$$x_{-n} \ldots x_{-2}x_{-1}x_0.x_1x_2 \ldots = \sum_{i=-n}^{\infty} x_i c^{-i}, \quad x_i \in A, \quad n \in \mathbf{Z}$$

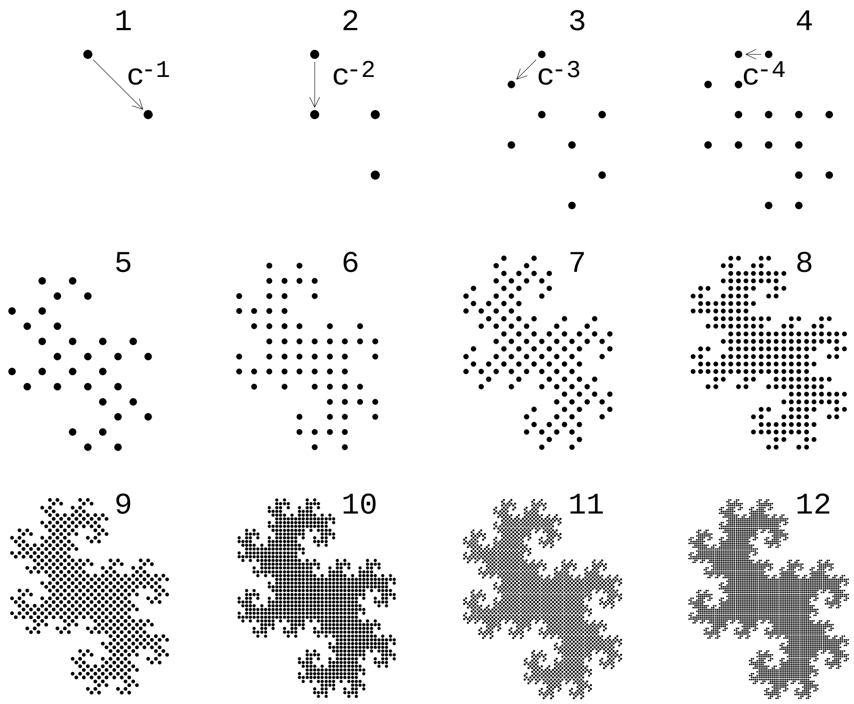
Pro celá čísla $n \leq m$ položme

$$\begin{aligned} X_n^m &= \left\{ \sum_{i=n}^{m} x_i c^{-i} : \; x_i \in A \right\}, \quad X_{-\infty}^m = \left\{ \sum_{i=n}^{m} x_i c^{-i} : \; x_i \in A, n \leq m \right\}, \\ X_n^\infty &= \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} x_i c^{-i} : \; x_i \in A \right\}, \quad X_{-\infty}^\infty = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} x_i c^{-i} : \; x_i \in A, n \in \mathbf{Z} \right\} \end{aligned}$$

U každého takového pozičního systému se ptáme, zda lze každé reálné či komplexní číslo vyjádřit v tomto tvaru, tj. zda $X_{-\infty}^\infty = \mathbf{R}$ či $X_{-\infty}^\infty = \mathbf{C}$, zda je takové vyjádření jediné možné a jaký je tvar množin X_1^∞. Pro $c = 2$ a $A = \{0, 1\}$ je $X_1^\infty = [0, 1]$ reálný interval a $X_{-\infty}^\infty = [0, \infty)$ je kladná polopřímka. Dvěma způsoby lze vyjádřit právě dyadická čísla tvaru $(2j + 1)2^{-k}$, kde $j > 0$ a $k \in \mathbf{Z}$. Pro $c = 3$ a $A = \{0, 2\}$ je X_1^∞ Cantorova množina a každý její prvek lze vyjádřit v jediném tvaru. Pro $c = -2$ a $A = \{0, 1\}$ je $X_1^\infty = [-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$ a $X_{-\infty}^\infty = \mathbf{R}$ je celá reálná přímka. Pro komplexní číslo $c = -\sqrt{2}i$ a $A = \{0, 1\}$ je X_1^∞ obdélník a $X_{-\infty}^\infty = \mathbf{C}$ je celá komplexní rovina.

Zajímavý útvar vzniká v pozičním systému s $c = 1 + i$ a $A = \{0, 1\}$ (Obrázek 20). Množina $X_1^1 = \{0, c^{-1}\}$ je dvoubodová. Množinu X_1^n získáme tak, že ke každému bodu x množiny X_1^{n-1} přidáme bod $x + c^{-n}$:

$$X_1^n = X_1^{n-1} + c^{-n}A = \{a + bc^{-n} : \; a \in X_1^{n-1}, b \in A\}$$



Obrázek 20: Dvoudrak

Indukcí ukážeme, že každá X_1^n je podmnožinou čtvercové sítě vytvořenou čísly c^{-n} a ic^{-n}, tj.

$$X_n \subset \{kc^{-n} + lc^{-n}i : \ k, l \in \mathbf{Z}\}$$

Z toho plyne že body X_1^n jsou navzájem různé, tj. počet bodů X_1^n je $\#X_1^n = 2^n$. Jiným způsobem lze X_1^n sestrojit z množiny X_2^n rekurentním vztahem

$$X_1^n = X_2^n + c^{-1}A = \{a + bc^{-1} : \ a \in X_2^n, b \in A\}$$

Platí $X_2^n \subset X_1^n$ a $X_2^n = c^{-1}X_1^{n-1}$. Množina X_2^n je levá polovina množiny X_1^n a má stejný tvar. Pravá polovina množina X_1^n je množina X_2^n posunutá o vektor c^{-1}. To lze vyjádřit pomocí zobrazení podobnosti

$$X_1^n = f_0(X_1^{n-1}) \cup f_1(X_1^{n-1}), \ \text{ kde } \ f_0(z) = z/c, \ \ f_1(z) = (z+1)/c$$

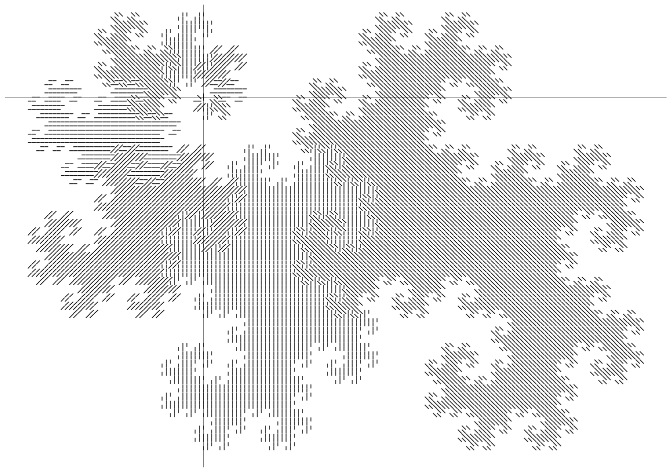
Množina X_1^n je tedy sjednocení dvou zmenšených a disjunktních obrazů množiny X_1^{n-1}. Limitním přechodem dostáváme

$$X_1^\infty = f_0(X_1^\infty) \cup f_1(X_1^\infty)$$

a tyto dvě části se protínají jen ve své hranici. Podobně lze $X_1^\infty = c^{-n}X_{n+1}^\infty$ rozložit na 2^n kopií množiny X_{n+1}^∞ které se protínají jen na své hranici (Obrázek 36). Kopiemi množiny X_1^∞ lze tímto způsobem pokrýt celou rovinu. Množina $X_{-\infty}^\infty$ však celou rovinu nevyplňuje a má tvar nekonečné spirály (Obrázek 21).

1.6 Komplexní analytická dynamika

Mnoho zajímavých útvarů vzniká při vyšetřování iterací analytických funkcí na komplexní rovině. Je-li $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ komplexní funkce daná mnohočlenem $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots c_n z^n$,



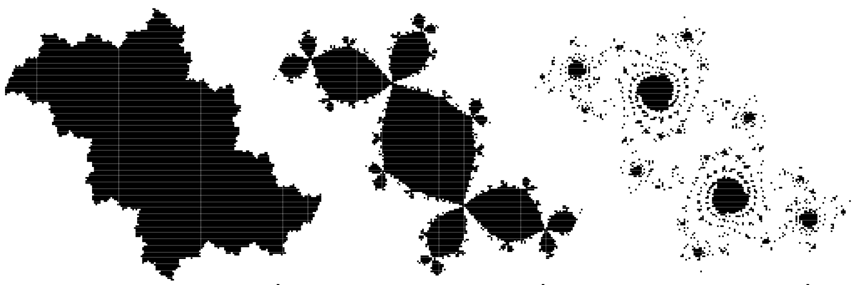
Obrázek 21: Dračí spirála

lze ji spojitě rozšířit na komplexní sféru $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$ předpisem $f(\infty) = \infty$ a tento bod v nekonečnu je navíc stabilní. Pro každý polynom f existuje kladné r_f, takové že platí

$$|z| \geq r_f \implies |f(z)| > r_f, \text{ a } \lim_{n\to\infty} f^n(z) = \infty$$

Zde f^n je n-tá iterace která vzikne složením f se sebou n-krát. Juliova množina funkce f sestává z bodů, jejichž iterace k nekonečnu nekonvergují:

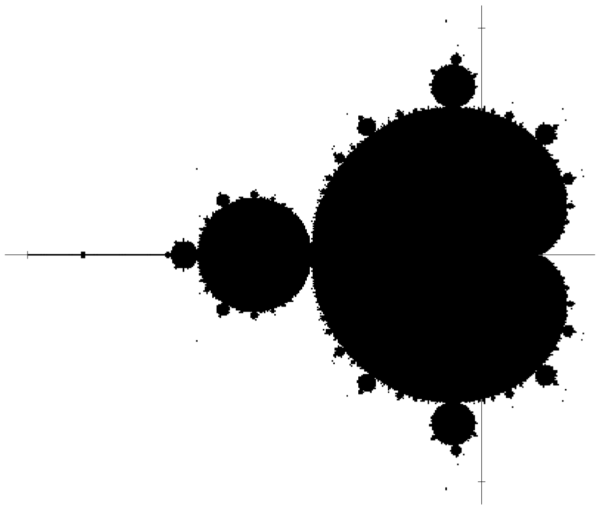
$$J_f = \{z \in \mathbf{C} :\ \forall n, |f^n(z)| < r_f\}.$$



Obrázek 22: Juliovy množiny

Speciálně uvažujeme kvadratické funkce $f_c(z) = z^2 + c$, kde $c \in \mathbf{C}$ je komplexní parametr a $J_c = J_{f_c}$. Pro $c = 0$ je $J_0 = \{z \in \mathbf{C} :\ |z| \leq 1\}$ uzavřený jednotkový kruh. Při malé změně c se tento kruh deformuje na souvislou množinou se složitou fraktální hranicí (Obrázek 22 vlevo). Vzdaluje-li se c od nuly, Juliova množina se dále deformuje a při dosti velkém c se rozpadá na na nesouvislé oblasti (Obrázek 22 vravo). Lze ukázat, že Juliova množina je souvislá právě když iterace $f_c^n(0)$ nekonvergují k nekonečnu. Rozdělení Juliových množin na tyto dva typy určuje Mandelbrotovu množinu na Obrázku 23.

$$M = \{c \in \mathbf{C} :\ J_c \text{ je souvislá}\} = \{c \in \mathbf{C} :\ \exists r > 0, \forall n, |f_c^n(0)| < r\}$$



Obrázek 23: Mandelbrotova množina

2 Metrické prostory

Pojem dimenze budeme nejprve studovat topologickými metodami v metrických prostorech. Metrický prostor je dvojice (X, d), kde X je množina a $d : X \times X \to [0, \infty)$ je funkce (metrika), pro kterou platí

(1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
(2) $d(x, y) = d(y, x)$,
(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Eukleidovský prostor $\mathbf{R}^n$ má metriku $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$. Na každé množině X existuje diskrétní metrika

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x = y \\ 1 & \text{pro} \quad x \neq y \end{cases}$$

Koule se středem $x \in X$ a poloměrem $r > 0$ je množina

$$B_r(x) = \{y \in X : \ d(y, x) < r\}.$$

Vnitřek, uzávěr a hranice množiny $U \subseteq X$ jsou

$$\begin{array}{rcll} U^\circ & = & \{x \in X : \exists r > 0, B_r(x) \subseteq U\} & \qquad \text{vnitřek} \\ \overline{U} & = & \{x \in X : \forall r > 0, B_r(x) \cap U \neq \emptyset\} & \qquad \text{uzávěr} \\ \partial U & = & \overline{U} \setminus U^\circ = \overline{U} \cap \overline{X \setminus U} & \qquad \text{hranice} \end{array}$$

Množina $U \subseteq X$ je otevřená, pokud $U^\circ = U$. Každá koule $B_r(x)$ je otevřená množina. Množina V je uzavřená, pokud $\overline{V} = V$, tj. pokud $X \setminus V$ je otevřená. Množina U je hustá, pokud $\overline{U} = X$. Topologie prostoru X je soubor jeho otevřených množin $\mathcal{U}_X$. Soubor uzavřených množin značíme $\mathcal{F}_X$, a $\mathcal{U}_X \cap \mathcal{F}_X$ je soubor obojetných (otevřených a uzavřených) množin. V každém prostoru platí
(1) $\emptyset, X \in \mathcal{U}_X$,
(2) $U_0, U_1 \in \mathcal{U}_X \implies U_0 \cap U_1 \in \mathcal{U}_X$,
(3) $\forall i \in I, U_i \in \mathcal{U}_X \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}_X$,
kde I je libovolná indexová množina. Obecně, každý soubor podmnožin X, který splňuje vlastnosti (1)-(3), se nazývá topologie. Vlastnosti, které lze vyjádřit pouze pomocí otevřených množin (nebo pomocí operací uzávěru nebo vnitřku), nazýváme topologické. Například konvergence je topologická vlastnost:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \iff (\forall U \in \mathcal{U}_X)(x \in U \implies \exists n, \forall i \geq n, x_i \in U)$$

Říkáme že posloupnost je konvergentní, pokud má limitu. Množina $Y \subseteq X$ je uzavřená právě když limita každé konvergentní posloupnosti jejích členů náleží do Y. Vzdálenost množin $Y_0, Y_1 \subseteq X$ je

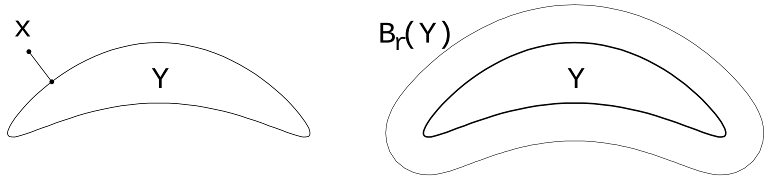
$$d(Y_0, Y_1) = \inf\{d(y_0, y_1) : \ y_0 \in Y_0, y_1 \in Y_1\}$$

Speciálně vzdálenost bodu $x \in X$ od množiny Y je $d(x, Y) = d(\{x\}, Y)$. Pro $Y \subseteq X$ a $r > 0$ je r-okolí Y otevřená množina $B_r(Y) = \{x \in X : \ d(x, Y) < \varepsilon\}$ (Obrázek 24).

Tvrzení 1

(1) Jsou-li $V_0, V_1 \subseteq X$ uzavřené disjunktní množiny, existují otevřené disjunktní množiny $U_0 \supseteq V_0$, $U_1 \supseteq V_1$.

(2) Je-li $\mathcal{F}_X \ni V \subseteq U \in \mathcal{U}_X$, pak existuje $W \in \mathcal{U}_X$ pro kterou $V \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$.



Obrázek 24: Okolí množiny

(3) Každá uzavřená množina je spočetný průnik otevřených množin.

(4) Každá otevřená množina je spočetné sjednocení uzavřených množin.

Důkaz: (1) Je-li $x \in V_0$, je $d(x, V_0) = 0 < d(x, V_1)$. Položme

$$\begin{aligned} U_0 &= \{x \in X : \; d(x, V_0) < d(x, V_1)\}, \\ U_1 &= \{x \in X : \; d(x, V_0) > d(x, V_1)\} \end{aligned}$$

(2) Pro disjunktní uzavřené množiny V, $X \setminus U$ existují otevřené disjunktní W, W_1 pro které $V \subseteq W$, $X \setminus U \subseteq W_1$, takže $W \subseteq X \setminus W_1$ a $\overline{W} \subseteq X \setminus W_1 \subseteq U$.
(3) Je-li $V \subseteq X$ uzavřená, pak $V = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{1/k}(V)$. Pro každé $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{1/k}(V)$ a pro každé k totiž existuje $x_k \in X$ pro které $d(x_k, x) < 1/k$, takže $x = \lim_{k \to \infty} x_k \in V$.
(4) plyne z (3) podle duality. □

Zobrazení $f : X \to Y$ mezi dvěma metrickými prostory j spojité, pokud

$$\forall V \in \mathcal{U}_Y, f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X.$$

Bijektivní zobrazení $f : X \to Y$ je homeomorfismus, pokud f i f^{-1} jsou spojité. Homeomorfní prostory mají stejné topologické vlastnosti. Zobrazení $f : X \to Y$ je stejnoměrně spojité, pokud

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0, x_1 \in X, (d(x_0, x_1) < \varepsilon \implies d(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon)$$

Zatímco spojitost je topologická vlastnost, stejnoměrná spojitost topologická vlastnost není.

Je-li $Y \subseteq X$, pak (Y, d) je také metrický prostor, který nazýváme podprostor (X, d). Zobrazení inkluze $i : Y \to X$ je spojité. Množina $V \subseteq Y$ je otevřená v Y právě když existuje otevřená množina $U \subseteq X$, taková že $V = U \cap X$, takže

$$\mathcal{U}_Y = \{U \cap Y : \; U \in \mathcal{U}_X\}.$$

2.1 Úplnost a kompaktnost

Systém množin $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_X$ je báze, pokud pro každé $x \in U \in \mathcal{U}_X$ existuje $B \in \mathcal{B}$, pro které $x \in B \subseteq U$. V každém prostoru je systém všech koulí báze. Reálná přímka má spočetnou bázi $\mathcal{B} = \{B_r(x) : \; x, r \in \mathbf{Q}, r > 0\}$.

Definice 1 *Posloupnost $(x_n)_{n \in N}$ je cauchyovská, jestliže*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n, \forall m > n, d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

(1) Prostor X je úplný, pokud každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

(2) Prostor X je kompaktní, pokud každá posloupnost jeho bodů má konvergentní podposloupnost.

(3) Prostor X je separabilní, má-li spočetnou hustou část.

Prostor $\mathbf{R}$ reálných čísel je úplný. Je to nejmenší úplný prostor, který obsahuje množinu $\mathbf{Q}$ racionálních čísel. Také eukleidovský prostor $\mathbf{R}^n$ je úplný. Podprostor úplného prostoru je úplný právě když je uzavřený. Podprostor kompaktního prostoru je kompaktní právě když je uzavřený. Zatímco kompaktnost je topologická vlastnost, úplnost topologická vlastnost není, nezachovává se při homeomorfismech. Prostory $\mathbf{R}$ a $(0,1)$ jsou homeomorfní, $\mathbf{R}$ je úplný prostor ale $(0,1)$ úplný není.

Definice 2

(1) Konečná množina $K \subseteq X$ je ε-síť, pokud $\forall x \in X, \exists y \in K, d(x,y) < \varepsilon$.

(2) Prostor X je omezený, pokud existuje $x \in X$ a $r > 0$ takové, že $X \subseteq B_r(x)$.

(3) Prostor X je totálně omezený, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť.

Podmínka na množinu K, z bodu (1), se dá psát též ve tvaru $\bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x) = X$. Totálně omezený prostor je omezený. Diskrétní prostor na nekonečné množině je omezený ale není totálně omezený. Každá omezená množina eukleidovského prostoru je však totálně omezená.

Tvrzení 2

(1) Prostor je kompaktní právě když je úplný a totálně omezený.

(2) Kompaktní prostor je separabilní a má spočetnou bázi.

(3) Podmnožina $X \subseteq \mathbf{R}^n$ je kompaktní právě když X je uzavřená a omezená.

(4) Je-li f spojitá funkce na kompaktním prostoru X, je $f(X)$ kompaktní.

Důkaz: . (1) Nechť X je kompaktní. Je-li $(x_n)_{n \geq 0}$ cauchyovská posloupnost a x limita její některé vybrané podposloupnosti, je $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, takže X je úplný. Předpokládejme sporem, že X nemá ε-síť. Zvolme $x_0 \in X$ libovolně. Předpokládejme, že jsme setrojili body $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Protože tyto body netvoří ε-síť, existuje $x_n \in X$ takový, že $d(x_i, x_n) \geq \varepsilon$ pro všechna $i < n$. Posloupnost $(x_n)_{n \geq 0}$ pak nemá konvergentní podposloupnost a to je spor. Prostor X je tedy totálně omezený. Naopak předpokládejme, že X je úplný a totálně omezený. Pro každé $n > 0$ nechť $K_{1/n} \subseteq X$ je nějaká jeho konečná $(1/n)$-síť. Nechť $(x_n)_{n \geq 0}$ je libovolná posloupnost. Existuje $z_1 \in K_1$ takové, že množina $N_1 = \{n \in \mathbf{N} : \ d(x_n, z_1) < \varepsilon\}$ je nekonečná a nechť $n_1 \in N_1$ je libovolné. Předpokládejme, že jsme již sestrojili $n_{i-1} \in N_{i-1}$. Existuje $z_i \in K_{1/i}$ takové, že $N_i = \{n \in N_{i-1} : \ d(z_i, x_n) < \varepsilon\}$ je nekonečná mno6ina. Zvolme $n_i \in N_i$ takové, že $n_i > n_{i-1}$. Pro $i < j$ je

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, z_i) + d(z_i, x_{n_j}) \leq 2/i.$$

Posloupnost $(x_{n_i})_{i \geq 0}$ je tedy cauchyovská a podle předpokladu konvergentní.
(2) Je-li $K_{1/n} \subseteq X$ nějaká $(1/n)$-síť, je $K = \bigcup_{n>0} K_{1/n}$ spočetná hustá část. Spočetná báze je pak $\mathcal{B} = \{B_r(x) : \ x \in K, r \in \mathbf{Q}, r > 0\}$.
(3) Každá kompaktní podmnožina (libovolného prostoru) je uzavřená a omezená. Je-li $X \subseteq \mathbf{R}^n$ uzavřený a omezený podprostor, je totálně omezený a úplný, takže je kompaktní.
(4) Je-li $(y_n)_{n \geq 0}$ posloupnost v $f(X)$, existují $x_n \in X$ pro kter8 $f(x_n) = y_n$. Je-li $(x_{n_i})_{i \geq 0}$ vybraná konvergentní podposloupnost v X, je $(y_{n_i})_{i \geq 0}$ vybraná konvergentní podposloupnost v $f(X)$ $\square$

Pokrytí prostoru X je každá množina $\mathcal{U}$ jeho podmnožin, jejíž sjednocení je celé X, tj. $\bigcup \mathcal{U} = X$. Jsou-li všechny množiny v $\mathcal{U}$ otevřené, říkáme, že $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí. Je-li $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ také pokrytí, říkáme že $\mathcal{V}$ je podpokrytí $\mathcal{U}$.

Tvrzení 3 *Pro metrický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní*

(1) X je kompaktní.

(2) Každé otevřené pokrytí X má konečné podpokrytí.

(3) Jestliže $V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \dots$ jsou neprázdné uzavřené množiny, pak $\bigcap_{i\geq 0} V_i \neq \emptyset$.

Důkaz: (1) $\Rightarrow$ (2): Podle Tvrzení 2 existuje spočetná báze $\mathcal{B}$. Pro každé $x \in X$ existuje $U \in \mathcal{U}$, pro kterou $x \in U$ a $B_x \in \mathcal{B}$, pro kterou $x \in B_x \subseteq U$. Protože $\{B_x : x \in X\}$ je spočetná, existuje spočetná $L \subseteq X$ taková, že

$$\{B_x : x \in X\} = \{B_x : x \in L\}.$$

Pro každé $x \in L$ volme $U_x \in \mathcal{U}$, pro které $B_x \subseteq U_x$. Pak $\mathcal{U}_0 = \{U_x : x \in L\}$ je spočetné podpokrytí $\mathcal{U}$. Předpokládejme nyní sporem, že spočetné pokrytí $\mathcal{U}_0 = \{U_0, U_1, \dots\}$ nemá konečné podpokrytí, takže pro každé n existuje $x_n \in X \setminus (U_0 \cup \dots \cup U_n)$. Protože X je kompaktní, existuje konvergentní podposloupnost $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = x$. Pak $x \in U_m$ pro nějaké m a $x_{n_i} \in U_m$ pro všechna dosti velká i, a to je spor.
(2) $\Rightarrow$ (3): Předpokládejme sporem, že V_i jsou uzavřené a neprázdné, $V_{i+1} \subseteq V_i$ a $V = \bigcap_{i\geq 0} V_i = \emptyset$. Pak $\{X \setminus V_i : i \geq 0\}$ je otevřené pokrytí, které nemá konečné podpokrytí a to je spor.
(3) $\Rightarrow$ (1): Pro posloupnost $(x_n)_{n\geq 0}$ v X položme $V_n = \{x_i : i \geq n\}$. Pak $\overline{V_n}$ jsou uzavřené a neprázdné, takže existuje $x \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{V_n}$. Protože $B_1(x) \cap V_0 \neq \emptyset$, existuje n_0, pro které $d(x, x_{n_0}) < 1$. Předpokládejme že jsme sestrojili n_{k-1}. Pak existuje $n_k > n_{k-1}$, pro které $x_{n_k} \in B_{1/k}(x) \cap V_{n_k}$ a $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. $\square$

Věta 4 (Lebesgueovo číslo) *Je-li $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí kompaktního prostoru X, pak existuje $\lambda > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ existuje $U \in \mathcal{U}$, pro které $B_\lambda(x) \subseteq U$.*

Důkaz: Předpokládejme sporem že pro každé $n > 0$ existuje x_n takové že $B_{1/n}(x_n)$ není obsaženo v žádné množině pokrytí $\mathcal{U}$. Je-li $x = \lim_{i\to\infty} x_{n_i}$ limita vybrané posposloupnosti, existuje $r > 0$ a $U \in \mathcal{U}$ takové že $B_r(x) \subseteq U$. Je-li $1/n < r/2$ a $d(x_n, x) < r/2$, platí pro každé $y \in B_{1/n}(x_n)$

$$d(y,x) \leq (y, x_n) + d(x_n, x) \leq \tfrac{1}{n} + \tfrac{r}{2} \leq r$$

takže $B_{1/n}(x_n) \subseteq U$ a to je spor. $\square$

2.2 Souvislé a nesouvislé prostory

Množina $U \subseteq$X má prázdnou hranici právě když je obojetná (otevřená a uzavřená):

$$\emptyset = \partial U = \overline{U} \setminus U^\circ \iff U^\circ = U = \overline{U}$$

Definice 3

(1) Prostor X je souvislý, jestliže $\mathcal{U}_X \cap \mathcal{F}_X = \{\emptyset, X\}$ jsou jediné jeho obojetné množiny.

(2) Prostor X je totálně nesouvislý, jestliže obojetné množiny $\mathcal{U}_X \cap \mathcal{F}_X$ tvoří bázi.

Tvrzení 5 *Každý interval $I \subseteq \mathbf{R}$ je souvislý.*

Důkaz: Předpokládejme sporem, že existuje obojetná množina $\emptyset \subset U_0 \subset I$. Její doplněk $U_1 = I \setminus U_0$ je také obojetná a neprázdná. Sestrojíme posloupnosti bodů $(x_n)_{n\geq 0}$ a $(y_n)_{n\geq 0}$. Zvolme $x_0 \in U_0$, $x_1 \in U_1$. Jsou-li x_n, y_n sestrojena, nechť $z_n = (x_n + y_n)/2$ a položme

$$\begin{aligned} z_n \in U_0 \quad &\Rightarrow \quad x_{n+1} = z_n, \;\; y_{n+1} = y_n, \\ z_n \in U_1 \quad &\Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n, \;\; y_{n+1} = z_n. \end{aligned}$$

Protože x_n a y_n jsou monotónní posloupnosti, jejichž vzdálenost se blíží nule, mají společnou limitu $z = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. Protože U_0 i U_1 jsou uzavřené, patří tato limita do U_0 i do U_1, a to je spor. □

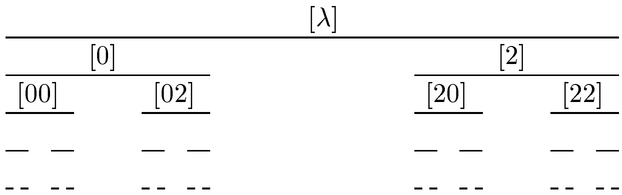
Sjednocení intervalů $X = [0,1] \cup [2,3]$ není souvislý prostor protože $[0,1]$ a $[2,3]$ jsou jeho obojetné množiny. X však není totálně nesouvislý. Každý konečný prostor je totálně nesouvislý protože všechny jeho množiny jsou obojetné. Prostor $\mathbf{Q}$ racionálních čísel je totálně nesouvislý protože otevřené intervaly s iracionálními koncovými body tvoří obojetnou bázi. Podobně prostor $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ iracionálních čísel je totálně nesouvislý.

Příklad 1 *Cantorova množina* $C = \{\sum_{i=1}^{\infty} x_i 3^{-i} : \; x_i \in \{0,2\}\}$ *je totálně nesouvislá..*

Důkaz: Pro abecedu $A = \{0,2\}$ označme A^* množinu konečných slov nad A. Pro $u = u_0 \dots u_{n-1} \in A^*$ definujme cylindr u (Obrázek 25) jako

$$[u] = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} x_i 3^{-i} : \; \forall i < n, x_i = u_i \right\}.$$

Každý cylindr je obojetná množina a systém cylindrů je báze. □



Obrázek 25: Cylindry Cantorovy množiny

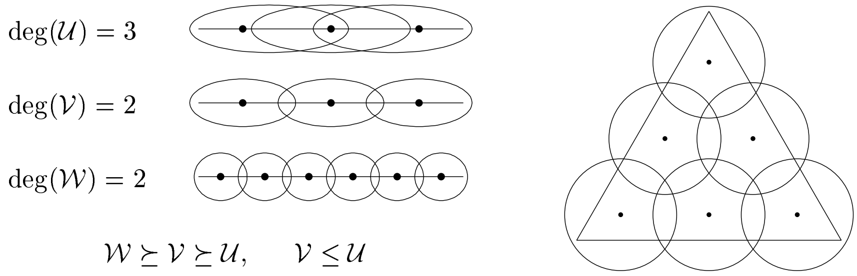
2.3 Pokrývací dimenze

Pokrývací dimenze vychází z vlastností pokrytí prostoru. Pokrýváme-li úsečku krátkými otevřenými intervaly, vždy se sousední intervaly musí protínat, není však třeba aby se protínaly tři různé intervaly (Obrázek 26 vlevo). Když pokrýváme trojúhelník malými otevřenými kruhy, vždy existují alespoň tři kruhy, které mají neprázdný průnik, lze však sestrojit takové pokrytí, že každé čtyři různé kruhy mají prázdný průnik (Obrázek 26 vpravo).

Definice 4 *Nechť* X *je metrický prostor a* $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ *jeho pokrytí.*

(1) $\mathcal{U}$ *je jemnější než* $\mathcal{V}$ ($\mathcal{U} \succeq \mathcal{V}$)*, pokud* $\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{V}, U \subseteq V$.

(2) Konečné pokrytí $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$ *je zmenšením pokrytí* $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_k\}$ *se stejným počtem prvků* ($\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$)*, pokud* $U_i \subseteq V_i$ *pro* $1 \leq i \leq k$.



Obrázek 26: Pokrytí

(3) Stupeň $\deg(\mathcal{U}) = \sup\{\#\mathcal{V} : \ \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}, \ \ \bigcap \mathcal{V} \neq \emptyset\}$ *je největší počet jeho množin, které mají neprázdný průnik.*

(4) Průměr $|\mathcal{U}| = \sup\{|U| \ : \ U \in \mathcal{U}\}$, *kde* $|U| = \sup\{d(x,y) \ : \ x, y \in U\}$, *je supremum průměru jeho množin.*

Pokrytí stupně 1 se nazývá rozklad protože jeho množiny jsou disjunktní. Je-li $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ pak $\mathcal{U} \succeq \mathcal{V}$. Je-li $\mathcal{U} \succeq \mathcal{V}$, pak $|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{V}|$.

Tvrzení 6 *Je-li $\mathcal{U}$ konečné otevřené pokrytí stupně* 1, *pak každá $U \in \mathcal{U}$ je obojetná.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$. Protože U_i jsou disjunktní a otevřené je každá U_i doplněk otevřenné množiny a tedy uzavřená:

$$U_i = X \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_{i-1} \cup U_{i+1} \cup \cdots \cup U_k). \ \square$$

Definice 5 *Pokrývací dimenzi* $\operatorname{cov}(X)$ *definujeme předpisem:*

(1) $\operatorname{cov}(\emptyset) = -1$

(2) $\operatorname{cov}(X) \leq n$, *pokud pro každé konečné otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ existuje konečné otevřené zjemnění $\mathcal{V} \succeq \mathcal{U}$ takové, že* $\deg(\mathcal{V}) \leq n + 1$.

(3) $\operatorname{cov}(X) = n$ *pokud* $\operatorname{cov}(X) \leq n$ *a neplatí* $\operatorname{cov}(X) \leq n - 1$.

(4) $\operatorname{cov}(X) = \infty$, *pokud pro žádné n neplatí* $\operatorname{cov}(X) \leq n$.

Je-li $\operatorname{cov}(X) = n$, budeme říkat že X je n-dimenzionální prostor. Každý neprázdný konečný prostor je 0-dimenzionální. Pokrytí $\mathcal{U} = \{\{x\} : \ x \in X\}$ jednobodovými množinami je totiž otevřené, jeho stupeň je 1 a je jemnější než každé jiné pokrytí. Také diskrétní prostor $\mathbf{N}$ přirozených čísel a Cantorova množina jsou 0-dimenzionální. Obecněji platí

Tvrzení 7 *Kompaktní prostor je* 0*-dimenzionální právě když je totálně nesouvislý.*

Důkaz: Nechť $\operatorname{cov}(X) = 0$ a nechť $x \in U \in \mathcal{U}_X$. Pak $r = d(x, X \setminus U) > 0$ a otevřené pokrytí $\mathcal{U} = \{U\} \cup \{B_r(z) : \ z \in X \setminus U\}$ má konečné podpokrytí $\mathcal{V}$, takže existuje konečné otevřené pokrytí $\mathcal{W} \succeq \mathcal{V}$ stupně 1. Je-li $x \in W \in \mathcal{W}$, pak W je obojetná a $W \subseteq U$, takže X je totálně nesouvislý. Naopak předpokládejme že X je totálně nesouvislý a $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ je jeho otevřené pokrytí. Pro každé $x \in X$ existuje $i \leq k$ a obojetná množina A_x taková, že $x \in A_x \subset U_i$. Obojetné pokrytí $\{A_x : \ x \in X\}$ má podpokrytí $\{A_x : \ x \in K\} \succeq \mathcal{U}$, kde $K \subseteq X$ je konečná. Pro $1 \leq i \leq k$ položme $V_i = \bigcup\{A_x : \ x \in K, A_x \subseteq U_i\}$. Pak V_i jsou obojetné množiny a dostáváme obojetné pokrytí stupně 1

$$\mathcal{V} = \{V_1, V_2 \setminus V_1, V_3 \setminus (V_1 \cup V_2), \ldots, V_k \setminus (V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1})\} \succeq \mathcal{U} \ \square$$

Tvrzení 8 *Je-li X kompaktní prostor, pak* $\operatorname{cov}(X) \le n$ *právě když pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje otevřené pokrytí* $\mathcal{U}$ *prostoru* X*, pro které* $|\mathcal{U}| < \varepsilon$ *a* $\deg(\mathcal{U}) \le n+1$.

Důkaz: Soubor všech otevřených množin průměru menšího než ε má konečné podpokrytí $\mathcal{V}$ a podle předpokladu existuje otevřené konečné pokrytí $\mathcal{U} \succeq \mathcal{V}$, pro které $\deg(\mathcal{U}) \le n+1$. Zřejmě $|\mathcal{U}| < \varepsilon$. Naopak předpokládejme že podmínka je splněna. Nechť $\mathcal{V}$ je konečné otevřené pokrytí a λ jeho Lebesgueovo číslo (Věta 4). Je-li $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí pro které $|\mathcal{U}| < \varepsilon$ a $\deg(\mathcal{U}) \le n+1$, pak $\mathcal{U} \succeq \mathcal{V}$. $\square$

Tvrzení 9 *Jednotkový interval* $\mathbf{I} = [0,1]$ *je* 1*-dimenzionální.*

Důkaz: Pro $n > 1/3\lambda$ uvažujme otevřené pokrytí

$$\mathcal{V}_n = \{[0, \tfrac{2}{n}), (\tfrac{1}{n}, \tfrac{3}{n}), \ldots, (\tfrac{n-3}{n}, \tfrac{n-2}{n}), (\tfrac{n-2}{n}, 1]\}.$$

Pak $\deg(\mathcal{V}_n) = 1$ a $|\mathcal{V}_n| = 2/n$, takže $\operatorname{cov}(\mathbf{I}) \le 1$ podle Tvrzení 8. Protože $\mathbf{I}$ je souvislý, je $\operatorname{cov}(\mathbf{I}) = 1$. $\square$

Lemma 10 *Pro každé konečné otevřené pokrytí* $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ *existuje konečné otevřené pokrytí* $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ *takové, že* $\overline{V_j} \subseteq U_j$ *pro každé* $j \le k$.

Důkaz: Protože $X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_k) \subseteq U_1$, existuje podle Tvrzení 1 otevřená V_1 pro kterou $X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_k) \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$, takže $\mathcal{U}_1 = \{V_1, U_2, \ldots, U_k\}$ je otevřené pokrytí. Indukcí sestrojujeme otevřené množiny $V_2 \ldots, V_k$, pro které platí

$$X \setminus (V_1 \cup \cdots \cup V_{j-1} \cup U_{j+1} \cup \cdots \cup U_k) \subseteq V_j \subseteq \overline{V_j} \subseteq U_j.$$

Pak $\{V_1, \ldots, V_k\}$ je otevřené zmenšení $\mathcal{U}$. $\square$

Tvrzení 11 *Nechť X je metrický prostor a $n \ge 0$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) $\operatorname{cov}(X) \le n$.

(2) Každé konečné otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ *má otevřené zmenšení* $\mathcal{V} \le \mathcal{U}$ *stupně* $\deg(\mathcal{V}) \le n+1$.

(3) Každé konečné otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ *má uzavřené zmenšení* $\mathcal{V} \le \mathcal{U}$ *stupně* $\deg(\mathcal{V}) \le n+1$.

(4) Každé konečné otevřené pokrytí $\mathcal{U}$*, s* $n+2$ *prvky má otevřené zmenšení* $\mathcal{V} \le \mathcal{U}$ *stupně nejvýše* $n+1$*, tj.* $\bigcap \mathcal{V} = \emptyset$.

(5) Každé konečné otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ *s* $n+2$ *prvky má uzavřené zmenšení* $\mathcal{V} \le \mathcal{U}$ *stupně nejvýše* $n+1$*, tj.* $\bigcap \mathcal{V} = \emptyset$.

Důkaz: Zřejmě (2) $\Rightarrow$ (1), (2) $\Rightarrow$ (4) a z Lemma 10 plyne (2) $\Rightarrow$ (3).
(1) $\Rightarrow$ (2): Nechť $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$. Podle předpokladu existuje otevřené pokrytí $\mathcal{W} \succeq \mathcal{U}$, pro které $\deg(\mathcal{W}) \le n+1$. Pro každé $W \in \mathcal{W}$ existuje $p(W) \le k$ takové, že $W \subseteq U_{p(W)}$. Pro $i \le k$ položme $V_i = \bigcup\{W \in \mathcal{W} : p(W) = i\}$. Pak $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_k\} \le \mathcal{U}$ a $\deg(\mathcal{U}) \le n+1$.
(4) $\Rightarrow$ (2): Nechť $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$. Pokud $k \le n+1$, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme tedy $k > n+1$ a položme

$$W_1 = U_1, \ldots, W_{n+1} = U_{n+1},\ W_{n+2} = U_{n+2} \cup \cdots \cup U_k.$$

Pak pro $\mathcal{W} = \{W_1, \ldots, W_{n+2}\}$ existuje otevřené pokrytí $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_{n+2}\}$ takové, že $\mathcal{V} \le \mathcal{W}$ a $\bigcap \mathcal{V} = \emptyset$. Položme $B_i = V_i$ pro $i \le n+1$ a $B_i = U_i \cap V_{n+2}$ pro $i \ge n+1$. Pak

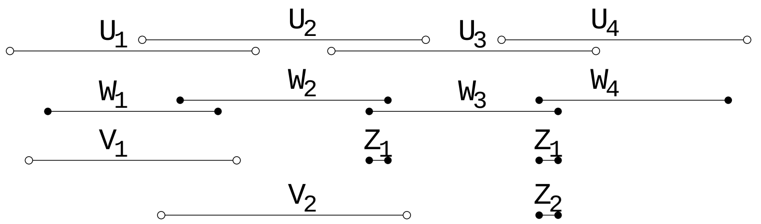
$\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\} \preceq \mathcal{U}$ a $B_1 \cap \cdots \cap B_{n+2} = \emptyset$. Zopakujeme tuto konstrukci nyní pro každou $(n+2)$-prvkovou podmnožinu množiny $\{1, \ldots, k\}$. Tak dostaneme otevřené zmenšení $\mathcal{U}$ se stupněm nejvýše $n+1$.
(3) $\Rightarrow$ (2): Nechť $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$. Existuje uzavřené pokrytí $\mathcal{W} = \{W_1, \ldots, W_k\} \preceq \mathcal{U}$, pro které $\deg(\mathcal{W}) \leq n+1$ (Obrázek 27). Položme

$$Z_1 = \bigcup \{ \bigcap_{i \in K} W_i : \ K \subseteq \{2, \ldots, k\}, \#K = n+1 \}.$$

Protože $\deg(\mathcal{W}) \leq n+1$, je $W_1 \cap Z_1 = \emptyset$ a $W_1 \subseteq U_1 \setminus Z_1$. Podle Tvrzení 1 existuje otevřená množina V_1 pro kterou $W_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1 \setminus Z_1$ a $\mathcal{W}' = \{\overline{V_1}, W_2, \ldots, W_k\} = \{W_1', \ldots, W_k'\}$ je uzavřené pokrytí X. Položme

$$Z_2 = \bigcup \{ \bigcap_{i \in K} W_i' : \ K \subseteq \{1, 3, \ldots, k\}, \#K = n+1 \}$$

Existuje otevřená V_2 která splňuje $W_2 \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq U_2 \setminus Z_2$. Stejně pokračujeme pro $i = 3, \ldots, k$ a získáme požadované otevřené zmenšení $\{V_1, \ldots, V_k\}$.
(4) $\Leftrightarrow$ (5): Stejným způsobm jako (2) $\Leftrightarrow$ (3). $\square$



Obrázek 27: Otevřené zmenšení

Ve zbytku kapitoly uvedeme několik vět o dimenzi podmnožin a sjednocení. Ještě předtím ukážeme, že pokrývací dimenze je topologický invariant, neboli že homeomorfismy ji zachovávají.

Tvrzení 12 *Necht' X a Y jsou dva metrické prostory a $f : X \longrightarrow Y$ je homeomorfismus X na Y. Pak $cov(X) = cov(Y)$.*

Důkaz: Dokažme $cov(X) \leq cov(Y)$. Bud' $\mathcal{U}$ otevřené konečné pokrytí prostoru X. Pak $f(\mathcal{U}) = \{f(U), U \in \mathcal{U}\}$ je konečné otevřené pokrytí prostoru Y. Existuje tedy konečné otevřené zjemnění $\mathcal{V}$ stupně nejvýše $cov(Y) + 1$. Ale potom $f^{-1}(\mathcal{V}) = \{f^{-1}(V), V \in \mathcal{V}\}$ je konečným otevřeným zjemněním $\mathcal{U}$ a $\deg(f^{-1}(\mathcal{V})) = \deg(\mathcal{V})$. Tedy $cov(X) \leq cov(Y)$. Jelikož f^{-1} je homeomorfismus Y na X, dostaneme obdobně $\mathrm{cov}(Y) \leq \mathrm{cov}(X)$. $\square$

Tvrzení 13 *Je-li Y uzavřená podmnožina prostoru X, pak* $\mathrm{cov}(Y) \leq \mathrm{cov}(X)$.

Důkaz: Nechť $\mathcal{U}$ je konečné otevřené pokrytí prostoru Y. Pro každou $U \in \mathcal{U}$ existuje otevřená množina $V_U \subseteq X$ taková, že $U = Y \cap V_U$. Pak

$$\mathcal{V} = \{V_U : \ U \in \mathcal{U}\} \cup \{X \setminus Y\}$$

je konečné otevřené pokrytí prostoru X. Existuje tedy konečné zjemnění $\mathcal{V}' \succeq \mathcal{V}$ takové, že $\deg(\mathcal{V}') \leq \mathrm{cov}(X) + 1$. Pak $\mathcal{U}' = \{V \cap Y : \ V \in \mathcal{V}'\} \succeq \mathcal{U}$ a $\deg(\mathcal{U}') \leq \mathrm{cov}(X) + 1$, takže

$\mathrm{cov}(Y) \leq \mathrm{cov}(X)$. $\square$

Z předchozího tvrzení plyne, že dimenze sjednocení libovolného souboru uzavřených podmnožin $(X_i)_{i\in I}$ prostoru X je vetší nebo rovna než dimenze kterékoli množiny X_i. Následující věta ukazuje, že konečné, ale i spočetné sjednocení uzavřených množin má dimenzi rovnu maximální dimenzi množin samých.

Věta 14 *Nechť X je metrický prostor a nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou uzavřené podmnožiny takové, že $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$. Pokud pro každé i je $\mathrm{cov}(X_i) \leq n$, pak $\mathrm{cov}(X) \leq n$.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_{n+2}\}$ je otevřené pokrytí X. Položme $Y_0 = \emptyset$ a $Y_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ pro $i > 0$. Sestrojíme posloupnost otevřených pokrytí $\mathcal{U}_i = \{U_{i,1}, \dots, U_{i,n+2}\}$ takových, že platí
(1) $U_{0,j} = U_j$, $\overline{U_{i,j}} \subseteq U_{i-1,j}$ pro $i > 0$,
(2) $Y_i \cap \overline{U_{i,1}} \cap \dots \cap \overline{U_{i,n+2}} = \emptyset$.
Pro $i = 0$ zřejmě $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$ splňuje (1) a (2). Předpokládejme, že jsme setrojili $\mathcal{U}_i$, pro které platí (1) a (2) a položme

$$A = \overline{U_{i,1}} \cap \dots \cap \overline{U_{i,n+2}}, \quad Z = A \cap Y_{i+1}.$$

Protože $A \cap Y_i = \emptyset$, je $Z \subseteq X_{i+1}$ uzavřená a tedy $\mathrm{cov}(Z) \leq n$. Pokrytí

$$\{Z \cap U_{i,1}, \dots, Z \cap U_{i,n+2}\}$$

má otevřené zmenšení $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_{n+2}\}$, pro které $\bigcap \mathcal{V} = \emptyset$. Protože V_i jsou otevřené v Z, existují otevřené V_j', pro které $V_j = Z \cap V_j'$. Pak

$$W_j = (U_{i,j} \setminus Z) \cup V_j = U_{i,j} \cap ((U_{i,j} \setminus Z) \cup V_j') \subseteq U_{i,j}$$

je otevřená. Protože $W_1 \cup \dots \cup W_{n+2} = (X \setminus Z) \cup V_1 \cup \dots \cup V_{n+2} = X$, je $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_{n+2}\}$ otevřené pokrytí X. Protože $\bigcap \mathcal{V} = \emptyset$ a $(U_{i,j} \setminus Z) \cap V_k = \emptyset$, je

$$\bigcap \mathcal{W} = (U_{i,1} \cap \dots \cap U_{i,n+1}) \setminus Z \subseteq A \setminus Z,$$

takže $Y_{i+1} \cap W_1 \cap \dots \cap W_{n+2} \subseteq (A \cap Y_{i+1}) \setminus Z = \emptyset$. Podle Tvrzení 10 existuje otevřené pokrytí $\mathcal{U}_{i+1} = \{U_{i+1,1}, \dots, U_{i+1,n+2}\}$, pro které $\overline{\mathcal{U}_{i+1,j}} \subseteq W_j \subseteq U_{i,j}$, takže podmínky (1) a (2) jsou splněny pro $i+1$. Pro $j \leq n+2$ položme

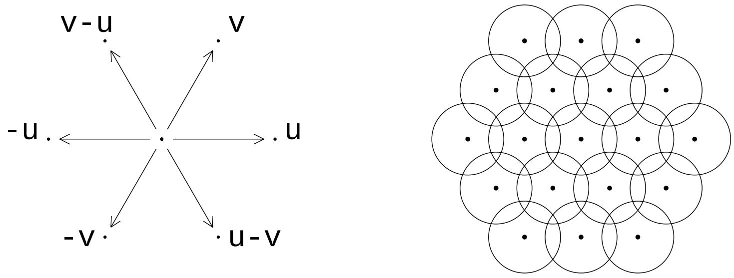
$$U_j' = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{U_{i,j}}.$$

Pro každé $x \in X$ existuje $k(x) \leq n+2$ takové, že $x \in U_{i,k(x)}'$ platí pro nekonečně mnoho indexů i, a tedy pro všechny indexy i. To znamená, že $\mathcal{U}' = \{U_1', \dots, U_{n+2}'\}$ je uzavřené zmenšení $\mathcal{U}$ a $\bigcap \mathcal{U}' = \emptyset$, takže $\mathrm{cov}(X) \leq n$ podle Tvrzení 11. $\square$

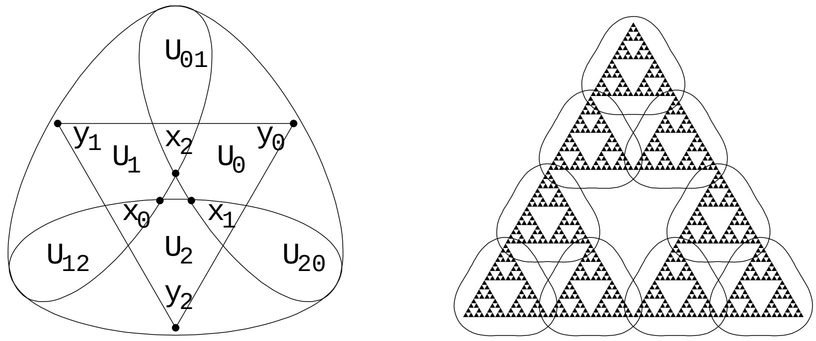
Položíme-li $X_k = [-k, k] \subset \mathbf{R}$, dostáváme odtud $\mathrm{cov}(\mathbf{R}) = 1$. Protože $\mathbf{R}$ je homeomorfní s otevřeným intervalem, je také každý otevřený interval jednodimenzionální. Nyní můžeme zesílit Tvrzení 13.

Věta 15 *Je-li $Y \subseteq X$, pak $\mathrm{cov}(Y) \leq \mathrm{cov}(X)$.*

Důkaz: Pro uzavřené podmnožiny Y Věta platí podle Tvrzení 13. Protože každá otevřená podmnožina je spočetné sjednocení uzavřených podmnožin, platí Věta také pro otevřené Y. Nechť Y je libovolná podmnožina a $\mathcal{U} = \{U_1, \dots U_k\}$ její konečné otevřené pokrytí, takže



Obrázek 28: Šestiúhelníková síť



Obrázek 29: Dimenze trojúhelníku

existují otevřené V_j takové že $U_j = Y \cap V_j$. Pro $U = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ je $\operatorname{cov}(U) \leq \operatorname{cov}(X)$, takže existuje otevřené pokrytí $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ množiny U takové že $\deg(\mathcal{V}) \leq \operatorname{cov}(X) + 1$. Pak $\{Y \cap V_1, \ldots, Y \cap V_k\}$ je otevřené pokrytí Y, které je zmenšením $\mathcal{U}$, takže $\operatorname{cov}(Y) \leq \operatorname{cov}(X)$. □

Dimenze Sierpińského množiny $X \subset \mathbf{R}^2$ je $\operatorname{cov}(X) = 1$. Protože X obsahuje úsečku, je $\operatorname{cov}(X) \geq 1$. Naopak lze snadno sestrojit otevřené pokrytí stupně 2 s libovolně malým průměrem (Obrázek 29 vpravo). Kochova množina je jednodimenzionální, protože je homeomorfní úsečce. Snadno lze také ukázat že $\operatorname{cov}(\mathbf{R}^n) \leq n$ pro každé n. Opačná nerovnost je však složitější a dokazuje se pomocí Brouwerovy věty o pevném bodě. Plati tedy nasledujici veta.

Věta 16 $\operatorname{cov}(\mathbf{R}^n) = n$.

Obecně je množina $X \subseteq \mathbf{R}^n$ n-dimenzionální právě když má neprázdný vnitřek (Engelking [4]). Kromě pokrývací dimenze se v topologii studují ještě alternativní pojmy dimenze. Například malá induktivní dimenze ind je založena na tom, že koule v $\mathbf{R}$, tj. intervaly, mají konečnou tedy 0-dimenzionální hranici, koule v $\mathbf{R}^2$, tedy kruhy, mají jednodimenzionální kružnici, atd.

Definice 6

(1) $\operatorname{ind}(\emptyset) = -1$.

(2) $\operatorname{ind}(X) \leq k$, *jestliže existuje báze* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_X$, *taková že pro každé* $U \in \mathcal{B}$ *je* $\operatorname{ind}(\partial U) \leq k-1$.

(3) $\operatorname{ind}(X) = k \iff \operatorname{ind}(X) \leq k$, & $\operatorname{ind}(X) \not\leq k-1$.

(4) $\operatorname{ind}(X) = \infty \iff \forall k, \operatorname{ind}(X) \not\leq k$.

Tvrzení 7 říká že pro kompaktní X platí $\operatorname{ind}(X) = 0$ právě když $\operatorname{cov}(X) = 0$. Není těžké nahlédnout, že $\operatorname{ind}(\mathbf{R}^n) \leq n$, opačná nerovnost je však opět netriviální. Obecně platí $\operatorname{ind}(X) = \operatorname{cov}(X)$ v každém separabilním prostoru (viz Engelking [4]).

2.4 Hausdorffova metrika

Připomeňme že ε-okolí podmnožiny Y metrického prostoru X je

$$B_\varepsilon(Y) = \{x \in X : \ d(x, Y) < \varepsilon\},$$

kde $d(x, Y) = \inf\{d(x, y) : \ y \in Y\}$ je vzdálenost bodu x od množiny Y. Kromě vzdálenosti $d(Y, Z)$ dvou podmnožin prostoru X definujeme jejich Hausdorffovu vzdálenost předpisem

$$D(Y, Z) = \inf\{\varepsilon > 0 : \ Y \subseteq B_\varepsilon(Z), Z \subseteq B_\varepsilon(Y)\}.$$

Na množině všech podmnožin metrického prostoru však D nemá vlastnosti metriky. Například v prostoru $\mathbf{R}$ je $D(\{0\}, [0, \infty)) = \infty$, $D((0, 1), [0, 1]) = 0$. To nenastává pro kompaktní podmnožiny:

Věta 17 *Na množině $\mathcal{K}(X)$ všech neprázdných kompaktních podmnožin metrického prostoru X je D metrika.*

Důkaz: Nechť $Y, Z \in \mathcal{K}(X)$. Protože $Y \cup Z$ je kompaktní, existuje $r > 0$ a $x \in X$ takové, že $Y \cup Z \subseteq B_r(x)$ a $0 \leq D(Y, Z) < 2r < \infty$. Je-li $D(Y, Z) = 0$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ je $Y \subseteq B_\varepsilon(Z)$, takže $Y \subseteq \overline{Z} = Z$ a podobně $Z \subseteq Y$, takže $Y = Z$. Z definice plyne $D(Y, Z) = D(Z, Y)$. Zbývá trojúhelníková nerovnost. Nechť $Y, Z, W \in \mathcal{K}(X)$ a $\varepsilon > 0$. Pro každé $y \in Y$ existuje $z \in Z$ takové že $d(y, z) < D(Y, Z) + \varepsilon$ a podobně existuje $w \in W$, pro které $d(z, w) < D(Z, W) + \varepsilon$, takže

$$d(y, w) \leq D(Y, Z) + D(Z, W) + 2\varepsilon$$

Odtud $Y \subseteq B_{D(Y,Z)+D(Z,W)}(W)$ a podobně $W \subseteq B_{D(Y,Z)+D(Z,W)}(X)$, takže $D(Y, W) \leq D(Y, Z) + D(Z, W)$. $\square$

Prostor $\mathcal{K}(X)$ je nadprostorem prostoru X, tj. prostor X je isometricky vnořen do $\mathcal{K}(X)$. Přesněji řečeno, zobrazení $\phi : X \longrightarrow \mathcal{K}(X)$, definované předpisem $\phi(x) = \{x\}$ je isometrie X na $\mathcal{K}_1(X)$, kde $\mathcal{K}_1(X) = \{\{x\}, x \in X\}$ je množina všech jednoprvkových podmnožin X. Navíc $\mathcal{K}_1(X)$ je uzavřená v $\mathcal{K}(X)$. Přímo z definice se dá totiž dokázat, že jednoprvkové množiny konvergují jedině k jednoprvkové množině.

Prostor $\mathcal{K}(\mathbf{I})$ je příklad nekonečně-dimenzionálního prostoru. Pro každé $n \geq 1$ existují vnoření $f_n : \mathbf{I}^n \to \mathcal{K}(\mathbf{I})$

$$f_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \{\tfrac{x_0}{2n}, \tfrac{x_1+2}{2n}, \ldots, \tfrac{x_{n-1}+2n-2}{2n}\},$$

takže $\operatorname{cov}(\mathcal{K}(\mathbf{I})) \geq \operatorname{cov}(f_n(\mathbf{I})) = n$ a $\operatorname{cov}(\mathcal{K}(\mathbf{I}) = \infty$. Konvergenci množin v prostoru $\mathcal{K}(X)$ lze někdy charakterizovat jiným způsobem.

Definice 7 *Posloupnost funkcí $(f_n : X \to Y)_{n\geq 0}$ konverguje stejnoměrně k funkci $f : X \to Y$, jestliže*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n, \forall m \geq n, \forall x \in X, d_Y(f_m(x), f(x)) < \varepsilon$$

Tvrzení 18 *Stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce.*

Pro $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ existuje n takové, že pro všechna $m \geq n$ a všechna y je $d(f_m(y), f(y)) < \varepsilon/3$. Protože f_n je spojitá, existuje $\delta > 0$ takové, že pro $d(y,x) < \delta$ je $d(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon/3$. Odtud

$$d(f(y), f(x)) < d(f(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon. \quad \square$$

Tvrzení 19 *Nechť X je kompaktní a nechť $f_n : X \to Y$ jsou spojité funkce, které stejnoměrně konvergují k $f : X \to Y$. Pak $\lim_{n\to\infty} f_n(X) = f(X)$ v $\mathcal{K}(Y)$.*

Důkaz: Protože f_n i f jsou spojité, je $f_n(X), f(X) \in \mathcal{K}(Y)$. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n takové, že pro všechna $m \geq n$ a $x \in X$ je $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ a tedy $D(f_m(X), f(X)) < \varepsilon$. $\square$

Tvrzení 20 *Nechť $Y_{n+1} \subseteq Y_n \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = \bigcap\limits_{n\geq 0} Y_n \in \mathcal{K}(X)$.*

Důkaz: Podle Tvrzení 3 je $Y = \bigcap_{n\geq 0} Y_n \in \mathcal{K}(X)$. Pro $\varepsilon > 0$ je zřejmě $Y \subseteq B_\varepsilon(Y_n)$. Předpokládejme sporem že pro každé k existuje $n > k$, pro které $Y_n \not\subseteq B_\varepsilon(Y)$, takže existuje $y_n \in Y_n$, pro které $d(y_n, Y) \geq \varepsilon$. Pak existuje limita vybrané posloupnosti $\lim_{j\to\infty} y_{n_j} = y \in Y$, ale $d(y, Y) \geq \varepsilon$, a to je spor. Existuje tedy k takové, že pro všechna $n \geq k$ je $D(Y_n, Y) < \varepsilon$. $\square$

Tvrzení 21 *Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = Y$ pak $Y = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} Y_k}$*

Důkaz: Pro každé $y \in Y$, $\varepsilon > 0$ a každé n existuje $k \geq n$, pro které $B_\varepsilon(y) \cap Y_k \neq \emptyset$, takže $y \in \overline{\bigcup_{k\geq n} Y_n}$ a $Y \subseteq \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} Y_k}$. Naopak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n takové, že pro všechna $k \geq n$ je $Y_k \subseteq B_\varepsilon(Y)$, takže $\overline{\bigcup_{k\geq n} Y_k} \subseteq \overline{B_\varepsilon(Y)}$, a $\bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} Y_k} \subseteq \overline{B_\varepsilon(Y)}$. Přechodem k limitě dostaneme $\bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} Y_k} \subseteq Y$. $\square$

Věta 22 *Je-li X úplný, je $\mathcal{K}(X)$ úplný.*

Důkaz: Nechť $(Y_n)_{n\geq 0}$ je cauchyovská posloupnost v $\mathcal{K}(X)$ a položme

$$Y = \{y \in X : \exists y_k \in Y_k, \lim_{k\to\infty} y_k = y\}.$$

Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$. Podle předpokladu pro každé $\varepsilon > 0$ existuje p takové, že

$$\forall n, m \geq p, D(Y_n, Y_m) < \varepsilon/2.$$

Nechť $n \geq p$. Ukážeme že $D(Y_n, Y) < \varepsilon$. Pro každé $y \in Y$ existuje $m \geq p$ a $y_m \in Y_m$ takové, že $d(y_m, y) < \varepsilon/2$. Protože $D(Y_m, Y_n) < \varepsilon/2$, existuje $z \in Y_n$ pro které $d(y_m, z) < \varepsilon/2$, takže $d(y,z) \leq d(y, y_m) + d(y_m, z) < \varepsilon$ a $Y \subseteq B_\varepsilon(Y_n)$. Naopak nechť $y \in Y_n$. Existuje posloupnost $n = k_1 < k_2 < \cdots$ taková, že

$$m \geq k_j \implies D(Y_{k_j}, Y_m) < 2^{-j}\varepsilon.$$

Sestrojme posloupnost $(y_l)_{l\geq n}$ tak, že $y_n = y$ a

$$k_j < l \leq k_{j+1} \implies d(y_{k_j}, y_l) < 2^{-j}\varepsilon.$$

Pak $(y_l)_{l\geq n}$ je cauchyovská a existuje limita $z = \lim_{k\to\infty} y_k$, která náleží do Y a platí

$$d(y,z) \leq d(y_{k_1}, y_{k_2}) + d(y_{k_2}, y_{k_3}) + \cdots < \varepsilon$$

Odtud $Y_n \subseteq B_\varepsilon(Y)$, takže $Y \neq \emptyset$, a $D(Y_n,Y) < \varepsilon$. Je tedy $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$, ale zbývá ještě ukázat, že Y je kompaktní. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n takové, že $D(Y_n,Y) < \varepsilon/3$. V množině Y_n existuje $(\varepsilon/3)$-síť $K = \{z_1,\dots,z_m\} \subset Y_n$, tj. každý bod Y_n je od K vzdálen méně než $\varepsilon/3$. Pro každé z_i existuje $y_i \in Y$, pro které $d(y_i,z_i) < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak $\{y_1,\dots,y_m\} \subseteq Y$ je ε-síť v Y: Pro každé $y \in Y$ existuje $z \in Y_n$, pro které $d(y,z) < \varepsilon/3$ a existuje i pro které $d(z,z_i) < \varepsilon/3$, takže

$$d(y,y_i) < d(y,z) + d(z,z_i) + d(z_i,y_i) < \varepsilon$$

Množina Y je tedy totálně omezená. Ukážeme, že Y je uzavřená. Pro $y \in \overline{Y}$ a $k > 0$ existuje $z_k \in Y$ takové, že $d(z_k,y) < 2^{-k}$. Pro každé z_k existuje $y_k \in Y_k$, pro které $d(y_k,z_k) < D(Y_k,Y) + 2^{-k}$ a

$$d(y_k,y) < d(y_k,z_k) + d(z_k,y) < D(Y_k,Y) + 2^{-k+1}.$$

Je tedy $\lim_{k\to\infty} y_k = y \in Y$, takže Y je uzavřená a podle Věty 2 je kompaktní. $\square$

Věta 23 *Je-li X kompaktní, je $\mathcal{K}(X)$ kompaktní.*

Důkaz: Protože X je úplný, je $\mathcal{K}(X)$ úplný. Protože X je totálně omezený, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje ε-síť $K_\varepsilon \subseteq X$. Nechť $L_\varepsilon \subseteq \mathcal{K}(X)$ je množina všech neprázdných podmnožin K_ε. Pak L_ε je ε-síť v $\mathcal{K}(X)$, takže $\mathcal{K}(X)$ je totálně omezený a tedy kompaktní. $\square$

2.5 Kontraktivní systémy

Pro zobrazení $f : X \to Y$ mezi metrickými prostory položme

$$\begin{aligned} r_f &= \inf\left\{\frac{d(f(x_0),f(x_1))}{d(x_0,x_1)} : x_0,x_1 \in X, x_0 \neq x_1\right\}, \\ R_f &= \sup\left\{\frac{d(f(x_0),f(x_1))}{d(x_0,x_1)} : x_0,x_1 \in X, x_0 \neq x_1\right\}. \end{aligned}$$

Pro každé $x_0,x_1 \in X$ tedy platí $r_f d(x_0,x_1) \le d(f(x_0),f(x_1)) \le R_f d(x_0,x_1)$.

Definice 8 *Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení.*

(1) f má omezené zvětšení (f je lipschitzovská), pokud $R_f < \infty$.

(2) f je kontrakce pokud $R_f < 1$.

(3) f má omezené zmenšení pokud $r_f > 0$.

(4) f je podobnost pokud $r_f = R_f$

Věta 24 *Je-li $f : X \to X$ kontrakce a X je úplný, existuje jediný pevný bod $f(x) = x$ a $\forall y \in X, \lim_{k\to\infty} f^k(y) = x$.*

Důkaz: Zvolme $x_0 \in X$ libovolně a definujme indukcí $x_n = f(x_{n-1})$. Pak

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+p}) &\le d(x_n,x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \\ &\le d(x_0,x_1)R_f^n(1 + \cdots + R_f^{p-1}) \le d(x_0,x_1)R_f^n/(1-R_f) \end{aligned}$$

Posloupnost $(x_n)_{n\ge 0}$ je tedy cauchyovská a má limitu x, která je jediný pevný bod. $\square$

Definice 9 *Kontraktivní systém je konečný systém kontrakcí*

$$\mathbf{f} = \{f_a : X \to X\}_{a \in A}.$$

Značíme $r_a = r_{f_a}$, $R_a = R_{f_a}$, $r_\mathbf{f} = \min_a r_a$, $R_\mathbf{f} = \max_a R_a < 1$. Na A se díváme jako na abecedu, tj. konečnou množinu alespoň dvou písmen. Označme A^* množinu konečných slov nad A, a $A^\mathbf{N}$ množinu nekonečných slov $u = u_0 u_1 u_2 \ldots$ abecedy A. Značíme $u_{[0,n)} = u_0 \cdots u_{n-1}$ je počáteční úsek (prefix) u délky n. Je-li u prefix v, píšeme $u \sqsubseteq v$. Pro konečné slovo $u = u_0 \ldots u_{n-1} \in A^*$ je $f_u = f_{u_0} \circ \cdots \circ f_{u_{n-1}}$ kontrakce a $R_u = R_{f_u} \leq R_{u_1} \cdots R_{u_{n-1}}$.

Věta 25 *Je-li X úplný a $\mathbf{f} = (f_a : X \to X)_{a \in A}$ je kontraktivní systém, pak existuje jediná neprázdná kompaktní množina (atraktor) $\mathcal{A}_\mathbf{f} \subseteq X$, taková že*

$$\mathcal{A}_\mathbf{f} = \bigcup_{a \in A} f_a(\mathcal{A}_\mathbf{f}).$$

Důkaz: Pro kompaktní množinu $W \subseteq X$ položme $F(W) = \bigcup_{a \in A} f_a(W)$. Ukážeme, že $F : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ je kontrakce. Nechť $D(W,V) < q$. Pro $x \in F(W)$ existuje $a \in A$ a $w \in W$ takové, že $x = f_a(w)$. Protože $D(W,V) < q$, existuje $v \in V$, pro které $d(v,w) < q$. Pro $y = f_a(v)$ je $d(x,y) < R_\mathbf{f} \cdot q$, takže $D(F(W), F(V)) < R_\mathbf{f} D(W,V)$. Podle Věty 24 má F jediný pevný bod. $\square$

Cantorova množina je atraktor kontraktivního systému $\mathbf{f}$ na binární abecedě, kde $f_0(x) = x/3$ a $f_1(x) = (x+2)/3$. Sierpińského množina je atraktor kontraktivního systému

$$f_0(x,y) = (\tfrac{x}{2}, \tfrac{y}{2}), \quad f_1(x,y) = (\tfrac{x+1}{2}, \tfrac{y}{2}), \quad f_2(x,y) = (\tfrac{2x+1}{4}, \tfrac{y+1}{2})$$

Dvoudrak je atraktor kontraktivního systému

$$f_0(z) = z/(1+i), \quad f_1(z) = (z+1)/(1+i).$$

Atraktor kontraktivního systému lze počítačově znázornit tak že zvolíme libovolný počáteční bod $z_0 \in X$ a postupně aplikujeme zobrazení f_a v náhodném pořadí, tj. sestrojujeme posloupnost bodů

$$z_n = f_{v_n}(z_{n-1}) = f_{v_n} f_{v_{n-1}} \cdots f_{v_0}(z_0)$$

Protože $z_n \in F^n(\{z_0\})$, konverguje tato posloupnost k atraktoru $\mathcal{A}_\mathbf{f}$, obvykle však nekonverguje k žádnému bodu. Každý bod atraktoru lze však vyjádřit jako limitu iterací $f_{u_0} f_{u_1} \cdots f_{u_n}(x_0)$ libovolného počátečního bodu x_0, pořadí písmen u_i je však třeba obrátit.

Věta 26 *Nechť $\mathbf{f} = (f_a : X \to X)_{a \in A}$ je kontraktivní systém na úplném prostoru X a $z \in X$. Pak*

$$x \in \mathcal{A}_\mathbf{f} \iff \exists u \in A^\mathbf{N}, x = \lim_{n \to \infty} f_{u_{[0,n)}}(z)$$

Tato limita nezávisí na z.

Důkaz: $f_{u_{[0,n)}}(z) \in F^n(\{z\})$ je cauchyovská posloupnost, její limita tedy existuje a náleží do $\mathcal{A}_\mathbf{f}$. Je-li $z_0, z_1 \in X$, je $d(f_{u_{[0,n)}}(z_0), f_{u_{[0,n)}}(z_1)) \leq R_\mathbf{f}^n$, takže

$$\lim_{n \to \infty} f_{u_{[0,n)}}(z_0) = \lim_{n \to \infty} f_{u_{[0,n)}}(z_1)$$

Je-li $x_0 \in \mathcal{A}_\mathbf{f}$ existuje $u_0 \in A$ a $x_1 \in \mathcal{A}_\mathbf{f}$ tak že $x_0 = f_{u_0}(x_1)$. Indukcí sestrojíme posloupnost $x_i \in \mathcal{A}_\mathbf{f}$ a $u \in A^\mathbf{N}$ tak že $x_i = f_{u_i}(x_{i+1})$. Pro libovolné $z \in X$ je nyní

$$d(f_{u_{[0,n)}}(x_n), f_{u_{[0,n)}}(z)) \leq R_\mathbf{f}^n d(x_n, z) \leq R_\mathbf{f}^n D(\mathcal{A}_\mathbf{f}, \{z\}),$$

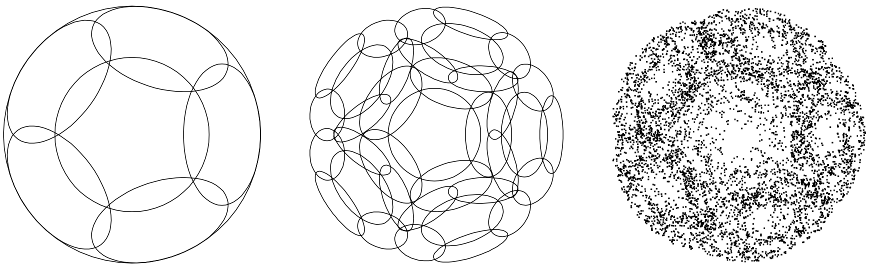
takže $x_0 = \lim_{n \to \infty} f_{u_{[0,n)}}(x_n) = \lim_{n \to \infty} f_{u_{[0,n)}}(z)$. $\square$

Věta 27 (Věta o koláži) *Nechť* $\mathbf{f} = (f_a : X \to X)_{a \in A}$ *je kontraktivní systém na úplném prostoru* X *a* $Z \in \mathcal{K}(X)$. *Pak*

$$D(Z, F(Z)) < \varepsilon \implies D(Z, \mathcal{A}_\mathbf{f}) < \varepsilon/(1 - R_\mathbf{f}).$$

Důkaz: $D(F^k(Z), F^{k+1}(Z)) < \varepsilon \cdot R_\mathbf{f}^k$, takže

$$D(Z, F^k(Z)) < \varepsilon(1 + \cdots + R_\mathbf{f}^{k-1}) < \varepsilon/(1 - R_\mathbf{f}). \ \square$$



Obrázek 30: Kruh

Věta o koláži dává návod jak aproximovat atraktorem danou množinu tak, že nalezneme její rozklad na menší množiny, které lze získat její kontrakcí. Například kruh lze přibližně vyjádřit jako sjednocení menšího kruhu a pěti elips na Obrázku 30 vlevo a aproximovat tak atraktorem kontraktivního systému v komplexní rovině

$$f_m(z) = cz, \ \ f_k(x + iy) = (ax + iby)e^{2\pi ki/m} + (1 - a)(x + iy), \ \ k < m$$

Zde $a = 0.3$, $b = 0.55$, $c = 0.6$ a $m = 5$. Na Obrázku 30 uprostřed jsou vykresleny všechny druhé iterace jednotkové kružnice a vlevo je jsou iterace náhodného bodu. Všimněme si, že tyto iterace nepokrývají kruh rovnoměrně. To je způsobeno jednak tím, že se obrazy kruhu překrývají a jednak tím, že mají různý plošný obsah. Při výpočtu dimenze uvidíme, že pro dosažení rovnoměrnějšího vyplnění atraktoru je třeba volit jednotlivá zobrazení nikoliv se stejnou pravděpodobností. Je-li fraktální množina vytvořena substitucí, lze z této substituce přímo určit kontraktivní systém, který ji vytváří. Například strom na Obrázku 17 vytvořený substitucí $f \to f[1f]f[0f]f$ je atraktor kontraktivního systému

$$f_0(z) = \frac{z}{3}, \ f_1(z) = \frac{ze^{-i\varphi} + i}{3}, \ f_2(z) = \frac{z + i}{3}, \ f_3(z) = \frac{ze^{i\varphi} + 2i}{3}, \ f_4(z) = \frac{z + 2i}{3}.$$

Strom na Obrázku 31 vpravo je atraktor kontraktivního systému

$$\begin{aligned} f_0(z) &= zqe^{-i\varphi} + 1 - r, & f_1(z) &= -\bar{z}qre^{i\varphi} + 1 - r^2, \\ f_2(z) &= rz + 1 - r^2, & f_3(z) &= i \cdot (1 - r^2)\Im(z) \end{aligned}$$

kde $q = 0.3$, $r = 0.9$, $\varphi = 40°$ a $\Im(z)$ je imaginární část komplexního čísla z. Na obrázku 31 vlevo jsou první iterace elipsy, která celý útvar obsahuje, dále jsou pak její druhé a třetí iterace. Zatímco f_0, f_1 a f_2 jsou podobnosti, f_3 podobnost není. Protože $f_3(\mathcal{A}_\mathbf{f})$ je úsečka, lze atraktor $\mathcal{A}_\mathbf{f}$ vytvořit jednodušeji tak že k iteracím tuto úsečku stále přidáváme:

Věta 28 *Pro kontraktivní systém* $\mathbf{f} : X \to X$ *a* $Z \in \mathcal{K}(X)$ *existuje jediná množina* $\mathcal{A}(\mathbf{f}, Z)$ *pro kterou platí*

$$\mathcal{A}(\mathbf{f}, Z) = Z \cup \bigcup_{a \in A} f_a(\mathcal{A}(\mathbf{f}, Z))$$

Důkaz: definujme operaci $F(Y) = Z \cup \bigcup_{a \in A} f_a(Y)$. Pak $F : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ je kontrakce a má jediný pevný bod. $\square$

Obrázek 31: Strom

3 Hausdorffova míra a dimenze

3.1 Míry a vnější míry

Definice 10 *Systém $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ podmnožin množiny X se nazývá σ-algebra, pokud platí*

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(2) $Y \in \mathcal{A} \implies X \setminus Y \in \mathcal{A}$,

(3) $\forall i \in \mathbf{N}, Y_i \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i \in \mathcal{A}$.

Funkce $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ je míra, pokud $\mu(\emptyset) = 0$ a $\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(Y_i)$ pro každou posloupnost po dvou disjunktních množin $Y_i \in \mathcal{A}$. Říkáme že μ je pravděpodobnostní míra, pokud $\mu(X) = 1$.

Každá σ-algebra je také uzavřená na spočetné průniky. Míra množiny může být také ∞ a pak je v součtech $a + \infty = \infty$. Míra je monotónní, tj. pro $Y \subseteq Z$ platí $\mu(Y) \leq \mu(Z)$.

Tvrzení 29 *Jsou-li $Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \cdots$ a $Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq \cdots$ posloupnosti množin z $\mathcal{A}$ a $\mu(X) \leq \infty$, pak*

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(Y_i), \quad \mu\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} Z_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(Z_i).$$

Důkaz: (1) Pro $i > 0$ položme $C_i = Y_i \setminus Y_{i-1}$. Pak $Y_0, C_1, C_2 \ldots$ jsou po dvou disjunktní a

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i\right) &= \mu(Y_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) = \lim_{k\to\infty}\left(\mu(Y_0) + \sum_{i=1}^{k} \mu(C_i)\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(Y_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(Y_k)
\end{aligned}$$

Důkaz pro průnik je duální. □

Míra se často sestrojuje pomocí vnější míry. Ta je definována na množině $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin dané množiny X, ale podmínka aditivity je oslabena na subaditivitu:

Definice 11 *Funkce $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ je vnější míra na X pokud platí*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(2) $\mu(Y) \leq \mu(Z)$ *pro* $Y \subseteq Z$,

(3) $\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(Y_i)$ *pro každou posloupnost množin* $Y_i \in \mathcal{P}(X)$.

Systém μ-měřitelných množin $\mathcal{A}_\mu \subseteq \mathcal{P}(X)$ je

$$\mathcal{A}_\mu = \{Y \subseteq X : \forall W \subseteq X, \mu(W) = \mu(W \cap Y) + \mu(W \setminus Y)\}.$$

Věta 30 *Je-li $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ vnější míra, pak $\mathcal{A}_\mu$ je σ-algebra a μ je míra na $\mathcal{A}_\mu$. Je-li $\mu(Y) = 0$, je $Y \in \mathcal{A}_\mu$.*

Důkaz: Zřejmě $\emptyset \in \mathcal{A}_\mu$ a ze symetrie podmínky měřitelnosti plyne $Y \in \mathcal{A}_\mu$ právě když $X \setminus Y \in \mathcal{A}_\mu$. Pro důkaz σ-aditivity předpokládejme, že $Y_i \in \mathcal{A}_\mu$ a $W \subseteq X$. Pak

$$\begin{aligned}
\mu(W) &= \mu(W \cap Y_0) + \mu(W \setminus Y_0) \\
&= \mu(W \cap Y_0) + \mu((W \setminus Y_0) \cap Y_1) + \mu(W \setminus (Y_0 \cup Y_1)) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{k} \mu\left(\left(W \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} Y_i\right) \cap Y_j\right) + \mu\left(W \setminus \bigcup_{j=1}^{k} Y_j\right) \\
&\geq \mu\left(W \cap \bigcup_{j=1}^{k} Y_j\right) + \mu\left(W \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j\right).
\end{aligned}
$$

Limitním přechodem $k \to \infty$ dostaneme podle Tvrzení 29

$$
\mu(W) \geq \mu\left(W \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j\right) + \mu\left(W \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j\right) \geq \mu(W)
$$

takže $\bigcup_{j=0}^{\infty} W_i \in \mathcal{A}_\mu$ a tedy $\mathcal{A}_\mu$ je σ-algebra. Položíme-li $W = \bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i$, dostáváme podobným způsobem

$$
\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i\right) = \sum_{i=0}^{k} \mu(Y_i) + \mu\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} Y_i\right) \geq \sum_{i=0}^{k} \mu(Y_i)
$$

a limitním přechodem $\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i\right) \geq \sum_{i=0}^{k} \mu(Y_i)$, takže μ je míra na $\mathcal{A}_\mu$. $\square$

3.2 Borelovské míry

Borelovská σ-algebra metrického prostoru (X, d) je nejmenší σ-algebra $\mathcal{B}_X$, která obsahuje všechny otevřené množiny. Tato definice je korektní, protože průnik libovolného systému σ-algeber na X je opět σ-algebra. Je tedy

$$
\mathcal{B}_X = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{U}_X \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X),\ \ \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra na } X\}.
$$

Protože $\mathcal{B}_X$ je uzavřená na doplňky, obsahuje také všechny uzavřené množiny, spočetná sjednocení uzavřených množin, spočetné průniky otevřených množin, atd. Například polootevřený interval $[0, 1) = \bigcup_{n>0} (\frac{1}{n}, 1)$ je borelovská množina, která není ani otevřená ani uzavřená. Při konstrukci míry na metrickém prostoru je přirozené požadovat, aby každá borelovská množina byla měřitelná. Takové míry se nazývají borelovské a lze je sestrojit z metrických vnějších měr:

Definice 12 *Metrická vnější míra $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ na metrickém prostoru (X, d) je vnější míra taková, že pro každé dvě množiny $Y, Z \subseteq X$, pro které $d(Y, Z) > 0$, platí $\mu(Y \cup Z) = \mu(Y) + \mu(Z)$.*

Lemma 31 (Carathéodoryho lemma) *Nechť μ je metrická vnější míra na metrickém prostoru X, nechť $Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \cdots$ je rostoucí posloupnost podmnožin X a $Y = \bigcup_{n \geq 0} Y_n$ jejich sjednocení. Pokud $d(Y_j, Y \setminus Y_{j+1}) > 0$, pak $\mu(Y) = \lim_{n\to\infty} \mu(Y_n)$.*

Důkaz: Stačí dokázat $\mu(Y) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(Y_n)$, protože opačná nerovnost ihned plyne z vlastností vnější míry. Položme $Z_0 = Y_0$ a $Z_j = Y_j \setminus Y_{j-1}$ pro $j > 0$. Pokud $j + 2 \leq i$, pak $Z_j \subseteq Y_j$ a $Z_i \subseteq Y \setminus Y_{i-1} \subseteq Y \setminus Y_{j+1}$ takže $d(Z_j, Z_i) > 0$, anebo je alespon jedna z množin prázdná. Podle předpokladu

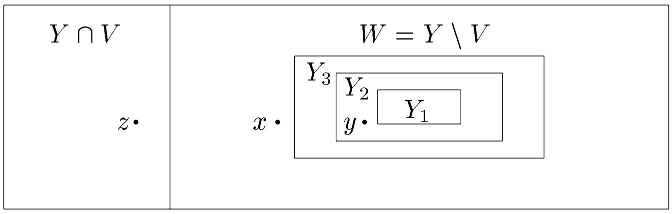
$$
\mu\left(\bigcup_{k=0}^{m} Z_{2k}\right) = \sum_{k=0}^{m} \mu(Z_{2k}), \quad \mu\left(\bigcup_{k=0}^{m} Z_{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{m} \mu(Z_{2k+1}).
$$

Pokud alespoň jeden z těchto součtů diverguje, je $\lim_{n\to\infty} \mu(Y_n) = \infty$, protože obě množiny $\bigcup_{k=0}^{m} Z_{2k}$ a $\bigcup_{k=0}^{m} Z_{2k+1}$ jsou obsaženy v Y_{2m+1}, takže požadovaná nerovnost $\mu(Y) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(Y_n)$

platí. Předpokládejme tedy že oba součty konvergují, takže $\lim_{j\to\infty}\sum_{k=j+1}^{\infty}\mu(Z_k)=0$. Pro každé $j\geq 0$ platí

$$\mu(Y)=\mu\left(Y_j\cup\bigcup_{k=j+1}^{\infty}Z_k\right)\leq\mu(Y_j)+\sum_{k=j+1}^{\infty}\mu(Z_k).$$

Přechodem k limitě dostáváme požadovanou nerovnost. □



Obrázek 32: Borelovské míry

Věta 32 *Je-li $\mu:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty]$ metrická vnější míra, jsou všechny borelovské množiny měřitelné, tj. $\mathcal{B}_X\subseteq\mathcal{A}_\mu$.* Var*Říkáme že μ je borelovská míra.*

Důkaz: Protože $\mathcal{A}_\mu$ je uzavřená na doplňky a spočetná sjednocení, stačí ukázat $\mathcal{F}_X\subseteq\mathcal{A}_\mu$ tj. pro každou $Y\subseteq X$ a $V\in\mathcal{F}_X$ platí $\mu(Y)\geq\mu(Y\cap V)+\mu(Y\setminus V)$. Pro $j>0$ položme

$$Y_j=\{x\in W:\ d(x,V)\geq 1/j\},\ \text{ kde }\ W=Y\setminus V.$$

Protože V je uzavřená, je $W=\bigcup_{j>0}Y_j$. Ukážeme, že $d(Y_j,W\setminus Y_{j+1})>0$. Je-li $x\in W\setminus Y_{j+1}$, existuje $z\in V$, pro které $d(x,z)<1/(j+1)$, takže pro $y\in Y_j$ je

$$d(x,y)\geq d(y,z)-d(x,z)\geq 1/j-1/(j+1),$$

takže $d(Y_j,W\setminus Y_{j+1})\geq 1/j(j+1)$. Z Lemma 31 nyní plyne $\mu(W)=\lim_{j\to\infty}\mu(Y_j)$. Protože $d(Y\cap V,Y_j)\geq 1/j$,

$$\mu(Y\cap V)+\mu(Y_j)=\mu((Y\cap V)\cup Y_j)\leq\mu(Y)$$

a pro $j\to\infty$ dostáváme

$$\mu(Y\cap V)+\mu(W)=\mu(Y\cap V)+\lim_{j\to\infty}\mu(Y_j)\leq\mu(Y).\ \square$$

3.3 Hausdorffova míra a dimenze

Definice 13 *Nechť X je metrický prostor. Pro $s\geq 0$, $\varepsilon>0$ a $Y\subset X$ položme*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\varepsilon(Y) &= \inf\left\{\sum_{i=0}^{\infty}|U_i|^s:\ Y\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty}U_i,|U_i|\leq\varepsilon\right\}\\ \mathcal{H}^s(Y) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{H}^s_\varepsilon(Y)=\sup_{\varepsilon>0}\mathcal{H}^s_\varepsilon(Y)\end{aligned}$$

$\mathcal{H}^s$ nazýváme Hausdorffovou s-dimenzionální mírou.

Ve vzorci pro $\mathcal{H}^s_\varepsilon$ se bere infinum přes všechna spočetná pokrytí $\mathcal{U}$ množiny Y jejichž průměr je nejvýše ε. Průměr množiny U je $|U|=\sup\{d(x,y):\ x,y\in U\}$.

Tvrzení 33

(1) Pro každé $s \geq 0$ a $\varepsilon > 0$ je $\mathcal{H}^s_\varepsilon : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ vnější míra.

(2) Pro každé $s \geq 0$ je $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ metrická vnější míra.

Důkaz: (1) plyne přímo z definice a přechodem k limitě dostáváme že $\mathcal{H}^s$ je vnější míra. Předpokládejme že $Y, Z \subseteq X$ a $d(Y, Z) > 2\varepsilon$. Je-li $\mathcal{U}$ pokrytí Y a $\mathcal{V}$ pokrytí Z jejichž průměr je nejvýše ε, pak $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, takže $\mathcal{H}^s_\varepsilon(Y \cup Z) = \mathcal{H}^s_\varepsilon(Y) + \mathcal{H}^s_\varepsilon(Z)$. Přechodem k limitě dostáváme $\mathcal{H}^s(Y \cup Z) = \mathcal{H}^s(Y) + \mathcal{H}^s(Z)$. $\square$

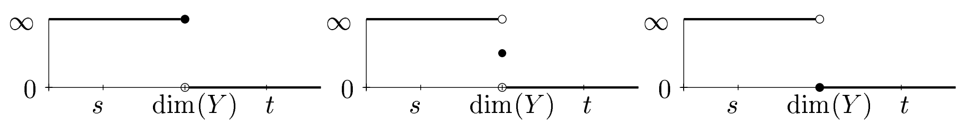
Pro $s = 0$ je $\mathcal{H}^0(Y) = \#(Y)$ počet prvků, pokud Y je konečná a $\mathcal{H}^0(Y) = \infty$ jinak.

Tvrzení 34 *Nechť $Y \subseteq X$ a $0 \leq s < t$. Pak*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(Y) < \infty &\implies \mathcal{H}^t(Y) = 0 \\ \mathcal{H}^t(Y) > 0 &\implies \mathcal{H}^s(Y) = \infty \end{aligned}$$

Důkaz: Pro pokrytí $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, \ldots\}$ průměru $\varepsilon > 0$ platí $|U_i|^t \leq \varepsilon^{t-s}|U_i|^s$, takže $\mathcal{H}^t_\varepsilon(Y) \leq \varepsilon^{t-s}\mathcal{H}^s_\varepsilon(Y)$. Limitou tohoto vztahu dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(Y) < \infty &\Rightarrow \mathcal{H}^t(Y) \leq 0 \cdot \mathcal{H}^s(Y) = 0 \\ \mathcal{H}^t(Y) > 0 &\Rightarrow \mathcal{H}^s(Y) \geq \infty \cdot \mathcal{H}^t(Y) = \infty \ \square \end{aligned}$$



Obrázek 33: Hausdorffova dimenze

Definice 14 *Hausdorffova dimenze množiny $Y \subseteq X$ je*

$$\dim(Y) = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(Y) = \infty\} = \inf\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(Y) = 0\}$$

Y je s-množina, pokud $0 < \mathcal{H}^s(Y) < \infty$

Graf závislosti Hausdorffovy míry na exponentu s je na Obrázku 33. Existuje nejvýše jedno $s \in [0, \infty)$ pro které $0 < \mathcal{H}^s(Y) < \infty$ (Obrázek 33 uprostřed). Naopak však pokud $\dim(Y) = s$, může být jak $\mathcal{H}^s(Y) = \infty$ (Obrázek 33 vlevo), tak $\mathcal{H}^s(Y) = 0$ (Obrázek 33 vpravo). Například Y je 0-množina právě když je konečná a pak $\mathcal{H}^0(Y) = \#Y$ je její počet prvků. Je-li Y spočetná, je $\mathcal{H}^0(Y) = \infty$ ale $\dim(Y) = 0$. Také pro eukleidovský prostor $\mathbf{R}^n$ je $\dim(\mathbf{R}^n) = n$ ale $\mathcal{H}^n(\mathbf{R}^n) = \infty$. V Příkladu 3 sestrojíme množinu $X \subseteq \mathbf{I}$, pro kterou $\dim(X) = 1$ ale $\mathcal{H}^1(X) = 0$.

Věta 35 *Nechť $Y_i \subset X$.*

(1) Je-li $Y_0 \subseteq Y_1$, je $\dim(Y_0) \leq \dim(Y_1)$

(2) $\dim(\bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i) = \sup_{i \geq 0} \dim(Y_i)$.

Důkaz: (1) Je-li $s > \dim(Y_1)$, pak $\mathcal{H}^s(Y_0) \leq \mathcal{H}^s(Y_1) = 0$, takže $s \geq \dim(Y_0)$ a $\dim(Y_0) \leq \dim(Y_1)$.
(2) Je-li $s > \sup_{i\geq 0} \dim(Y_i)$, je $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^s(Y_i) = 0$, takže $s \geq \dim(\bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i)$ a $\dim(\bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i) \leq \sup_{i\geq 0} \dim(Y_i)$. Podle (1) platí i opačná nerovnost. $\square$

Pro $n > 0$ přirozené lze Hausdorffovu míru srovnat s Lebesgueovou mírou $\mathcal{L}^n$. Kvádr v eukleidovském prostoru $\mathbf{R}^n$ je množina tvaru

$$C = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$$

kde $a_i < b_i$. Jeho objem je $V(C) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$. Pro $Y \subseteq \mathbf{R}^n$ položme

$$\mathcal{L}^n(Y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} V(C_i) : \; Y \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i \right\}$$

kde infimum se bere přes všechna spočetná pokrytí množiny Y kvádry. Snadno se ukáže, že $\mathcal{L}^n$ je metrická vnější míra, takže $\mathcal{L}^n$ je borelovská míra na $\mathbf{R}^n$. Pro míru n-dimenzionální koule $B_{1/2}(0) \subset \mathbf{R}^n$ s průměrem 1 platí

$$c_n = \mathcal{L}^n(B_{1/2}(0)) = \pi^{n/2} 2^{-n}/(n/2)!$$

V tomto vzorci je $(1/2)! = \sqrt{\pi}/2$ (hodnota funkce Γ), takže

$$c_{2n} = \pi^n 2^{-2n}/n!, \;\; c_{2n+1} = \pi^n n!/(2n+1)!$$

speciálně $c_1 = 1$, $c_2 = \pi/4$, $c_3 = \pi/6$, $c_4 = \pi^2/8$. Vzorec lze získat integrací

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{2^n} \int_{-1}^{1} \sqrt{(1-x^2)^n} dx = \frac{c_n}{2^n} \int_0^{\pi} \sin^{n+1} t \; dt$$

V eukleidovském n-dimenzionálním prostoru platí $\mathcal{L}^n(Y) = c_n \mathcal{H}^n(Y)$ pro každou borelovskou množinu $Y \subseteq \mathbf{R}^n$. Důkaz lze nalézt ve Falconer [5]. My dokážeme slabší tvrzeni. K tomu potrebujeme ukazat, ze v definici Lebesgueovy miry se můžeme omezit na pokrytí krychlemi a to dokonce krychlemi s libovolně omezeným diametrem. Za krychli považujeme kvádr $K \subseteq \mathbf{R}^n$, ktery má délku hran $b_i - a_i$ pro všechna $i \leq n$ stejnou. U krychle, narozdíl od obecného kvádru, je potom přímý vztah mezi diametrem a objemem:

$$V(K) = (|K|/\sqrt{n})^n.$$

Proto, tato ekvivalentní definice Lebesgueovy vnejší míry bude vhodnější k odvození vztahu mezi touto mírou a mírou Hausdorfovou.

Tvrzení 36 *Bud $Y \subseteq \mathbf{R}^n$, $\epsilon > 0$, pak*

$$\mathcal{L}^n(Y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} V(K_i) : \; Y \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i \right\}$$

kde infimum se bere přes všechna spočetná pokrytí množiny Y krychlemi K_i o hrane delky nejvyse ϵ.

Důkaz: Na rozdíl od definice se ve věte omezujeme na pokrytí pouze specialními kvádry, a to krychlemi s dostatečně malou hranou. Pravá strana rovnice je tedy jiste větší nebo rovna $\mathcal{L}^n(Y)$. Zbývá dokázat opačnou nerovnost. Uvažujme kvádr $C = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$ a

$1 \geq \delta > 0$. Celou část podílu $(b_i - a_i)/\delta$ označme jako p_i a $k = (p_1+1)(p_2+1)...(p_n+1)$. Kvádr můžeme pokrýt k navzájem disjunktními krychlemi o hraně délky δ,

$$\{\prod_{j=1}^{n}[a_j + m_j\delta, a_j + (m_j+1)\delta)\}; (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbf{N}^n, \forall j \leq n, 0 \leq m_j \leq p_j\}$$

Z toho krychle pro něž $m_j < p_j$ leží uvnitř kvádru C. Tedy

$$p_1 p_2 ... p_n \delta^n \leq V(C) \leq (p_1+1)(p_2+1)...(p_n+1)\delta^n$$

Máme tedy k krychlí K_i, $i = 1, \ldots, k$, pokryvajících C, pro které platí,

$$\begin{aligned}(\sum_{i=0}^{k} V(K_i)) - V(C) &\leq (p_1+1)(p_2+1)...(p_n+1)\delta^n - p_1 p_2 ... p_n \delta^n \\ &\leq \delta^n \sum_S \prod_{i \in S} p_i\end{aligned}$$

V poslední sumě se sčítá přes všechny podmnožiny $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ mohutnosti nejvýše $n-1$. Z $p_i\delta < (b_i - a_i) < |C|$ vyplývá

$$\delta^n \prod_{i \in S} p_i \leq |C|^{\#S}\delta^{n-\#S} \leq \max(|C|^n, 1)\delta$$

a

$$\sum_{i=0}^{k} V(K_i) \leq V(C) + \delta(2^n - 1)\max(|C|^n, 1)$$

Mějme nyní $Y \subseteq \mathbf{R}^n$ a libovolné kladné $\delta < 1$. Nechť $\{C_i\}_{i=0}^{\infty}$ je takové pokrytí Y kvádry, že

$$\sum_{i=0}^{\infty} V(C_i) \leq \mathcal{L}^n(Y) + \delta$$

Jak jsme již dokázali, každý kvádr C_i můžeme pokrýt krychlemi $K_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n_i$, o hraně délky $\delta_i = 2^i\delta/\max(|C_i|^n, 1)$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{n_i} V(K_{i,j}) \leq V(C_i) + \delta_i(2^n - 1)\max(|C_i|^n, 1) = V(C_i) + 2^i\delta(2^n - 1).$$

Krychle $K_{i,j}$, $i \geq 0$, $j \leq n_i$ mají hranu délky nejvýše δ a pokrývají Y,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i} V(K_{i,j}) &\leq \sum_{i=0}^{\infty}(V(C_i) + 2^i\delta(2^n - 1)) \\ &\leq \mathcal{L}^n(Y) + \delta + 2\delta(2^n - 1)\end{aligned}$$

Jdeme-li s δ k nule, dostáváme stále jemnější pokrytí Y krychlemi, kdy součet objemu takových krychlí jde k $\mathcal{L}^n(Y)$. Takže pravá strana rovnice z dokazovaného tvrzení je menší nebo rovna $\mathcal{L}^n(Y)$. $\square$

Jednoduchým důsledkem tohoto tvrzení je také zjednodušení ekvivalentní definice Lebesgueovy míry:

$$\mathcal{L}^n(Y) = \inf\left\{\sum_{i=0}^{\infty} V(K_i) :\ Y \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i\right\}$$

kde infimum se bere přes všechna spočetná pokrytí množiny Y krychlemi K_i.

Tvrzení 37 *Pro n přirozené existují kladné realné konstanty c a C takové, že pro každé $Y \subseteq \mathbf{R}^n$ plati, $c\mathcal{L}^n(Y) \le \mathcal{H}^n(Y) \le C\mathcal{L}^n(Y)$.*

Důkaz: Nejprve si uvědomme, že každá omezená neprázdná množina $U \subseteq \mathbf{R}^n$ se dá doplnit na uzavřenou 'krychli'(nesouhlasi s naší definicí) s hranou rovnou $|U|$. Označíme-li totiž $a_i = \inf\{x_i; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U\}$, pak $U \in \prod_{i=0}^{n}[a_i, a_i + |Y|]$. My mame ovsem krychli definovanou, jakozto soucin polootevrenych intervalu, proto pouzijeme hrubsi vztah $U \in \prod_{i=0}^{n}[a_i, a_i + 2|U|)$. Tedy libovolna mnozina U je podmnozinou krychle s hranou delky $2|U|$.

Bud nyni $Y \subseteq \mathbf{R}^n$. Pro $\epsilon > 0$ existuje pokrytí Y množinami U_i, $i \ge 1$, tak, že $\sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^n \le \mathcal{H}^n(Y) + \epsilon$. Každá U_i je podmnožinou nějaké krychle K_i o hraně délky $2|U_i|$. Krychle K_i pokrývají Y a

$$\mathcal{L}^n(Y) \le \sum_{i=0}^{\infty} V(K_i) = \sum_{i=0}^{\infty} (2|Y|)^n \le 2^n(\mathcal{H}^n(Y) + \epsilon)$$

Jdeme-li s ϵ k nule dostáváme $\mathcal{L}^n(Y) \le 2^n \mathcal{H}^n(Y)$. Stačí tedy volit $C = 2^n$.

Naopak pro $Y \subseteq \mathbf{R}^n$, $\epsilon > 0$ existuje pokrytí Y krychlemi K_i, $i \ge 0$, o hraně nejvýše ϵ takové, že platí $\sum_{i=0}^{\infty} V(K_i) \le \mathcal{L}^n(Y) + \epsilon$. Jelikož $|K_i| < \epsilon\sqrt{n}$, dostáváme

$$\mathcal{H}^n_{\epsilon\sqrt{n}}(Y) \le \sum_{i=0}^{\infty} |K_i|^n = \sum_{i=0}^{\infty} V(K_i)\sqrt{n}^n \le \sqrt{n^n}(\mathcal{L}^n(Y) + \epsilon).$$

Při ϵ jdoucím k nule, dostáváme $\mathcal{H}^n(Y) \le \sqrt{n^n}\mathcal{L}^n(Y)$. Stačí tedy volit $c = 1/\sqrt{n^n}$. $\square$

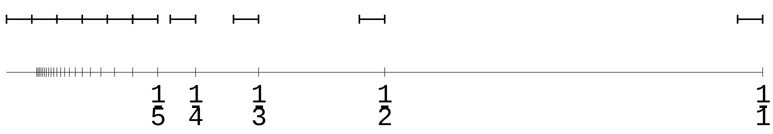
Hausdorfova dimenze se často shoduje s její kapacitou, například u kontraktivních systemů. Uvedeme ovšem příklad, kdy to neplatí. Na kompaktních prostorech platí v obecnem případě alespoň nerovnost. Pripomeňme, že kapacita prostoru X je definována vztahem $C(X) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \ln N_\varepsilon(X)/\ln(1/\varepsilon)$, kde $N_\varepsilon(X)$ je počet prvků nejmenší ε-sítě.

Věta 38 *Pro kompaktní prostor X platí* $\dim(X) \le C(X)$.

Důkaz: Je-li $\limsup_{\varepsilon \to 0} \ln N_\varepsilon / \ln(1/\varepsilon) < s$, pak pro všechna dosti malá ε platí $N_\varepsilon(X) \le \varepsilon^{-s}$ a pro ε-síť K_ε je

$$\mathcal{H}^s_{2\varepsilon}(X) \le \sum_{x \in K_\varepsilon} |B_\varepsilon(x)|^s \le N_\varepsilon(X)(2\varepsilon)^s < 2^s,$$

takže $\mathcal{H}_s(X) \le 2s$ a $\dim(X) \le s$. Je tedy $\dim(X) \le C(X)$. $\square$



Obrázek 34: Kapacita

Příklad 2 *Pro množinu $X = \{\frac{1}{n} : n > 0\}$ je $\dim(X) = 0$ a $C(X) = 1/2$.*

Důkaz: Podle Věty 35 je $\dim(X) = 0$. Pro $1/2(n+1)(n+2) \le \varepsilon < 1/2n(n+1)$ musi byt v kazde ε-ove siti body $\{1/i; 1 \le i \le n\}$, tedy $N_\varepsilon(X) \ge n$. Na druhou stranu, interval $[0, 1/(n+1)]$ se da pokryt $p+1$ intervaly delky ε, kde p je cela cast podilu $1/((n+1)\varepsilon)$.

Z kazdeho intervalu vyberme jeden prvek tvaru $1/i$. Pro tyto body potom plati, ze $B_\varepsilon(1/i)$ obsahuje prislusny interval a takto vybrane body tvori ε-ovou sit mnoziny $\{1/i; i \geq n+1\}$. Na ε-ovou sit celeho prostoru $\{1/i, i \geq 1\}$ nam tedy staci $p+1+n$ bodu. Proto

$$N_\varepsilon(X) \leq n+p+1 \leq n+1+((n+1)\varepsilon)^{-1} \leq n+1+(n+2).$$

Dokázali jsme, že pro $1/2(n+1)(n+2) \leq \varepsilon < 1/2n(n+1)$ je $n \leq N_\varepsilon(X) \leq 2n+3$. Proto

$$1/2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(2n(n+1))} \leq C(X) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2n+3)}{\ln(2(n+1)(n+2))} = 1/2$$

$\square$

Věta 39 *Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení mezi metrickými prostory*

(1) Je-li $R_f < \infty$, je $\mathcal{H}^s(f(X)) \leq R_f \mathcal{H}^s(X)$ a $\dim(X) \geq \dim(f(X))$.

(2) Je-li $r_f > 0$, je $\mathcal{H}^s(f(X)) \geq r_f \mathcal{H}^s(X)$ a $\dim(X) \leq \dim(f(X))$.

Důkaz: (1) Je-li $\mathcal{U} = (U_i)_{i\geq 0}$ pokrytí X, je $f(\mathcal{U}) = (f(U_i))_{i\geq 0}$ pokrytí $f(X)$ a $|f(U_i)| \leq R_f|U_i|$. Je-li $|\mathcal{U}| \leq \varepsilon$, je

$$\mathcal{H}^s_{\varepsilon R_f}(f(X)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} |f(U_i)|^s \leq R_f^s \sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^s$$

takže $\mathcal{H}^s_{\varepsilon R_f}(f(X)) \leq R_f^s \mathcal{H}^s_\varepsilon(X)$ a $\mathcal{H}^s(f(X)) \leq R_f^s \mathcal{H}^s(X)$. Je-li $s > \dim(X)$, je $\mathcal{H}^s(f(X)) = 0$ a tedy $s \geq \dim(f(X))$. Z toho plyne $\dim(f(X)) \leq \dim(X)$.
(2) Zobrazení f je prosté a $R_{f^{-1}} = 1/r_f$, takže použijeme-li (1) na f^{-1}, dostaneme $\mathcal{H}^s(X) \leq \mathcal{H}^s(f(X))/r_f$ a $\dim(X) \leq \dim(f(X))$. $\square$

Věta 40 *Je-li X kompaktní metrický prostor, je $\operatorname{cov}(X) \leq \dim(X)$.*

Důkaz: Položme $n = \operatorname{cov}(X)$, takže $\operatorname{cov}(X) \not\leq n-1$. Existuje otevřené pokrytí $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_n\}$ takové, že pro každé uzavřené zmenšení $\mathcal{V} = \{V_0, \ldots, V_n\}$ platí $\bigcap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Uvažujme funkci $f : X \to [0, \infty)$

$$f(x) = f_0(x) + \cdots + f_n(x), \text{ kde } f_i(x) = d(x, X \setminus U_i).$$

Tyto funkce jsou spojité, neboť

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq d(x,y), \quad d(f(x), d(y)) \leq (n+1)d(x,y)$$

Protože $\mathcal{U}$ je pokrytí, je $f(x) > 0$ pro každé $x \in X$. Protože X je kompaktní, existují $0 < a < b < \infty$ taková, že $a \leq f(x) \leq b$ pro všechna $x \in X$. Definujme funkci $h : X \to \mathbf{R}^{n+1}$ předpisem

$$h(x) = \left(\frac{f_0(x)}{f(x)}, \ldots, \frac{f_n(x)}{f(x)}\right)$$

Pak

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_i(x)}{f(x)} - \frac{f_i(y)}{f(y)}\right| &\leq \frac{f(y)|f_i(x) - f_i(y)| + f_i(y)|f(y) - f(x)|}{f(x)f(y)} \leq \frac{b(n+2)d(x,y)}{a^2} \\
|h(x) - h(y)| &\leq \frac{b(n+1)(n+2)}{a^2} d(x,y)
\end{aligned}$$

Ukážeme, že $h(X)$ obsahuje simplex $\Delta = \{t \in \mathbf{R}^{n+1} :\ t_i > 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$. Pro $(t_0, \ldots, t_n) \in \Delta$ položme $V_i = \{x \in X :\ f_i(x)/f(x) \geq t_i\}$. Pak $V_i \subseteq U_i$ a $\mathcal{V} = \{V_0, \ldots, V_n\}$ je pokrytí X protože $\sum_i f_i(x)/f(x) = 1$. Podle předpokladu je tedy $\bigcap \mathcal{V} \neq \emptyset$, takže existuje x, pro které $f_i(x)/f(x) \geq t_i$ pro každé i. Protože $\sum_i f_i(x)/f(x) = 1$, je $f_i(x)/f(x) = t_i$, takže $h(X) \supseteq \Delta$ a tedy $\dim(X) \geq \dim(h(X)) \geq \dim(\Delta)$. Staci ukazat, ze $\dim(\Delta) \geq n$. Kolma projekce do prvnich n souradnic $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_0, \ldots, x_{n-1})$ zobrazi Δ na mnozinu

$$\{(x_0, \ldots, x_{n-1}), 0 \leq x_i \leq 1, x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} < 1\}.$$

Tato mnozina ma nenulovou n-dimenzionalni Lebesgueovu miru a tedy i Hausdorfova n-dimenzionalni mira je nenulova. Dimenze teto mnoziny je tedy nejmene n. Projekce ma $R_f \leq 1$ a z Vety 39 vyplyva $\dim(\Delta) \geq n$. $\square$

Odvodíme nyní odhad pro dimenzi atraktoru kontraktivního systému závislý na jeho koeficientech R_i. Seznam čísel $\mathbf{r} = (r_a)_{a \in A}$ indexovaný konečnou abecedou A budeme nazývat seznam poměrů pokud $0 < r_a < 1$ pro všechna $a \in A$.

Tvrzení 41 *Pro seznam poměrů $\mathbf{r} = (r_a)_{a \in A}$, $0 < r_a < 1$ existuje jediné $d > 0$ pro které $\sum_{a \in A} (r_a)^d = 1$. Jsou-li $r_a = r$ konstantní, je $d = \ln \#A / \ln(1/r)$.*

Důkaz: Uvažujme reálnou funkci $h(d) = \sum_{a \in A} (r_a)^d$. Pak $h(0) = \mathrm{card}(A) > 1$, $h(\infty) = 0$ a $h'(d) = \sum_{a \in A} (\ln r_a)(r_a)^d < 0$. Existuje tedy jediné řešení $d \in (0, \infty)$ rovnice $h(d) = 0$ $\square$

Věta 42 *Nechť $\mathbf{f} = (f_a : X \to X)_{a \in A}$ je kontraktivní systém na úplném prostoru X a nechť platí $\sum_{a \in A} (R_a)^D = 1$. Pak $\mathcal{H}^D(\mathcal{A}_\mathbf{f}) < \infty$ a $\dim(\mathcal{A}_\mathbf{f}) \leq D$.*

Důkaz: Pro $u = u_0 \cdots u_{n-1} \in A^n$ označme $f_u = f_{u_0} \cdots f_{u_{n-1}}$ složené zobrazení. Pro $n > 0$ uvažujme pokrytí $\mathcal{U}_n = \{f_u(\mathcal{A}_\mathbf{f}) :\ u \in A^n\}$ atraktoru $\mathcal{A}_\mathbf{f}$. Pak $|\mathcal{U}_n| \leq \varepsilon_n = R_\mathbf{f}^n |\mathcal{A}_\mathbf{f}|$, takže

$$\mathcal{H}^D_{\varepsilon_n}(\mathcal{A}_\mathbf{f}) \leq |\mathcal{A}_\mathbf{f}|^D \sum_{u \in A^n} (R_{u_0} \cdots R_{u_{n-1}})^D = |\mathcal{A}_\mathbf{f}|^D \left(\sum_{a \in A} R_a^D \right)^n = |\mathcal{A}_\mathbf{f}|^D$$

Je tedy $\mathcal{H}^D(\mathcal{A}_\mathbf{f}) < \infty$ a $\dim(\mathcal{A}_\mathbf{f}) \leq D$. $\square$

3.4 Symbolický prostor

Symbolicke systemy slouzi v teorii fraktalu zejmena k jednodussimu popisu atraktoru kontraktivnich systemu. Kazdy takovy atraktor ma svuj symbolicky model, symbolicky prostor seznamu polomeru.

Definice 15 *Symbolický prostor seznamu poměrů $\mathbf{r} = (r_a)_{a \in A}$, $0 < r_a < 1$ je metrický prostor $(A^\mathbf{N}, d_\mathbf{r})$, kde*

$$d_\mathbf{r}(x, y) = r_{x_0} \cdots r_{x_{n-1}} \iff x_{[0,n)} = y_{[0,n)},\ x_n \neq y_n$$

Zřejmě $d_\mathbf{r}(x, y) = 0$ právě když $x = y$ a $d_\mathbf{r}$ je symetrická. Předpokládejme že $d(y, z) \leq d(x, y) = r_{x_0} \cdots r_{x_{n-1}}$. Pak $x_{[0,n)} = y_{[0,n)} = z_{[0,n)}$ a

$$d(x, z) \leq r_{x_0} \cdots r_{x_{n-1}} = \max\{d(x, y), d(y, z)\} \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Trojúhelníková nerovnost tedy platí v silnější formě, s maximem místo součtu. Takové metrice se říká ultrametrika.

Zatimco tyto prostory maji ruzne geometricke vlastnosti, z topologickeho hlediska jsou si vsechny rovny, tj. jsou navzajem homeomorfni. V topologii se pak definuje jediny symbolicky prostor $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ opatreny metrikou $d(x,y) = 2^{-k}$, kde $k = \min\{n \in \mathbf{N}, x_n \neq y_n\}$. Takovy prostor odpovida seznamu polomeru $\{1/2, 1/2\}$.

Věta 43 *Každý symbolický prostor je kompaktní, totálně nesouvislý a homeomorfní Cantorově množině* $C = \{\sum_{i=0}^{\infty} 2x_i 3^{-i-1} : x_i \in \{0,1\}\}$.

Důkaz: Pro $A = \mathbf{2} = \{0,1\}$ a $r_i = 1/2$ definujme zobrazení $\varphi : \mathbf{2}^{\mathbf{N}} \to C$ předpisem $\varphi(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} 2x_i 3^{-i-1}$. Pokud $d(x,y) = 2^{-n}$, pak $x_i = y_i$ pro $i < n$, $x_n \neq y_n$, a

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \varphi(y)| &= \left|\sum_{i=n}^{\infty} 2(x_i - y_i)3^{-i-1}\right| \leq 2\sum_{i=n}^{\infty} 3^{-i-1} = \frac{2 \cdot 3^{-n-1}}{1 - \frac{1}{3}} = 3^{-n} \\
|\varphi(x) - \varphi(y)| &\geq 2 \cdot |x_n - y_n| \cdot 3^{-n-1} - 2\left|\sum_{i=n+1}^{\infty} (x_i - y_i)\right| \\
&\geq 2 \cdot 3^{-n-1} - 2\sum_{i=n+1}^{\infty} 3^{-i-1} = 3^{-n-1}
\end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned}
d(x,y) \leq 2^{-n} \quad &\Rightarrow \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 3^{-n} \\
|\varphi(x) - \varphi(y)| < 3^{-n-1} \quad &\Rightarrow \quad d(x,y) < 2^{-n}
\end{aligned}$$

To znamená že jak φ tak φ^{-1} jsou spojité, takže $\mathbf{2}^{\mathbf{N}}$ je homeomorfní Cantorově množině, která je kompaktní a totálně nesouvislá. Je-li $A = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ libovolná abeceda definujme zobrazení $f : A \to \mathbf{2}^*$ předpisem

$$f(a_0) = 0,\ f(a_1) = 10, \ldots, f_{a_{n-2}} = 1^{n-2}0,\ f_{a_{n-1}} = 1^{n-1}$$

Pro $u \in A^{\mathbf{N}}$ položme $\varphi(u_0, u_1 \ldots) = f(u_0)f(u_1)\ldots$. Pak zobrazení $\varphi : A^{\mathbf{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbf{N}}$ je homeomorfismus. $\square$

Cylindr konečného slova $u = u_0 \ldots u_{n-1} \in A^*$ je množina

$$[u] = \{x \in A^{\mathbf{N}} : \forall i < n, x_i = u_i\}.$$

V prostoru $A^{\mathbf{N}}$ jsou cylindry právě koule:

$$r_{u_0} \cdots r_{u_{n-1}} < \varepsilon \leq r_{u_0} \cdots r_{u_{n-2}} \implies B_\varepsilon(u) = [u_{[0,n)}]$$

Průměr cylindru $u \in A^*$ je $|[u]| = r_u = r_{u_0} \cdots r_{u_{n-1}}$. Cylindry jsou obojetné množiny a tvoří bázi, takže $\operatorname{cov}(A^{\mathbf{N}}) = 0$. Hausdorffova dimenze symbolického prostoru však může být libovolně velká. Pro $a \in A$ položme $\sigma_a(x) = ax$, tj.

$$(\sigma_a(x))_0 = a,\ (\sigma_a(x))_{i+1} = x_i$$

Pak $\sigma_a : A^{\mathbf{N}} \to A^{\mathbf{N}}$ je podobnost s koeficientem $r_{\sigma_a} = r_a < 1$:

$$d(\sigma_a(x), \sigma_a(y)) = r_a \cdot r_{x_0} \cdots r_{x_{n-1}} = r_a d(x,y)$$

Protože $A^{\mathbf{N}} = \bigcup_{a \in A} \sigma_a(A^{\mathbf{N}})$, je $(\sigma_a : A^{\mathbf{N}} \to A^{\mathbf{N}})_{a \in A}$ kontraktivní systém s atraktorem $A^{\mathbf{N}}$. Je-li $\sum r_a^d = 1$, je tedy podle Věty 42 $\dim(A^{\mathbf{N}}) \leq d$. Ukážeme, že $\dim(A^{\mathbf{N}}) = d$.

Nejprve ukážeme, že místo všech pokrytí se můžeme v definici Hausdorffovy míry omezit pouze na pokrytí cylindry. Pro slova $u, v \in A^*$ píšeme $u \sqsubseteq v$ jesliže u je počáteční úsek (prefix) v. VarŘíkáme že jazyk $L \subseteq A^*$ je úplný kód, jestliže pro každé $x \in A^{\mathbf{N}}$ existuje jediné $u \in L$ takové že $u \sqsubseteq x$. Jazyk L je úplný kód právě když $A^{\mathbf{N}} = \bigcup_{u \in L} [u]$ je disjunktní rozklad. Pro slova $u, v \in A^*$ totiž nastává jedna z možností

$$[u] \subseteq [v] \;\vee\; [v] \subseteq [u] \;\vee\; [u] \cap [v] = \emptyset$$

a $[u] \subseteq [v]$ právě když $v \sqsubseteq v$. Příklad úplného kódu na binární abecedě $\mathbf{2}$ je $L = \{0, 10, 110, 111\}$. Tento typ úplného kódu jsme použili v důkazu Věty 43

Věta 44 *Nechť* $\mathbf{r} = (r_a)_{a \in A}$ *je seznam poměrů a* $\sum (r_a)^d = 1$ *Pak*

$$\dim(A^{\mathbf{N}}, d_{\mathbf{r}}) = d, \;\; \mathcal{H}^d(A^{\mathbf{N}}) = 1, \;\; \mathcal{H}^d([u]) = |[u]|^d$$

Důkaz: Nejprve ukážeme, že pro každé spočetné(konecne) pokrytí $\mathcal{U} = (U_i)_{i \geq 0}$ prostoru $A^{\mathbf{N}}$ a pro kazde $\epsilon > 0$, existuje konečný úplný kód $L \subset A^*$ takový, že

$$\sum_{u \in L} |[u]|^d - \epsilon \leq \sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^d$$

Buď $\mathcal{U} = (U_i)_{i \geq 0}$ spočetné pokrytí $A^{\mathbf{N}}$, $S = \{i \in \mathbf{N}, |U_i| = 0\}$. V množině S jsou tedy ty indexy pro něž U_i je jednoprvková množina $U_i = \{x^{(i)}\}$. Jelikož $r_{x_{[0,n)}} < (\max_{a \in A} r_a)^n$ jde pro každé x k nule, při n jdoucím do nekonečna, pak, pro $i \in S$, existuje n_i dostatečně velké, aby

$$r^d_{x^{(i)}_{[0,n_i)}} \leq \epsilon 2^{-i+1}$$

Nechť $i \in \mathbf{N} - S$. Pak U_i je alespoň dvouprvková. Buď $u^{(i)}$ nejdelší společný začátek všech prvků z U_i($u^{(i)}$ může být též prázdné slovo λ). Jistě $U_i \subseteq [u^{(i)}]$. Z definice $u^{(i)}$ plyne, že existují $x, y \in U_i$ tak, že $x_{|u^{(i)}|} \neq y_{|u^{(i)}|}$, a tedy $d(x,y) = r_{u^{(i)}}$ a $|U_i| = r_{u^{(i)}} = |[u^{(i)}]|$. Systém množin

$$\{[u^{(i)}], i \in \mathbf{N} - S\} \cup \{[x^{(i)}_{[0,n_i)}], i \in S\}$$

je otevřené pokrytí kompaktního prostoru a má konečné podpokrytí. Jelikož dva cylindry jsou buď disjunktni, anebo je jeden podmnožinou druhého, lze vybrat podpokrytí navzájem disjuntkními cylindry $\{[u], u \in L\}$, kde L je úplný kód. Tedy

$$\begin{aligned}
\sum_{u \in L} |[u]|^d &\leq \sum_{i \in \mathbf{N}-S} |[u^{(i)}]|^d + \sum_{i \in S} |[x^{(i)}_{[0,n_i)}]|^d = \sum^{i \in \mathbf{N}-S} |U_i|^d + \sum_{i \in S} r^d_{x^{(i)}_{[0,n_i)}} \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^d + \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon 2^{-n+1} = \sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^d + \epsilon
\end{aligned}$$

V druhém kroku ukážeme, že pro každý úplný konečný kód L je $\sum_{u \in L} |[u]|^d = 1$. Je-li totiž $ub \in L$ nejdelší slovo v L, je $ua \in L$ pro každé $a \in A$ a

$$\sum_{a \in A} |[ua]|^d = |[u]|^d \sum_{a \in A} (r_a)^d = |[u]|^d$$

Pak $L' = L \setminus \{ua : \; a \in A\} \cup \{u\}$ je úplný kód a $\sum_{u \in L} |[u]|^d = \sum_{u \in L'} |[u]|^d$. Takto postupně zredukujeme L na nejmenší úplný kód $\{\lambda\}$, kde $\lambda \in A^*$ je prázdné slovo, a $|[\lambda]|^d = 1$.

Takze, pro každé spočetné(konecne) pokrytí $\mathcal{U} = (U_i)_{i \geq 0}$ a pro kazde $\epsilon > 0$, platí

$$1 - \epsilon \leq \sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^d$$

neboli $1 \le \sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^d$. Odtud dostavame $\mathcal{H}^d(A^{\mathbf{N}}) \ge 1$.

Buď znovu $\epsilon > 0$, pak existuje $n \ge 0$ tak, ze $(\max_{a\in A} r_a)^n \le \epsilon$. Pro $u \in A^n$ je $|[u]| \le \epsilon$. Jelikoz A^n je uplny kod,

$$\mathcal{H}(A^{\mathbf{N}})^d_\epsilon \le \sum_{u\in A^n} |[u]|^d = 1$$

Tedy i $\mathcal{H}(A^{\mathbf{N}})^d \le 1$. Odtud dostáváme $\mathcal{H}^d(A^{\mathbf{N}}) = 1$ a tedy $\dim(A^{\mathbf{N}}) = d$. Pro $u \in A^*$ je zobrazeni $x \mapsto ux$ podobnost s koeficientem r_u, ktera zobrazuje $A^{\mathbf{N}}$ na $[u]$. Takže $\mathcal{H}^d([u]) = r_u^d = |[u]|^d$. $\square$

Protože $\mathcal{H}^d(A^{\mathbf{N}}) = 1$, lze Hausdorffovu míru interpretovat jako pravděpodobnost. Písmena nekonečného slova $u \in A^{\mathbf{N}}$ jsou navzájem nezávislé náhodné proměnné a pravděpodobnost písmene $a \in A$ je r_a^d. V teorii pravděpodobnosti se takovým mírám říká bernoulliovské. Atraktor obecného kontraktivního systému lze vždy vyjádřit jako faktorizaci příslušného symbolického kontraktivního systému.

Věta 45 *Nechť $(f_a : X \to X)_{a\in A}$ je kontraktivní systém na úplném prostoru. Pak existuje zobrazení $h : A^{\mathbf{N}} \to \mathcal{A}_{\mathbf{f}}$ s omezeným zvětšením takové, že $h \circ \sigma_a = f_a \circ h$. Pro $v \in A^*$ je $h[v] = f_v(\mathcal{A}_{\mathbf{f}})$, a $|h[v]| \le |[v]| \cdot |\mathcal{A}_{\mathbf{f}}|$.*

$$\begin{tikzcd}
A^{\mathbf{N}} \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "h"'] & A^{\mathbf{N}} \arrow[d, "h"] \\
\mathcal{A}_{\mathbf{f}} \arrow[r, "f_a"] & \mathcal{A}_{\mathbf{f}}
\end{tikzcd}$$

Důkaz: Zvolme $z \in \mathcal{A}_{\mathbf{f}}$ libovolně a položme $h(u) = \lim_{n\to\infty} f_{u_{[0,n)}}(z)$. Podle Věty 26 je h surjektivní a nezávisí na z. Pro $u, v \in A^{\mathbf{N}}$ je $d(h(u), h(v)) \le d(u, v) \cdot |\mathcal{A}_{\mathbf{f}}|$, takže h má omezené zvětšení. Dále $h\sigma_a(u) = \lim_{n\to\infty} f_{au_{[-,n)}}(z) = f_a h(u)$, takže diagram komutuje a $h([v]) = h\sigma_v(A^{\mathbf{N}}) = f_v h(A^{\mathbf{N}}) = f_v(\mathcal{A}_{\mathbf{f}})$. $\square$

3.5 Moranova podmínka

Najdeme nyní dolní odhad Hausdorffovy dimenze pro kontraktivní systémy na eukleidovských prostorech, které jsou tvořeny podobnostmi. Přitom použijeme symbolický prostor studovaný v předcházejícím odstavci. Z analogie k Větě 42 lze očekávat dolní odhad $\dim(\mathcal{A}_{\mathbf{f}}) \ge d$, kde $\sum_{a\in A} r_f^d = 1$. Tento odhad však nemůže platit obecně. Vyskytují-li se v kontraktivním systému například některá zobrazení vícekrát, dostali bychom jiný odhad pro stejný systém. Odhad může platit, pokud se obrazy $f_a(\mathcal{A}_{\mathbf{f}})$ nepřekrývají, jako je tomu u Cantorovy množiny, anebo pokud se alespoň překrývají málo, jak je tomu u Kochovy nebo Sierpinského množiny.

Definice 16 Var*Říkáme že kontraktivní systém $\mathbf{f} = (f_a : X \to X)_{a\in A}$ splňuje Moranovu podmínku, pokud existuje otevřená neprazdna $U \subseteq X$,taková že*

$$f_a(U) \subseteq U, \;\; f_a(U) \cap f_b(U) = \emptyset, \;\; a \neq b.$$

Například pro Kochovu množinu splňuje Moranovu podmínku vnitřek rovnoramenného trojúhelníku na Obrázku 3. Pro Sierpińského množinu splňuje Moranovu podmínku vnitřek počátečního rovnostranného trojúhelníka. Protože $f_a(\overline{U}) \subseteq \overline{U}$, je $\mathcal{A}_{\mathbf{f}} \subseteq \overline{U}$. Z Moranovy podmínky také plyne, že pro každé n jsou množiny $\{f_u(U) : u \in A^n\}$ po dvou disjunktní. Protože pro $u \sqsubseteq v$ je $f_v(U) \subseteq f_u(U)$ platí obecněji

$$u \not\sqsubseteq v \;\&\; v \not\sqsubseteq u \implies f_u(U) \cap f_v(U) = \emptyset.$$

Věta 46 *Nechť* $(f_a : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m)$ *jsou kontraktivní podobnosti splňující Moranovu podmínku a* $\sum_{a\in A}(r_a)^d = 1$. *Pak* $0 < \mathcal{H}^d(\mathcal{A}_\mathbf{f}) < \infty$ *a* $\dim(\mathcal{A}_\mathbf{f}) = d$.

Důkaz: Pro $\in A^*$ označme u^- slovo, které vznikne z u odstraněním posledního písmene. Ukážeme nejprve, že existuje $c > 0$ takové, že pro každou $Y \subseteq \mathcal{A}_\mathbf{f}$, má množina

$$T_Y = \{u \in A^* : \overline{f_u(U)} \cap Y \neq \emptyset, |f_u(U)| < |Y| \leq |f_{u^-}(U)|\}$$

nejvýše c prvků. Pro $u \in T_Y$ je

$$|f_u(U)| = |[u]| \cdot |U| \geq r_\mathbf{f}|[u^-]| \cdot |U| = r_\mathbf{f}|f_{u^-}(U)| \geq r_\mathbf{f}|Y|,$$

takže pro Lebesgueovu míru $\mathcal{L}^m$ platí

$$\mathcal{L}^m(f_u(U)) = \mathcal{L}^m(U) \cdot \left(\frac{|f_u(U)|}{|U|}\right)^m \geq \frac{\mathcal{L}^m(U) r_\mathbf{f}^m |Y|^m}{|U|^m}.$$

Je-li $u \neq v \in T_Y$, pak $f_u(U) \cap f_v(U) = \emptyset$, takže $\bigcup_{u\in T_Y} f_u(U) \subseteq B_{|Y|}(Y)$ a toto sjednocení je disjunktní (Obrázek 35). Z toho plyne

$$\frac{\# T_Y \mathcal{L}^m(U) r_\mathbf{f}^m |Y|^m}{|U|^m} \leq \mathcal{L}^m\left(\bigcup_{u\in T_Y} f_u(U)\right) \leq \mathcal{L}^m(B_{|Y|}(Y)) \leq c_m(3|Y|)^m,$$

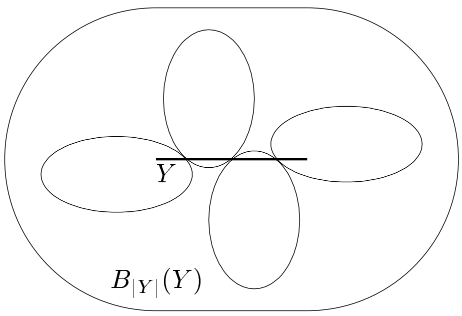
kde $c_m = \mathcal{L}^m(B_{1/2}(0))$ je objem m-dimenzionální koule s průměrem 1. Na obou stranách lze krátit $|Y|^m$, takže $\#(T_Y) \leq c = c_m 3^m r_\mathbf{f}^{-m} |U|^m / \mathcal{L}^m(U)$. Nechť $h : A^\mathbf{N} \to \mathcal{A}_\mathbf{f}$ je symbolický model z Věty 45. Je-li $y \in h^{-1}(Y)$, je $f_{y_{[0,n)}}(U) \cap Y \neq \emptyset$ pro každé n, takže existuje $u \in T_Y$ takové, že $y \in [u]$. To znamená že $h^{-1}(Y) \subseteq \bigcup_{u\in T_Y}[u]$ a tedy

$$\mathcal{H}^d(h^{-1}(Y)) \leq \sum_{u\in T_Y} \mathcal{H}^d([u]) = \sum_{u\in T_Y} |f_u(U)|^d |U|^{-d} \leq |Y|^d \cdot c|U|^{-d}.$$

Pro každé pokrytí $\mathcal{U}$ atraktoru $\mathcal{A}_\mathbf{f}$ platí

$$\sum_{Y\in\mathcal{U}} |Y|^d \geq |U|^d c^{-1} \sum_{Y\in\mathcal{U}} \mathcal{H}^d(h^{-1}(Y)) \geq |U|^d c^{-1} \mathcal{H}^d(A^\mathbf{N}),$$

takže $\mathcal{H}^d(\mathcal{A}_\mathbf{f}) > 0$ a $\dim(\mathcal{A}_\mathbf{f}) \geq d$. Opačná nerovnost plyne z Věty 42. □



Obrázek 35: Moranova podmínka

Z Věty 46 snadno počítáme Hausdorffovu dimenzi klasických příkladů fraktálních množin, které se shodují s jejich kapacitou. Dimenze Kochovy množiny je $\ln 4/\ln 3$, dimenze Cantorovy množiny je $\ln 2/\ln 3$ a dimenze Sierpińského množiny je $\ln 3/\ln 2$.

Příklad 3 *Existuje množina* $X \subset \mathbf{I}$ *pro kterou* $\dim(X) = 1$ *a* $\mathcal{H}^1(X) = 0$.

Důkaz: Pro $n \geq 3$ uvažujme množinu $X_n \subset \mathbf{I}$, kterou sestrojujeme podobně jako Cantorovu množinu, ale v každém kroku odstraňujeme prostřední interval délky $1/n$. Množina X_n je atraktor kontraktivního systému $f_0(x) = x(n-1)/2n$, $f_1(x) = 1 - f_0(x)$ a její dimenze je $\dim(X_n) = \ln 2/\ln 2n/(n-1)$. Položme $X = \bigcup_{n=3}^{\infty} X_n$. Protože $\mathcal{H}^1(X_n) = 0$, je $\mathcal{H}^1(X) = 0$, a $\dim(X) = \sup_{n\geq 3} \dim(X_n) = 1$. □

Podobně jako atraktor kontraktivního systému, je i jeho příslušná Hausdorffova míra sjednocením svých obrazů.

Věta 47 *Nechť* $\mathbf{f} = (f_a : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m)$ *jsou kontraktivní podobnosti splňující Moranovu podmínku a* $\sum_a r_a^d = 1$. *Pak*

$$\begin{aligned} Y \subseteq \mathbf{R}^m \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{H}^d(f_a(Y)) = r_a^d \mathcal{H}^d(Y) \\ Z \subseteq \mathcal{A}_{\mathbf{f}} \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{H}^d(Z) = \sum_{a\in A} r_a^d \mathcal{H}^d(f_a^{-1}(Z)) \end{aligned}$$

Důkaz: První rovnost plyne z toho, že f_a je podobnost s koeficientem r_a. Protože

$$\sum_{a\in A} \mathcal{H}^d(f_a(\mathcal{A}_{\mathbf{f}})) = \sum_{a\in A} r_a^d \mathcal{H}^d(\mathcal{A}_{\mathbf{f}}) = \mathcal{H}^d(\mathcal{A}_{\mathbf{f}}),$$

je $\mathcal{H}^d(f_a(\mathcal{A}_{\mathbf{f}}) \cap f_b(\mathcal{A}_{\mathbf{f}})) = 0$ pro $a \neq b$. Z toho plyne

$$\mathcal{H}^d(Z) = \sum_{a\in A} \mathcal{H}^d(Z \cap f_a(\mathcal{A}_{\mathbf{f}})) = \sum_{a\in A} \mathcal{H}^d(f_a f_a^{-1}(Z)) = \sum_{a\in A} r_a^d \mathcal{H}^d(f_a^{-1}(Z)). \ \square$$

Tento vztah umožňuje zlepšit algoritmus aproximace atraktoru tak, že zobrazení f_a volíme s pravděpodobností r_a^d. Na $A^{\mathbf{N}}$ je $\mathcal{H}^d$ Bernoulliova míra definovaná $\mathcal{H}^d[u] = r_{u_0} \cdots r_{u_{n-1}}$. VarRíkáme že $u \in A^{\mathbf{N}}$ je generické slovo, pokud

$$\forall v \in A^*, \lim_{n\to\infty} \#\{i < n : \ u_{[i,i+|v|)} = v\}/n = \mathcal{H}^d[v]$$

tj. každé slovo $v \in A^*$ se v u vyskytuje s limitní frekvencí $\mathcal{H}^d([v])$. Množina generických posloupností má $\mathcal{H}^d$-míru 1. To plyne z Ergodické věty (viz například Walters [21]).

Věta 48 *Nechť* $(f_a : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m)$ *jsou kontraktivní podobnosti splňující Moranovu podmínku a* $\sum_a r_a^d = 1$. *Nechť* $u \in A^{\mathbf{N}}$ *je generické slovo,* $v \in A^*$, $z \in \mathcal{A}_{\mathbf{f}}$, *a* $z_n = f_{u_{n-1}\cdots u_0}(z)$. *Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i < n : \ z_i \in f_v(\mathcal{A}_{\mathbf{f}})\}}{n} = r_v = \frac{\mathcal{H}^d(f_v(\mathcal{A}_{\mathbf{f}}))}{\mathcal{H}^d(\mathcal{A}_{\mathbf{f}})}$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \#\{i < n : \ z_i \in f_v(\mathcal{A}_{\mathbf{f}})\}/n \quad &\geq \quad \lim_{n\to\infty} \#\{i < n - |v| : \ u_{[i,i+|v|)} = \overline{v}\} \\ &= \quad \mathcal{H}^d[v] = \mathcal{H}^d(f_v(\mathcal{A}_{\mathbf{f}}))/\mathcal{H}^d(\mathcal{A}_{\mathbf{f}}), \end{aligned}$$

kde $\overline{v}$ je inversní slovo k v. Protože součet pravých stran je 1, musí platit rovnost. □

Větu 46 lze zobecnit na kontraktivní systémy na eukleidovském prostoru, které nejsou nutně podobnosti (viz Falconer [5]). Pokud $\mathbf{f} = (f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R})_{a\in A}$ je kontraktivní systém na reálné přímce a $\sum_{a\in A}(r_a)^d = 1$ pak $\dim(\mathcal{A}_\mathbf{f}) \geq d$. Na m-dimenzionálním eukleidovském prostoru platí odhad

$$\dim(\mathcal{A}_\mathbf{f}) \geq d - \frac{\ln(\max_a R_a/r_a)}{\ln(\min_a 1/r_a)}$$

Pro číselný systém se základem $c \in \mathbf{C}$, $|c| > 1$, a konečnou abecedou $A \subseteq \mathbf{C}$ je množina $X_1^\infty = \{\sum_{i=1}^n x_i c^{-i} :\ x_i \in A\}$ atraktor kontraktivního systému

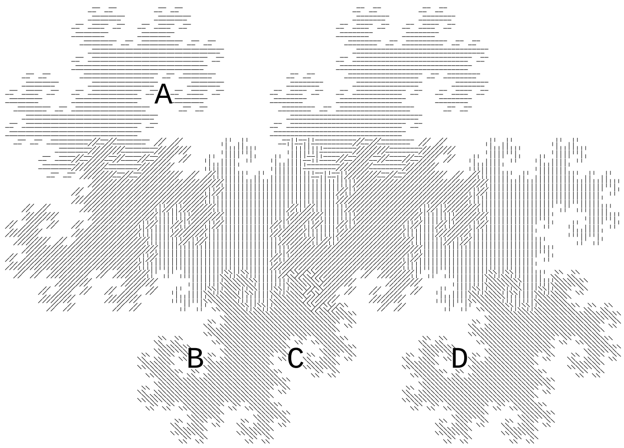
$$\mathbf{f} = (f_a : \mathbf{C} \to \mathbf{C})_{a\in A},\ \text{kde}\ f_a(x) = (x+a)/c.$$

Zobrazení f_a jsou podobnosti s koeficientem $r_a = 1/|c|$, takže

$$\dim(\mathcal{A}_\mathbf{f}) \leq \ln \mathrm{card}(A)/\ln|c|$$

Pro dvoudrak je $c = 1+i$, $A = \{0,1\}$, $\dim(X) \leq \ln 2/\ln\sqrt{2} = 2$. Každá množina X_1^n je částí čtvercové sítě $X_1^n \subseteq \{pc^{-n} + iqc^{-n},:\ p,q \in \mathbf{Z}\}$ a $\#(X_1^n) = 2^n$. Z toho plyne že vnitřek $U = X^\circ$ splňuje Moranovu podmínku, a $\dim(X) = 2$. Určíme nyní dimenzi hranice atraktoru. Na atraktoru máme symetrii $h(z) = 1-i-z$, pro kterou $h(X) = X$, protože

$$\sum_{n=1}^\infty (1-x_n)\alpha^{-n} = 1 - i - \sum_{n=1}^\infty x_n\alpha^{-n}$$



Obrázek 36: Rozklad a hranice Dvoudraku

Hranice X sestává ze dvou částí, $Y = X_{ABCD}$, která jde od bodu A přes body B, C k D a z jejího obrazu $h(Y)$, který jde od D k A, $\partial X = Y \cup h(Y)$ (Obrázek 36). Rozložíme-li atraktor na osm cylindrů $[000], \ldots, [111]$ podle hodnot $x_1x_2x_3$, vidíme že Y sestává ze tří částí a je atraktorem kontraktivního systému.

$$Y = X_{AB} \cup X_{BC} \cup X_{CD} = g_0(Y) \cup g_1(Y) \cup g_2(Y)$$

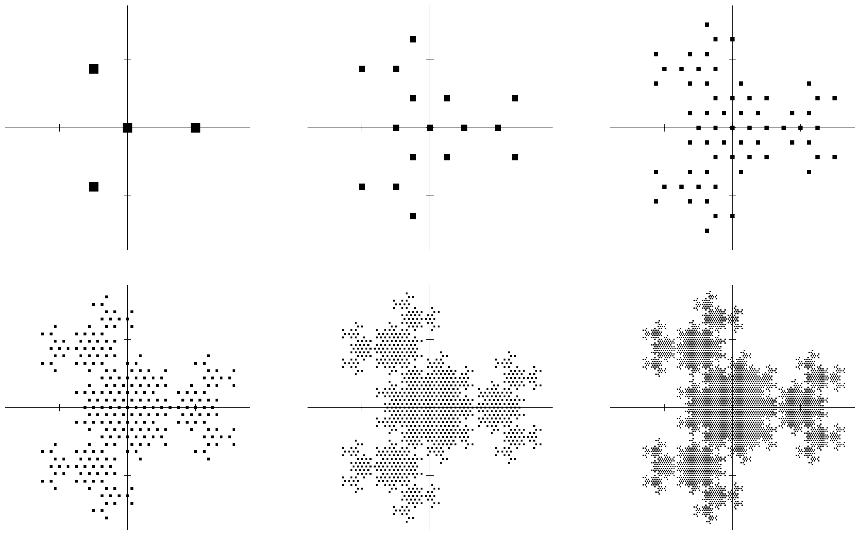
kde zobrazení g_i jsou $g_0(z) = \frac{z}{c}$, $\ g_1(z) = \frac{1-i-z}{c^3} + \frac{1}{2} - i$, $\ g_2(z) = \frac{z}{c^3} + 1 - i$ a splňují

$$g_0(A) = A,\ g_0(D) = B,\ g_1(A) = B,\ g_1(D) = C,\ g_2(A) = C,\ g_2(D) = D$$

Dimenze $d = \dim(\partial X)$ je tedy řešením rovnice $|c|^{-d} + 2|c|^{-3d} = 1$, což je $d \doteq 1.5236$.

Příklad 4 *Eisensteinova množina je atraktor číselného systému se základem* $c = -2$ *a abecedou* $A = \{0, \omega, \omega^2, \omega^3\}$, *kde* $\omega = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$ *je třetí odmocnina z* 1.

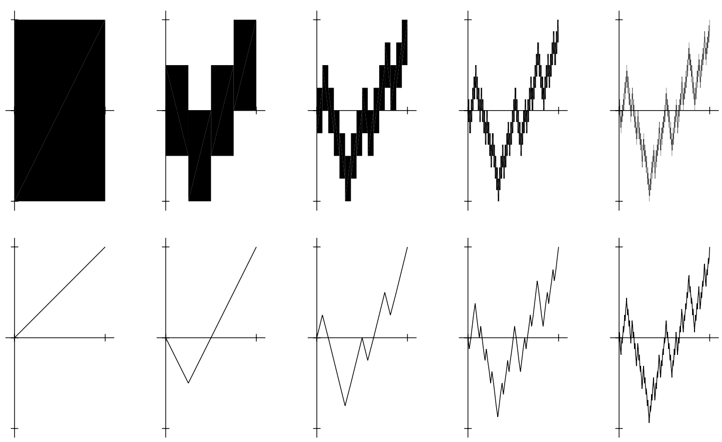
Místo čtvercové sítě máme nyní šestiúhelníkovou síť a $\dim(\mathcal{A}_\mathbf{f}) = \ln(4)/\ln 2 = 2$ (obrázek 37).



Obrázek 37: Eisensteinova množina

3.6 Afinní zobrazení

Afinní zobrazení $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ dáno předpisem $h(x) = Ax + b$, kde A je matice typu $n \times n$ a $b \in \mathbf{R}^n$ je vektor. Afinní zobrazení obecně nejsou podobnosti, takže na ně nelze použít Větu 46. Afinní zobrazení tvaru $f(x, y) = (rx + a, sy + b)$ mají velký význam při určování dimenze grafu funkcí $y = y(x)$, které jsou afinními obrazy sama sebe.



Obrázek 38: Kieswetterova funkce

Příklad 5 *Graf Kiesswetterovy funkce je atraktor kontraktivního systému* $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$, *kde*

$$f_0(x,y) = (\tfrac{x}{4}, \tfrac{-y}{2}), \qquad f_1(x,y) = (\tfrac{x+1}{4}, \tfrac{y-1}{2}),$$
$$f_2(x,y) = (\tfrac{x+2}{4}, \tfrac{y}{2}), \qquad f_3(x,y) = (\tfrac{x+3}{4}, \tfrac{y+1}{2})$$

Na Obrázku 38 vidíme iterace dvou počátečních kompaktních množin, obdélníku $X = [0,1] \times [-1,1]$ a diagonální funkce $\Gamma_0 = \{(x,x) : x \in \mathbf{I}\}$. Funkce f_i nejsou podobnosti, ale jsou afinní. Koeficienty těchto funkcí jsou $r_i = 1/4$, $R_i = 1/2$, takže pro dimenzi dostáváme jen triviální odhad $\dim(\mathcal{A}_{\mathbf{f}}) \leq \ln 4/\ln 2 = 2$. Ukážeme, že dimenze grafu Kiesswetterovy funkce je $3/2$. Nejdříve ukážeme, že atraktor kontraktivního systému je graf funkce. Označme $\Gamma_n = F^n(\Gamma_0)$ n-tou iteraci diagonály. Je-li Γ_n graf funkce g_n, pro kterou $g_n(0) = 0$ a $g_n(1) = 1$, má Γ_{n+1} stejnou vlastnost, protože obrazy $f_i(\Gamma_n)$ na sebe navazují:

$$f_0(0,0) = (0,0), \quad f_i(1,1) = f_{i+1}(0,0), \quad f_3(1,1) = (1,1)$$

Z toho plyne, že také limita Γ je grafem funkce g. Protože $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, platí

$$0 \leq j < 4^k \implies \left| g\left(\frac{j+1}{4^k}\right) - g\left(\frac{j}{4^k}\right) \right| \geq \frac{2^k}{4^k} = 2^{-k}$$

Lemma 49 *Je-li $p \geq 1$, $x_i > 0$ pro $1 \leq i \leq n$, je $\sum_{i=1}^n x_i^p \geq (\sum_{i=1}^n x_i)^p \cdot n^{1-p}$.*

Důkaz: Protože nerovnost se nezmění při vynásobení x_i kladnou konstantou, stačí ji dokázat na simplexu $\Delta = \{y \in \mathbf{R}^n : \ y_i \geq 0, \sum_i y_i = 1\}$. Metodou Lagrangeových koeficientů zjistíme, že ve vnitřku Δ existuje jediný extrém, který splňuje podmínku

$$(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}) = (px_1^{p-1}, \ldots, px_n^{p-1}) = c(1, \ldots, 1)$$

takže $x_i = 1/n$, $f(x) = n^{1-p}$. Pro podsimplexy dimenze $m < n$ je $m^{1-p} > n^{1-p}$. □

Tvrzení 50 *Nechť $g : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ je spojitá nekonstantní funkce, jejíž graf $\Gamma = \{(t, g(t)) : \ t \in \mathbf{I}\}$ je atraktor kontraktivního systému $\mathbf{f} = (f_i : X \to X)_{0 \leq i < n}$, kde*

$$f_i(x,y) = (\tfrac{x+i}{n}, r_i y + b_i), \quad a \ \ |r_i| = r < 1, \ \ rn > 1$$

Pak $\dim(\Gamma) = 2 - \ln(1/r)/\ln n$.

Důkaz: Označme $a = \min f$, $b = \max f$, $c = b - a$. Pak $X = \mathbf{I} \times [a,b]$ je invariantní pro $\mathbf{f}$, tj. $f_i(X) \subseteq X$. Pak m-tá iterace $F^m(X)$ se skládá z n^m obdélníků o stranách $n^{-m} \times cr^m$. Každý tento obdélník lze pokrýt $\lceil cr^m/n^{-m} \rceil \leq 2c(rn)^m$ čtverci o straně n^{-m} a průměru $\sqrt{2}n^{-m}$. Pro $s = 2 - \ln(1/r)/\ln n$ je $r = n^{s-2}$ a

$$\mathcal{H}^s_{\sqrt{2}n^{-m}}(\Gamma) \leq n^m \cdot 2c(rn)^m \cdot 2^{s/2} n^{-ms} = c2^{1+s/2} r^m n^{m(2-s)} = c2^{1+s/2},$$

takže $\mathcal{H}^s(\Gamma) < \infty$. Pro dolní odhad dimenze uvažujme pokrytí $\mathcal{U}$ atraktoru Γ s průměrem $|\mathcal{U}| \leq n^{-m}$. Nechť $\Gamma_i = \Gamma \times ([\frac{i}{n^m}, \frac{i+1}{n_m}] \times \mathbf{I})$ je část grafu nad intervalem $[\frac{i}{n^m} \cdot \frac{i+1}{n^m}]$ a položme

$$\mathcal{U}_i = \{U \in \mathcal{U} : \ U \cap \Gamma_i \neq \emptyset\}.$$

Pak $\#\mathcal{U}_i \geq cr^m/n^{-m}$, $\sum_{U \in \mathcal{U}_i} |U| \geq cr^m$, takže podle Lemma 49 je

$$\sum_{U \in \mathcal{U}_i} |U|^s \geq (\sum_{U \in \mathcal{U}_i} |U|)^s \cdot (\#\mathcal{U}_i)^{1-s} = c^s r^{ms} \cdot c^{1-s}(rn)^{m(1-s)} = cr^m \cdot n^{m(1-s)}$$

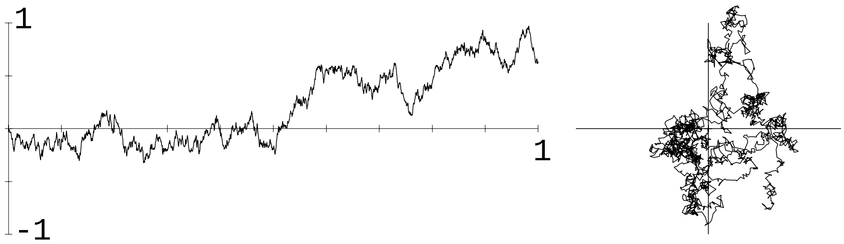
Protože pro $|i - j| \geq 4$ je $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$, je

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} |U|^s \geq \sum_{i=0}^{n^m/4} \sum_{U \in \mathcal{U}_{4i}} |U|^s \geq \frac{n^m}{4} \cdot cr^m \cdot n^{m(1-s)} = \frac{c}{4} r^m \cdot n^{m(2-s)} = c/4$$

Je tedy $\mathcal{H}^s(\Gamma) \geq c/4$, takže $\mathcal{H}^s(\Gamma) > c/4$ a $\dim(\Gamma) = s$. □

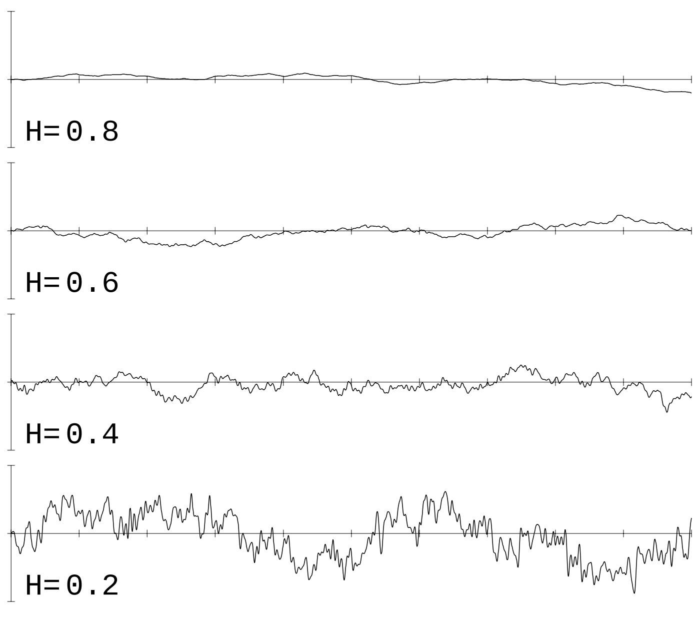
4 Náhodné fraktály

Náhodné dynamické jevy se matematicky popisují jako stochastické procesy. Wienerův proces modeluje Brownův pohyb malé částice, která se náhodně pohybuje pod vlivem srážek s molekulami. Dráhy, které částice urazí v po sobě jdoucích časových intervalech, jsou navzájem nezávislé náhodné proměnné, o nichž se předpokládá, že mají normální rozložení. Jednorozměrný Wienerův proces modeluje pohyb částice, která se může pohybovat jen po přímce. Jeho graf, tj. časový průběh je na Obrázku 39 vlevo. Vpravo je pak trajektorie dvourozměrného Wienerova procesu, částice která se náhodně pohybuje v rovině.



Obrázek 39: Wienerův proces

Na grafu Wienerova procesu vidíme fraktální strukturu a lze předpokládat, že jeho dimenze je větší než 1. Ukážeme si, že graf Wienerova procesu má skoro jistě Hausdorffovu dimenzi 3/2. Zobecněním Wienerova procesu je fraktální Brownův pohyb, u kterého jsou časové přírůstky pozitivně nebo negativně korelované. Míru korelace vyjadřuje parametr $0 < H < 1$. Pro $H = 1/2$ se jedná o Wienerův proces s nekorelovanými přírůstky. Při $H < 1/2$ jsou přírůstky korelovány záporně, při $H > 1/2$ jsou korelovány kladně. Dimenze fraktálního Brownova pohybu je skoro jistě $2 - H$. Grafy fraktálního Brownova pohybu jsou na Obrázku 40.



Obrázek 40: Fraktální Brownův pohyb

4.1 Náhodné proměnné

Pravěpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ sestává z nosné množiny Ω, σ-algebry $\mathcal{A}$ na Ω a pravděpodobnostní míry $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$. Náhodná veličina je měřitelné zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$, kde $\mathcal{B}$ je σ-algebra borelovských množin, tj. nejmenší σ-algebra, která obsahuje všechny otevřené množiny. Podmínka měřitelnosti říká, že pro každou $B \in \mathcal{B}$ je $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Distribuční funkce $F : \mathbf{R} \to [0,1]$ náhodné veličiny X je definována

$$F(x) = \mathrm{P}[X \leq x] = \mathrm{P}\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \leq x\}.$$

Náhodná veličina X je absolutně spojitá, má-li hustotu, tj. nezápornou funkci $f : \mathbf{R} \to [0, \infty)$, pro kterou platí

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Střední hodnota náhodné veličiny X je

$$\mathrm{E}(X) = \int X(\omega) d\mathrm{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x \; dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \; dx.$$

Pro přirozené číslo $p > 0$ je p-tý moment náhodné veličiny X

$$\mathrm{E}(X^p) = \int X^p(\omega) d\mathrm{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^p dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x) dx$$

Střední hodnota ani vyšší momenty nemusí existovat. Náhodné veličiny, které mají p-tý moment tvoří prostor $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Obecněji pro každé reálné číslo $p \geq 1$ uvažujme prostor náhodných veličin

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ X : \Omega \to \mathbf{R} : \; \int |X(\omega)|^p d\mathrm{P}(\omega) < \infty \right\}.$$

Na prostoru $\mathcal{L}^p(\Omega)$ se definuje norma $||X||_p = \mathrm{E}(|X|^p)^{1/p}$, pro kterou platí

$$||aX||_p = a||X||_p, \;\; ||X + Y||_p \leq ||X||_p + ||Y||_p$$

Rozptyl (variance) náhodné veličiny X je

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X))^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$$

Pro lineární funkci náhodné veličiny platí

$$\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b, \;\; \mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$$

VarCebyševova nerovnost odhaduje odchylku náhodné proměnné od její střední hodnoty. Má-li náhodná veličina X střední hodnotu a rozptyl, pro každé $\lambda > 0$ platí

$$\mathrm{P}[|X - \mathrm{E}(X)| > \lambda \sqrt{\mathrm{Var}(X)}] \leq \lambda^{-2}.$$

Jsou-li $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbf{R}$ náhodné veličiny na stejném pravděpodobnostním prostoru, definujeme jejich distribuční funkci $F : \mathbf{R}^n \to [0,1]$ předpisem

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{P}[X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n]$$

Distribuční funkce F je absolutně spojitá, existuje-li její hustota $f : \mathbf{R}^n \to [0, \infty)$, taková že

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \cdots dy_n$$

Náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé, pokud pro jejich distribuční funkci, případně hustotu platí

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n), \quad f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

kde F_i je distribuční funkce a f_i je hustota veličiny X_i. Kovariance náhodných veličin $X, Y : \Omega \to \mathbf{R}$ je

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X)) \cdot (Y - \mathrm{E}(Y))) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).$$

Speciálně $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$. Pro součet a rozdíl náhodných veličin platí

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X \pm Y) &= \mathrm{E}(X) \pm \mathrm{E}(Y) \\ \mathrm{Var}(X \pm Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\mathrm{Cov}(X,Y) \end{aligned}$$

Pro nezávislé X, Y platí $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ a $\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$. Kovarianční matice náhodných veličin $X_1, \dots, X_n$ je $C_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Kovarianční matice je symetrická a pozitivně semidefinitní, tj. její kvadratická forma je nezáporná. Pro každý vektor $a = (a_1, \dots, a_n)$ totiž platí

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i C_{ij} a_j = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \right) \geq 0$$

4.2 Normální rozdělení

Náhodná veličina X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, jestliže její hustota je Gaussova funkce

$$\varphi_\sigma(x - \mu), \quad \text{kde} \quad \varphi_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Její střední hodnota a rozptyl jsou

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_\sigma(x - \mu) dx = \mu, \quad \mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi_\sigma(x - \mu) dx = \sigma^2$$

a $(X - \mu)/\sigma$ má normalizované normální rozdělení $N(0,1)$. Pro $\mu = 0$, $\sigma = 1$ jsou p-té momenty

$$\mathrm{E}(X^p) = \frac{(2p)!}{2^p p!} \text{ pro } p \text{ sudé}, \quad \mathrm{E}(X^p) = 0 \text{ pro } p \text{ liché}$$

Pro každé $p \geq 1$ existuje konečné $||X||_p$.

Definice 17 *Náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ mají vícerozměrné normální rozložení, pokud existuje $m \leq n$, nezávislé náhodné veličiny $Y_1, \dots, Y_m$ s rozdělením $N(0,1)$, matice A typu $n \times m$ a vektor $\mu \in \mathbf{R}^n$ takové, že platí*

$$X_i = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} Y_k + \mu_i.$$

Kovarianční matice náhodných veličin $X_1, \dots, X_n$ je

$$C_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{m} A_{ik} Y_k, \sum_{k=1}^{m} A_{jk} Y_k \right) = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} A_{jk}$$

takže $C = A \cdot A^T$, kde A je matice transponovaná kA.

Tvrzení 51 *Nechť C je symetrická pozitivně semidefinitní matice typu $n \times n$ a hodnosti $m \leq n$. Pak existují náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ s vícerozměrným náhodným rozložením pro které* $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = C_{ij}$ *a* $\mathrm{E}(X_i) = 0$.

Důkaz: Existuje ortonormální matice P typu $n \times m$, která C převádí do diagonálního tvaru, tj. $P^T \cdot C \cdot P = D$ je diagonální matice s nezáporným členy. Je-li B diagonální matice jejíž členy jsou odmocniny diagonálních členů D, je $D = B \cdot B^T$ a

$$C = P \cdot B \cdot B^T \cdot P^T = A \cdot A^T, \text{ kde } A = P \cdot B.$$

Nechť $Y_1, \ldots, Y_m$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $N(0,1)$. Pak pro $X_i = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} Y_k$ platí $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = C_{ij}$. □

Speciálně je-li C pozitivně definitní, má hodnost n a existuje inversní matice $D = C^{-1}$. Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ mají hustotu

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{\det(D)}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i D_{ij} x_j\right)$$

ψ, pak mají normální rozložení, $\mathrm{E}(X_i) = 0$ a $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = C_{ij}$. Pozitivní semidefinitnost lze ověřit Sylvestrovým kritériem:

Tvrzení 52 *Symetrická matice C typu $n \times n$ je pozitivně semidefinitní právě když pro $k = 1, \ldots, n$ platí* $\det((C_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}) \geq 0$.

4.3 Stochastické procesy

Stochastický proces je soubor $(X_t : \Omega \to \mathbf{R})_{t \in T}$ náhodných veličin na stejném pravděpodobnostním prostoru. Indexová množina T se většinou interpretuje jako množina časových okamžiků, například $T = \mathbf{R}$ nebo $T = [0, \infty)$. Je-li T dvourozměrné, mluví se též o stochastickém poli. Rozdělení stochastického procesu je soubor distribučních funkcí

$$F_K(x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{P}[X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_k} \leq x_k]$$

kde $K = \{t_1, \ldots, t_k\} \subseteq T$ probíhá všechny konečné podmnožiny T. Budeme uvažovat absolutně spojité distribuční funkce s hustotami f_K. Tento soubor rozdělení (hustot) musí být kompatibilní. Jestliže $L = \{t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots t_k\}$, pak f_L je marginální rozdělení f_K, to znamená

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_K(x_1, \ldots, x_k) dx_j = f_L(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots x_k)$$

Speciálně pro prázdnou množinu je $f_\emptyset = 1$ konstanta, takže každá jednorozměrná hustota má jednotkový integrál. Naopak platí (Kolmogorova věta), že pro každý kompatibilní systém nezáporných integrovatelných funkcí f_K existuje stochastický proces s rozděleními f_K. VarRíkáme že stochastický proces $(X_t)_{t \in T}$ je gaussovský, jestliže všechna jeho rozdělení jsou (vícedimenzionální) normální. Z Tvrzení 51 plyne

Tvrzení 53 *Nechť $C = (C_{ts})_{t,s \in T}$ je systém reálných čísel takový že pro každou konečnou podmnožinu $K \subseteq T$ je matice $(C_{ts})_{t,s \in K}$ pozitivně semidefinitní. Pak existuje gaussovský stochastický proces X na T takový že* $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = C_{ts}$.

Příklad 6 *Stochastický proces $(W_t : \Omega \to \mathbf{R})_{t \geq 0}$ je Wienerův, pokud pro něj platí:*
1. $W_0(\omega) = 0$.
2. $W_t - W_s$ *má normální rozdělení* $N(0, |s - t|)$
3. $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 \implies W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_3} - W_{t_2}$ *jsou nezávislé.*

Pro $K = \{t_1, \dots, t_k\}$, kde $0 < t_1 < \dots < t_k$ je hustota

$$f_K(x_1, \dots, x_k) = \varphi_{t_1}(x_1)\varphi_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \cdots \varphi_{t_k-t_{k-1}}(x_k - x_{k-1})$$

Covariance Wienerova procesu je

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(W_t, W_s) &= \frac{1}{2}(\mathrm{Var}(W_t) + \mathrm{Var}(W_s) - \mathrm{Var}(W_t - W_s)) \\ &= \frac{1}{2}(|t| + |s| - |t - s|) = \min(t, s)\end{aligned}$$

Důležitou vlastností Wienerova procesu je jeho invariance vzhledem k afinním zobrazením

Tvrzení 54 *Je-li $(W_t)_{t\geq 0}$ Wienerův proces, a $r > 0$, je $V_t = \sqrt{r}W_{t/r}$ Wienerův proces. Je-li $\Gamma = \{(t, W_t) :\ t \geq 0\}$ jeho graf a $H(t, w) = (rt, \sqrt{r}w)$, je $H(\Gamma)$ graf Wienerova procesu.*

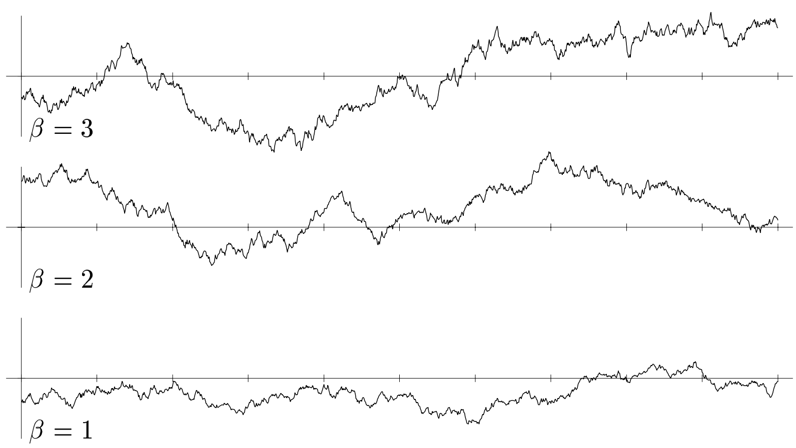
Důkaz: $\mathrm{Var}(\sqrt{r}W_{t/r} - \sqrt{r}W_{s/t}) = r\mathrm{Var}(W_{t/r} - W_{t/s}) = r|\frac{t}{r} - \frac{s}{r}| = |t - s|$

$$H(\Gamma) = \{(rt, \sqrt{r}W_t) :\ t > 0\} = \{(s, \sqrt{r}W_{s/r}) :\ s \geq 0\} \ \square$$

Je-li W Wienerův proces, je $X_t = W_t - tW_1$ stochastický proces, který se nazývá Brownův most. Většinou se uvažuje jeho restrikce na interval $\mathbf{I}$. Má nulovou hodnotu nejen v nule ale také v jednotce. Je to gaussovský proces $(X_t : \Omega \to \mathbf{R})_{t\in\mathbf{I}}$ který je charakterizován vlastnostmi
1. $X_0 = X_1 = 0$
2. $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = s(1 - t)$, pro $0 < s \leq t < 1$.

Příklad 7 *Ornstein-Uhlenbeckův proces $(X_t)_{t\in\mathbf{R}}$ s parametry $c, \beta > 0$ je gaussovský proces, pro který $\mathrm{E}(X_t) = 0$, $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = ce^{-\beta|t-s|}$.*

Pozitivní definitnost plyne z toho, že funkce $e^{-\beta|t|}$ je charakteristická funkce Cauchyho rozdělení s hustotou $\psi_\beta(x) = \beta/\pi(1+\beta^2x^2)$ (viz Rényi [18]). Grafy procesu jsou na Obrázku 41. Na rozdíl od Wienerova procesu je Ornstein-Uhlenbeckův proces stacionární, tj. pro každé $s \in \mathbf{R}$ má proces $(X_{t-s})_{t\in\mathbf{R}}$ stejné rozdělení jako $(X_t)_{t\in\mathbf{R}}$.



Obrázek 41: Orstein-Uhlenbeckův proces

4.4 Spojitá modifikace

Nechť $(X_t, Y_t : \Omega \to \mathbf{R})_{t\in T}$ jsou stochastické procesy na stejném pravděpodobnostním prostoru. VarRíkáme že X je modifikací Y (nebo Y je modifikací X), jestliže pro každé $t \in T$ je $X_t = Y_t$ skoro jistě, tj. $\mathrm{P}[X_t = Y_t] = 1$. V takovém případě mají procesy X a Y stejná rozdělení. Pro každou konečnou $K = \{t_1, \dots, t_k\} \subseteq T$ je

$$\mathrm{P}[X_{t_1} \le x_1, \dots, X_{t_k} \le x_k] = \mathrm{P}[Y_{t_1} \le x_1, \dots, Y_{t_k} \le x_k]$$

Je-li $(X_t : \Omega \to \mathbf{R})_{t\in T}$ stochastický proces, pro každé $\omega \in \Omega$ máme trajektorii $X(\omega) : T \to \mathbf{R}$. Budeme zkoumat kdy jsou tyto trajektorie spojité. Pro přirozené číslo $d \ge 1$ označjme $T = \mathbf{I}^d$. Pro $t, s \in \mathbf{I}^d$ položme

$$|t - s| = \max\{|t_i - s_i| : 1 \le i \le d\}.$$

VarRíkáme že funkce $f : \mathbf{I}^d \to \mathbf{R}$ je α-hölderovsky spojitá (pro $\alpha > 0$), pokud

$$\sup\{|f(t) - f(s)|/|t - s|^\alpha : t, s \in \mathbf{T}^d, t \ne s\} < \infty$$

Věta 55 *Nechť $(X_t : \Omega \to \mathbf{R})_{t\in\mathbf{I}^d}$ je stochastický proces pro který existují kladná γ, c, ε taková že $\mathrm{E}(|X_t - X_s|^\gamma) \le c|t - s|^{d+\varepsilon}$. Pak X má modifikaci Y takovou, že pro každé kladné $\alpha < \varepsilon/\gamma$ je Y skoro všude α-hölderovsky spojitý a platí*

$$\mathrm{E}\left(\sup\{|Y_t - Y_s|/|t - s|^\alpha : t, s \in \mathbf{I}^d, t \ne s\}\right)^\gamma < \infty$$

Důkaz: Položme

$$\begin{aligned} D_m &= \{t \in \mathbf{I}^d : \forall i \le d, t_i 2^m \in \mathbf{N}\} \\ \Delta_m &= \{(s,t) \in D_m \times D_m : |t - s| = 2^{-m}\}, \\ K_m &= \sup\{|X_s - X_t| : (s,t) \in \Delta_m\} \end{aligned}$$

Pak počet prvků $\#\Delta_m = d2^{md}$ a podle předpokladu

$$E(K_m^\gamma) \le \sum_{(s,t)\in\Delta_m} E(|X_t - X_s|^\gamma) \le d2^{md} \cdot c2^{-m(d+\varepsilon)} = cd2^{-m\varepsilon}$$

Položme $M_\alpha = \sup\{|X_t - X_s|/|t - s|^\alpha : t \ne s \in D\}$, kde $D = \bigcup_{m\ge 0} D_m$. Pro každé $t \in D$ existuje posloupnost bodů $t^{(k)} \in D_k$, taková že $t_i^{(k)} \le t_i < t_i^{(k)} + 2^{-k}$ pro $1 \le i \le d$ a $t^{(k)} = t$ pro všechna dosti velká k (taková že $t \in D_k$). Pro $t, s \in D$ existuje $m = \mathbf{m}(t, s)$, takové že $t^{(k)} = s^{(k)}$ pro všechna $k < m$ a $t^{(m)} \ne s^{(m)}$, takže $|t - s| \ge 2^{-m-1}$. Pak platí

$$X_t - X_s = \sum_{i=m}^{\infty} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + X_{t_m} - X_{s_m} - \sum_{i=m}^{\infty} (X_{s_{i+1}} - X_{s_i})$$

kde v každém součtu je jen konečně mnoho nenulových členů. Odtud

$$|X_t - X_s| \le K_m + 2\sum_{i=m+1}^{\infty} K_i \le 2\sum_{i=m}^{\infty} K_i$$

takže

$$\begin{aligned} M_\alpha &\le \sup_{m>0} 2^{(m+1)\alpha} \sup\{|X_t - X_s| : \mathbf{m}(s,t) = m\} \\ &\le \sup_{m>0} 2 \cdot 2^{(m+1)\alpha} \sum_{i=m}^{\infty} K_i \le 2^{\alpha+1} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\alpha} K_i \end{aligned}$$

Pokud $\gamma \geq 1$ dostáváme

$$||M_\alpha||_\gamma \leq 2^{\alpha+1} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\alpha} ||K_i||_\gamma \leq (cd)^{1/\gamma} 2^{\alpha+1} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(\alpha-\varepsilon/\gamma)} < \infty.$$

Pro $\gamma < 1$ je $M_\alpha^\gamma \leq 2^{(\alpha+1)\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\alpha\gamma} K_i^\gamma$, tak6e

$$\mathrm{E}(M_\alpha^\gamma) \leq 2^{(\alpha+1)\gamma} cd \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\alpha\gamma - i\varepsilon} < \infty.$$

Pro každé $\gamma > 0$ je tedy $\mathrm{E}(M_\alpha^\gamma) < \infty$ takže $M_\alpha^\gamma < \infty$ skoro jistě. Existuje tedy množina $\Omega' \subseteq \Omega$ míry 1 taková, že $M_\alpha^\gamma < \infty$ pro každé $\omega \in \Omega'$. To znamená že trajektorie $t \mapsto X_t(\omega)$ je stejnoměrně spojitá na D a tedy existuje jediné spojité rozšíření na $t \mapsto Y_t(\omega)$ definované na $\mathbf{I}^d$. Pro pevné $t \in \mathbf{I}^d$ a $s \in D$ platí $Y_s = X_s$, takže

$$\begin{aligned} \gamma \geq 1 \quad &\Rightarrow \quad ||Y_t - X_t||_\gamma \leq ||Y_t - Y_s||_\gamma + ||X_s - X_t||_\gamma \\ \gamma < 1 \quad &\Rightarrow \quad |Y_t - X_t|^\gamma \leq |Y_t - Y_s|^\gamma + |X_s - X_t|^\gamma \end{aligned}$$

Limitním přechodem $s \to t$ dostaneme v obou případech $\mathrm{E}(|X_t - Y_t|^\gamma) = 0$, takže $X_t = Y_t$ skoro všude a Y je modifikace X. Pro $\omega \in \Omega'$ platí

$$\{|X_t - X_s|/|t-s|^\alpha : \ t, s \in \mathbf{I}^d, s \neq t\} = M_\alpha < \infty,$$

$$\mathrm{E}\left(\sup\{|Y_t - Y_s|/|t-s|^\alpha : \ t, s \in \mathbf{I}^d, t \neq s\}\right)^\gamma < \infty \ \square$$

Tvrzení 56 *Wienerův proces má modifikaci* $(W_t : \Omega \to \mathbf{R})_{t \in \mathbf{I}})$, *která je pro každé kladné* $\alpha < \frac{1}{2}$ *skoro jistě* α*-hölderovsky spojitá..*

Důkaz: Z Tvrzení 54 plyne že náhodná veličina $|X_t - X_s|/|t-s|^{1/2}$ má normální rozdělení $N(0,1)$, takže pro každé $p \geq 1$ je $\mathrm{E}(|X_t - X_s|^{2p}) = C_p |t-s|^p$ pro nějaké konečné C_p. Z Věty 55 plyne že pro každé kladné $\alpha < (p-1)/2p$ je

$$\sup\{|X_t - X_s|/|t-s|^\alpha : \ t, s \in \mathbf{I}, t \neq s\} < \infty$$

Protože p může být libovolně velké, platí Tvrzení pro každé kladné $\alpha < 1/2$. $\square$

4.5 Fraktální Brownův pohyb

Tvrzení 57 *Pro každé* $0 < H < 1$ *existuje gaussovský proces* $(X_t : \Omega \to \mathbf{R})_{t \in \mathbf{R}}$ *pro který platí*

(1) $X_0 = 0$.

(2) $\mathrm{E}(X_t - X_s) = 0$

(3) $\mathrm{Var}(X_t - X_s) = |t-s|^{2H}$

(4) $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$

Důkaz: Je-li V vektorový prostor se skalárním součinem a $x_1, \ldots, x_n \in V$ lineárně nezávislé, pak $C_{ij} = (x_i, x_j)$ je pozitivně definitní protože

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i C_{ij} a_j = \left|\left| \sum a_i x_i \right|\right|^2 > 0$$

Kovarianci $C_{ts} = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$ reprezentujeme jako skalární součin v prostoru

$$\mathcal{L}^2(\mathbf{R}) = \left\{ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx < \infty \right\}$$

se skalárním součinem $(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$. Pro $t \in \mathbf{R}$ položme

$$f_t(x) = |x|^p - |x-t|^p, \text{ kde } p = H - \frac{1}{2},$$

tak6e $-1/2 < p < 1/2$. Ukážeme nejprve že f_1^2 je integrovatelná (Obrázek 42). Protože $|f_1(x)| \le |x|^p + |x-1|^p$ a $|x-1| \ge |x|$ právě když $x \le 1/2$, platí

$$\begin{array}{lcl} (x-\frac{1}{2})p \ge 0 & \Rightarrow & |f_1(x)| \le 2|x|^p \\ (x-\frac{1}{2})p \le 0 & \Rightarrow & |f_1(x)| \le 2|x-1|^p \end{array}$$

Protože integrály

$$\int_{-1}^{2} |x-1|^{2p}dx = \int_{-1}^{2} |x|^{2p}dx = \left[\frac{-(-x)^{2p+1}}{2p+1}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right]_{0}^{2} = \frac{2^{2p+1}+1}{2p+1}$$

jsou konečné, je také konečný integrál $\int_{-1}^{2} f_1^2(x)dx$. Pro $x \ge 2$ podle Věty o střední hodnotě existuje $y \in (x-1,x)$ takové, že $f_1(x) = py^{p-1}$, takže $|f_1(x)| \le |p|(x-1)^{p-1}$. Pro $x \le -1$ existuje $y \in (x-1,x)$ pro které $f_1(x) = -p(-y)^{p-1}$ takže $|f_1(x)| \le |p|(-x)^{p-1}$. Odtud

$$= \int_{2}^{\infty} f_1^2(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} f_1^2(x)dx \le \int_{1}^{\infty} p^2 x^{2p-2}dx = \frac{p^2}{1-2p}$$

Existuje tedy konečný integrál $A = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(x)dx$ a $f_1 \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$. Protože

$$f_t(x) \quad = \quad |t|^p(|\tfrac{x}{t}|^p - |\tfrac{x}{t}-1|^p) = |t|^p f_1(x/t)$$

je také $f_t \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$. Pro substituci $x = |t|y$ dostáváme

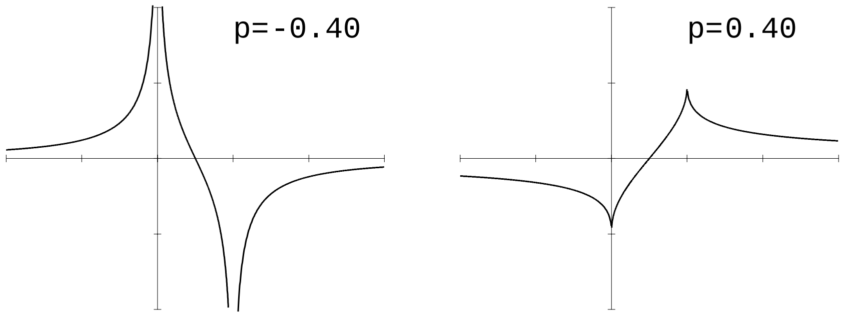
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_t^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{2p} f_1^2(y)|t|dy = A|t|^{2p+1} = A|t|^{2H}$$

Protože $f_t(x) - f_s(x) = |x-s|^p - |x-t|^p = f_{t-s}(x-s)$, je

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f_t(x) - f_s(x))^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{t-s}^2(x-s)dx = A|t-s|^{2H}$$

$$\begin{aligned} (f_t, f_s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x)f_s(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [(f_t^2(x) + f_s^2(x) - (f_t(x) - f_s(x))^2]dx \\ &= \frac{A}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}) \quad \Box \end{aligned}$$

Tvrzení 58 *Nechť* $(X_t)_{t\ge 0}$ *je fraktální Brownův pohyb s parametrem* H. *Potom* $V_t = r^H X_{t/r}$ *je fraktální Brownův pohyb se stejným parametrem. Je-li* $\Gamma = \{(t, X_t) : \ t \ge 0\}$ *jeho graf a* $H(t,w) = (rt, r^H w)$, *je* $H(\Gamma)$ *graf fraktálního Brownova pohybu s parametrem* H.



Obrázek 42: Funkce f_1

Důkaz: $\mathrm{Var}(r^H X_{t/r} - r^H W_{s/r}) = r^{2H}\mathrm{Var}(W_{t/r} - W_{s/r}) = r^{2H}|\frac{t}{r} - \frac{s}{r}|^{2H} = |t-s|^{2H}$

$$H(\Gamma) = \{(rt, r^H X_t) :\ t > 0\} = \{(s, r^H X_{s/r}) :\ s \geq 0\}\ \square$$

Tvrzení 59 *Pro každé $0 < H < 1$ existuje fraktální Brownův pohyb s parametrem H takový, že pro kladné $\alpha < H$ je každá trajektorie α-hölderovsky spojitá.*

Důkaz: Je-li X_t fraktální Brownův pohyb s parametrem H, má náhodná veličina $|X_t - X_s|/|t-s|^H$ normální rozdělení $N(0,1)$, takže pro každé $\gamma > 0$ existuje kladné C_γ pro které $\mathrm{E}(|X_t - X_s|^\gamma) = C_\gamma |t-s|^{H\gamma}$. Podle Věty 55 existuje modifikace X jejíž trajektorie jsou α-hölderovsky spojité pro každé $\alpha < (H\gamma - 1)/\gamma$, tedy pro každé $\alpha < H$. $\square$

Věta 60 *Hausdorffova dimenze grafu fraktálního Brownova pohybu s parametrem H je skoro jistě $2 - H$.*

Důkaz: : Nechť $(X_t : \Omega \to \mathbf{R})_{t\in\mathbf{I}}$ je fraktální Brownův pohyb s parametrem $0 < H < 1$ a $\Gamma = \{(t, X_t) :\ t \in \mathbf{I}\}$ jeho graf. Existují konečné

$$A = \mathrm{E}(\max_{0\leq t\leq 1} |X_t|),\ \ B = \mathrm{Var}(\max_{0\leq t\leq 1} |X_t|).$$

Pro $n > 0$ a $0 \leq i < n$ položme

$$Y_i = \max_{\frac{i}{n}\leq t\leq \frac{i+1}{n}} |X_t - X_{i/n}|,\ \ \Gamma_i = \Gamma \cap ([\tfrac{i}{n}, \tfrac{i+1}{n}] \times \mathbf{R})$$

Y_i má stejné rozdělení jako $\max_{0\leq t\leq 1} n^{-H}|n^H X_{t/n}|$ i jako $\max_{0\leq t\leq 1} n^{-H}|X_t|$, takže

$$\mathrm{E}(Y_i) = An^{-H},\ \ \mathrm{Var}(Y_i) = Bn^{-2H}$$

Graf Γ_i lze pokrýt $2\lceil Y_i/(1/n)\rceil \leq 2nY_i + 2$ čtverci o straně $1/n$, takže graf Γ lze pokrýt $Z_n = 2n\sum_{i=0}^{n-1} Y_i + 2n$ čtverci o straně $1/n$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z_n) &= 2n\cdot n\cdot An^{-H} + 2n = 2An^{2-H} + 2n,\\ \mathrm{Var}(Z_n) &= (2n)^2\cdot n\cdot Bn^{-2H} = 4Bn^{3-2H}\end{aligned}$$

Na náhodnou proměnnou Z_n použijeme VarCebyševovu nerovnost. Pro každé $\lambda > 0$ existuje n_λ takové, že pro všechna $n > n_\lambda$ platí,

$$\overbrace{2An^{2-H} + 2n}^{\mathrm{E}(Z_n)} + \overbrace{\lambda 2\sqrt{Bn^{3-2H}}}^{\lambda\sqrt{\mathrm{Var}(Z_n)}} \leq 3An^{2-H}$$

$$\mathrm{P}[Z_n > 3An^{2-H}] \le \mathrm{P}[Z_n - E(Z_n) > \lambda\sqrt{\mathrm{Var}(Z_n)}] < \lambda^{-2}$$

Protože $\mathcal{H}^{2-H}_{\sqrt{2}/n}(\Gamma) \le Z_n(\sqrt{2}/n)^{2-H}$, je také

$$\mathrm{P}[\mathcal{H}^{2-H}_{\sqrt{2}/n}(\Gamma) > 3A \cdot 2^{1-H}] \quad \le \quad \mathrm{P}[Z_n(\sqrt{2}/n)^{2-H} > 3A \cdot 2^{1-H}] \le \lambda^{-2}$$

Odtud $\mathrm{P}[\mathcal{H}^{2-H}(\Gamma) > 3A2^{1-H}] < \lambda^{-2}$, takže $\mathrm{P}[\mathcal{H}^{2-H}(\Gamma) < \infty] = 1$ a tedy $\mathrm{P}[\dim(\Gamma) \le 2-H] = 1$. Pro opačný odhad dimenze uvažujme pro $n > 0$ a $0 \le i < n$ náhodné proměnné $Y_i = |X_{(i+1)/n} - X_{i/n}|$, jejichž střední hodnota a rozptyl jsou

$$\mathrm{E}(Y_i) = Cn^{-H}, \;\; \mathrm{Var}(Y_i) = n^{-2H}.$$

Nechť $\mathcal{U}$ je pokrytí Γ s průměrem $|\mathcal{U}| < 1/n$. Položme

$$\mathcal{U}_i = \{U \in \mathcal{U} : \; U \cap \Gamma \cap ([\tfrac{i}{n}, \tfrac{i+1}{n}] \times \mathbf{R}) \ne \emptyset\}.$$

Pak $\mathrm{card}(\mathcal{U}_i) \ge Y_i/(1/n) = nY_i$. Uvažujme náhodnou veličinu

$$Z_n = n\sum_{i=0}^{n/4} Y_{4i}, \;\; \mathrm{E}(Z_n) = Cn^{2-H}/4, \;\; \mathrm{Var}(Z_n) = n^{3-2H}/4.$$

Pro každé $\lambda > 0$ existuje n_λ, takové že pro všechna $n > n_\lambda$ platí

$$Cn^{2-H}/5 < Cn^{2-H}/4 - \lambda n^{(3-2H)/2}/2$$

$$\mathrm{P}[Z_n < Cn^{2-H}/5] < \mathrm{P}[Z_n - E(Z_n) < -\lambda\sqrt{\mathrm{Var}(Z_n)}] < \lambda^{-2}$$

Protože pro $|i-j| \ge 4$ je $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$, je podle Lemma 49

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{2-H}_{1/n}(\Gamma) &\ge \sum_{i=0}^{n/4} \sum_{U \in \mathcal{U}_{4i}} |U|^{2-H} \ge \sum_{i=0}^{n/4} \left(\sum_{U \in \mathcal{U}_{4i}} |U|\right)^{2-H} (\#\mathcal{U}_{4i})^{1-2+H} \\ &\ge \sum_{i=0}^{n/4} Y_{4i}^{2-H} (nY_{4i})^{-1+H} = Z_n/n^{2-H} \end{aligned}$$

Odtud $\mathrm{P}[\mathcal{H}^{3/2}_{1/n}(\Gamma) < C/5] \le \mathrm{P}[Z_n/n^{2-H} < 1/5] < \lambda^{-2}$, takže také platí $\mathrm{P}[\mathcal{H}^{2-H}(\Gamma) < C/5] < \lambda^{-2}$, $\mathrm{P}[\mathcal{H}^{2-H}(\Gamma) > C/5] = 1$ a $\mathrm{P}[\dim(\Gamma) \ge 2-H] = 1$. □

Konstrukce fraktálního stochastického prostoru se zobecňuje i na vícedimenzionální prostor. Na prostoru $\mathbf{R}^d$ uvažujme normu $|x| = \max\{|x_i| : \; 1 \le i \le d\}$. Nechť $0 < H < 1$, $H \ne 1/2$ a položme $p = H - d/2$. Pro $t, x \in \mathbf{R}^d$ uvažujme funkci $f_t(x) = |x|^p - |x-t|^p$. Pak $f_t \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^d)$ a existuje konstanta $c > 0$ taková, že

$$(f_t, f_s) = \int_{\mathbf{R}^d} f_t(x) f_s(x) dx_1 \cdots dx_d = c(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$$

Existuje tedy gaussovské stochastické pole $(X_t : \Omega \to \mathbf{R})_{t \in \mathbf{R}^d}$ pro které

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = c(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

Reference

[1] M. F. Barnsley: Fractals Everywhere, Academic Press 1988.

[2] Gerald A. Edgar: Measure, Topology and Fractal Geometry, Springer-Verlag, Berlin 1990.

[3] Ryszard Engelking: General Topology, Polish Scientific Publishers, Warszawa 1977.

[4] Ryszard Engelking: Dimension Theory, Polish Scientific Publishers, Warszawa 1978.

[5] K. J. Falconer: The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press, Cambridge 1985.

[6] Jens Feder: Fractals, Plenum Press, New York 1998.

[7] Takeyuti Hida: Brownian Motion. Springer-Verlag, Berlin 1980.

[8] Witold Hurewicz, Henry Wallman: Dimension Theory, Princeton University Press, Princeton 1941.

[9] Benoit B. Mandelbrot: Les objets fractals, Flammarion 1975, česky 2003.

[10] Benoit B. Mandelbrot: The Fractal Geometry of Nature, W.H.Freeman and Comp. 1982.

[11] Benoit B. Mandelbrot: Fractals and Multifractals, Springer 1991.

[12] Benoit B. Mandelbrot: Multifractals and $1/f$-Noise. Springer 1999.

[13] Heinz-Otto Peitgen, Peter H. Richter: The Beauty of Fractals, Springer-Verlag 1986.

[14] Heinz-Otto Peitgen, Dietmar Saupe: The Science of Fractal Images, Springer-Verlag 1988.

[15] M.B.Priestley: Spectral Analysis and Time Series. Vol. 1 Univariate series. Academic Press, London 1981.

[16] Przemyslaw Prusinkiewicz, James Haran: Lindenmayer Systems, Fractals and Plants, Lecture Notes in Biomathematics 79, Springer-Verlag 1989.

[17] Daniel Revuz, Marc Yor: Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer-Verlag 1991.

[18] Alfréd Rényi: Teorie pravděpodobnosti. Academia Praha 1972.

[19] Walter Rudin: Analýza v reálném a komplexním oboru. Academia, Praha 1977.

[20] Josef Štěpán: Teorie pravděpodobnosti. Academia Praha 1985.

[21] Peter Walters: An Introduction to Ergodic Theory. Springer-Verlag, Berlin 1982.