INFINITESIMÁLNÍ POČET

Petr Kůrka

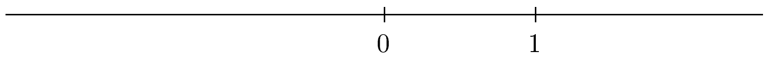
30. září 2004

Kapitola 1

REÁLNÁ ČÍSLA

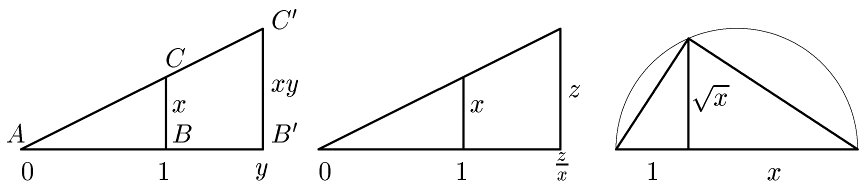
1.1 Reálná čísla

Reálná čísla vyjadřují ideu velikosti nebo množství. Nejlépe je to patrno v geometrii, kde se reálnými čísly vyjadřují délky úseček a křivek, velikosti úhlů, plošné obsahy rovinných útvarů a objemy těles. Reálná čísla srovnáváme podle velikosti, sčítáme je a násobíme. Tyto vztahy a operace mají geometrickou povahu. Reálná čísla odpovídají bodům přímky a aritmetické operace sčítání, odčítání, násobení a dělení odpovídají eukleidovským konstrukcím. K tomu je třeba na přímce nejprve zavést souřadnou soustavu. Zvolíme na ní libovolný bod, který označíme 0 (počátek souřadné soustavy) a napravo od něj zvolíme libovolný bod, který označíme 1.



Obrázek 1.1: Reálná přímka

Úsečku mezi těmito dvěma body chápeme jako jednotku délky. Přímku s takto vyznačenými body 0 a 1 nazýváme reálnou přímkou. Každý její bod představuje reálné číslo. Číslo x je menší než y ($x < y$), je-li bod x nalevo od y. Součet čísel x a y sestrojíme posunutím úsečky s krajními body 0 a y do pozice, ve které bod 0 přejde na bod $0' = x$. Bod y pak přejde na bod $y' = x + y$. Podobně sestrojíme rozdíl $x - y$.



Obrázek 1.2: Geometrie aritmetických operací

Konstrukce násobku a podílu dvou čísel je založena na podobnosti. Mají-li dva trojúhelníky stejné úhly, jsou jejich odpovídající si strany ve stejných poměrech. Sestrojíme libovolný trojúhelník ABC se stranami $AB = 1$ a $BC = x$ a jemu podobný trojúhelník $A'B'C'$ se stranou $A'B' = y$. Pak $B'C' = xy$ (obr. 1.2 vlevo). Naopak je-li $B'C' = z$, je $A'B' = z/y$ (obr. 1.2 uprostřed). Druhou odmocninu z kladného reálného čísla x sestrojíme tak, že nad přeponou délky $x + 1$ sestrojíme pravoúhlý trojúhelník, pata jehož výšky rozděluje přeponu na úsečky délek 1 a x. Výška tohoto trojúhelníka je $\sqrt{x}$ (obr. 1.2 vpravo). Aritmetické operace se také uplatňují při určování plošných obsahů rovinných obrazců. Za jednotkový plošný obsah volíme obsah čtverce s jednotkovou délkou. Obdélník, jehož strany mají délky x a y, má pak plošný obsah xy.

Aritmetické operace splňují běžná pravidla jako je asociativní zákon $(x + y) + z = x + (y + z)$, $x(yz) = (xy)z$, komutativní zákon $x + y = y + x$, $xy = yx$, distributivní zákon $x(y + z) = xy + xz$, apod. Také platnost těchto pravidel můžeme nahlížet geometricky. Záměna pořadí odpovídajících geometrických konstrukcí vede ke stejnému výsledku.

1.1.1 Číselné množiny

Při zavedení souřadné soustavy máme na reálné přímce čísla 0 a 1. Další čísla z nich sestrojujeme aritmetickými operacemi. Jsou to nejprve čísla přirozená

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

která vzniknou opakovaným přičítáním jednotky. Odečítáním jednotky sestrojujeme čísla celá

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Racionální čísla jsou podíly čísel celých.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : \ n, m \in \mathbb{Z}, \ m \neq 0 \right\}$$

Racionální čísla jsou na reálné přímce rozložena hustě. Ideu množství vyjadřují racionální čísla alespoň v přibližnosti. Každou velikost lze racionálními čísly vyjádřit s libovolnou přesností. Úplně přesně jimi však některé velikosti vyjádřit nelze, již velmi jednoduché geometrické konstrukce vedou mimo jejich obor.

Například délka úhlopříčky čtverce s jednotkovou stranou je podle Pythagorovy věty $x = \sqrt{2}$. Avšak pro žádné racionální číslo vztah $x^2 = 2$ neplatí. Předpokládejme totiž sporem, že x takové racionální číslo je. Pak ho můžeme zapsat ve tvaru zlomku $x = n/m$, kde n a m jsou nesoudělná kladná čísla. Z rovnosti $x^2 = 2$ plyne $n^2 = 2m^2$, takže n nemůže být číslo liché. Je tedy $n = 2n_1$ pro nějaké celé číslo n_1 a po dosazení a zkrácení dvěma dostáváme $2n_1^2 = m^2$. Je tedy také m číslo sudé, to je však spor s předpokladem, že čísla n a m jsou nesoudělná.

Reálná čísla, která nejsou racionální, nazýváme iracionální. Množinu všech reálných čísel označujeme $\mathbb{R}$ a množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ chápeme jako její podmnožiny (části).

Říkáme, že množina A je částí (podmnožinou) množiny B, je-li každý prvek A také prvkem B. To zapisujeme

$$A \subseteq B \text{ právě když } (\forall x \in A)(x \in B)$$

Množiny reálných čísel vydělujeme různými vlastnostmi (formulemi). Množinu A všech reálných čísel, které mají vlastnost φ, označujeme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x)\}$$

Množiny vytváříme také pomocí množinových operací sjednocení, průniku a množinového rozdílu. Jsou-li $A, B \subseteq \mathbb{R}$, je

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ nebo } x \in B\} \\ A \cap B &= \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ a } x \in B\} \\ A \setminus B &= \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ a } x \notin B\} \end{aligned}$$

Například pomocí nerovností vytváříme intervaly

$$\begin{array}{rclcrcl} (a,b) &=& \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \qquad & (-\infty,b) &=& \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\ \langle a,b\rangle &=& \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} & & (-\infty,b\rangle &=& \{x \in \mathbb{R} : x \le b\} \\ \langle a,b) &=& \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\} & & (a,+\infty) &=& \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\ (a,b\rangle &=& \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\} & & \langle a,+\infty) &=& \{x \in \mathbb{R} : a \le x\} \end{array}$$

Intervaly tvaru (a,b), $(a,+\infty)$ a $(-\infty,b)$ nazýváme otevřené, intervaly tvaru $\langle a,b\rangle$, $\langle a,+\infty)$ a $(-\infty,b\rangle$ nazýváme uzavřené. Jejich hraniční body jsou a a b, ostatní jejich body nazýváme vnitřní. Otevřené intervaly mají pouze vnitřní body. Interval tvaru $\langle a,b\rangle$ nazýváme kompaktní. Mezi intervaly počítáme také jednobodovou množinu $\{a\} = \langle a,a\rangle$, prázdnou množinu $\emptyset$, která neobsahuje žádný prvek a celou reálnou přímku $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

1.1.2 Reálné posloupnosti

Reálná posloupnost $(a_n)_{n\ge 0}$ je předpis, který každému přirozenému číslu $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje reálné číslo $a_n \in \mathbb{R}$. Například reálná posloupnost $a_n = 1/2^n$ vyjadřuje proces opakovaného půlení jednotkové úsečky. Její n-tý člen je délka úsečky po n půleních. Často se reálná posloupnost zadává rekurentním předpisem, tj. počátečním členem a_0 a předpisem, jak určit a_{n+1} z a_n. Například aritmetická posloupnost je určena rekurentním předpisem $a_{n+1} = a_n + d$, kde d je dané reálné číslo. Její n-tý člen je $a_n = a_0 + nd$. Geometrická posloupnost je určena rekurentním předpisem $a_{n+1} = a_n \cdot r$, kde $r \in \mathbb{R}$ je daný kvocient. Její n-tý člen je $a_n = a_0 r^n$. Faktoriál $a_n = n!$ je určen počátečním členem $a_0 = 1$ a rekurentním vztahem $a_{n+1} = (n+1)a_n$.

Pro posloupnost $(a_n)_{n\ge 0}$ označme

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

součet jejích prvních $n+1$ členů. Například pro aritmetickou posloupnost $a_n = a_0+nd$ je $s_n = (a_0+a_n)(n+1)/2 = (2a_0+nd)(n+1)/2$. Takovéto vzorce dokazujeme matematickou indukcí. Vzorec zřejmě platí pro $n=0$. Platí-li pro n, platí také pro $n+1$, Je totiž

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} = (2a_0+nd)(n+1)/2 + a_0 + (n+1)d \\ &= (2a_0+(n+1)d)(n+2)/2 \end{aligned}$$

Podobně ukážeme, že součet kvadratické řady je

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+2+4+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Součet geometrické řady s kvocientem $r \neq 1$ je

$$\sum_{k=0}^{n} a_0 r^k = a_0 + a_0 r + \cdots + a_0 r^n = a_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

To plyne z identity $(1+r+r^2+\cdots r^n)(1-r) = 1-r^{n+1}$. Binomický vzorec pro n-tou mocninu součtu je

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \end{aligned}$$

kde

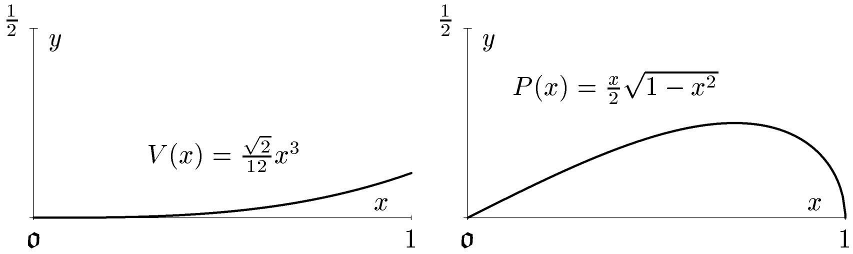
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{2\cdot 3\cdots k}$$

jsou binomické koeficienty.

1.1.3 Reálné funkce

Reálná funkce f vyjadřuje vztah závislosti mezi dvěma reálnými veličinami, kdy hodnota nezávisle proměnné x jednoznačně určuje hodnotu závisle proměnné $y = f(x)$. Například objem pravidelného čtyřstěnu je určen délkou jeho hrany x vztahem $V(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}x^3$ (obr. 1.3 vlevo) a plošný obsah pravoúhlého trojúhelníka s jednotkovou přeponou je určen délkou její odvěsny vztahem $P(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$ (obr. 1.3 vpravo).

Množina možných hodnot nezávislé proměnné x se nazývá definiční obor funkce f a značíme jí $\mathcal{D}(f)$. Definiční obory uvedených funkcí jsou $\mathcal{D}(V) = (0,+\infty)$ a $\mathcal{D}(P) = (0,1)$, protože hrana čtyřstěnu může být libovolné kladné číslo a délka odvěsny pravoúhlého trojúhelníka s jednotkovou přeponou může být kladné číslo menší než 1. Obor hodnot $\mathcal{R}(f) = \{f(x) : x \in \mathcal{D}(f)\}$ funkce f je množina všech hodnot, kterých může nabýt závislá proměnná. V našich příkladech je $\mathcal{R}(V) = (0,+\infty)$, $\mathcal{R}(P) = (0, \frac{1}{4}\rangle$. Pravoúhlý trojúhelník s jednotkovou přeponou má totiž

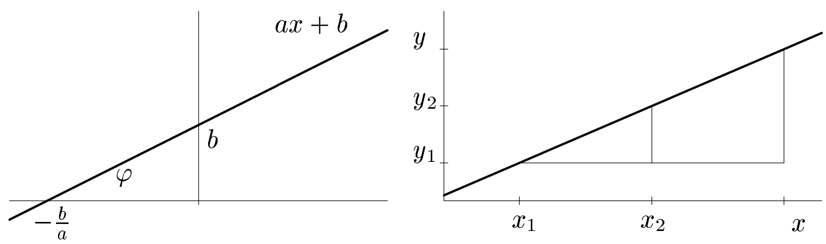


Obrázek 1.3: Graf funkce

největší možný obsah $\frac{1}{4}$ jsou-li obě odvěsny stejné. U funkcí daných vzorcem obvykle považujeme ze její definiční obor největší množinu reálných čísel, kde tento vzorec má smysl. Například funkci $V(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}x^3$ můžeme rozšířit na celou reálnou přímku $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, přestože pro záporná x nemá geometrickou interpretaci. Podobně funkci $P(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$ můžeme rozšířit na uzavřený interval $\langle -1, 1\rangle$.

Reálné funkce znázorňujeme graficky v rovinné pravoúhlé soustavě souřadnic. Tu zavedeme tak, že v rovině zvolíme nulový bod $\mathsf{0}$, dvě navzájem kolmé přímky (osy x a y), které se v něm protínají, a na každé z nich jednotkový bod ve stejné vzdálenosti od nulového bodu. Tak je na obou osách zavedena struktura reálné přímky. Z každého bodu roviny vedeme kolmice na obě osy a jejich průsečíky s osami jsou souřadnice daného bodu. Nulový bod (počátek souřadné soustavy) má souřadnice $\mathsf{0} = [0, 0]$, jednotkový bod osy x má souřadnice $[1, 0]$ a jednotkový bod osy y má souřadnice $[0, 1]$. Reálná rovina je rovina s takto zavedenou souřadnou sosutavou, a ztotožňujeme ji s množinou uspořádaných dvojic reálných čísel

$$\mathbb{R}_2 = \{[x, y] : \; x, y \in \mathbb{R}\}$$



Obrázek 1.4: Lineární funkce

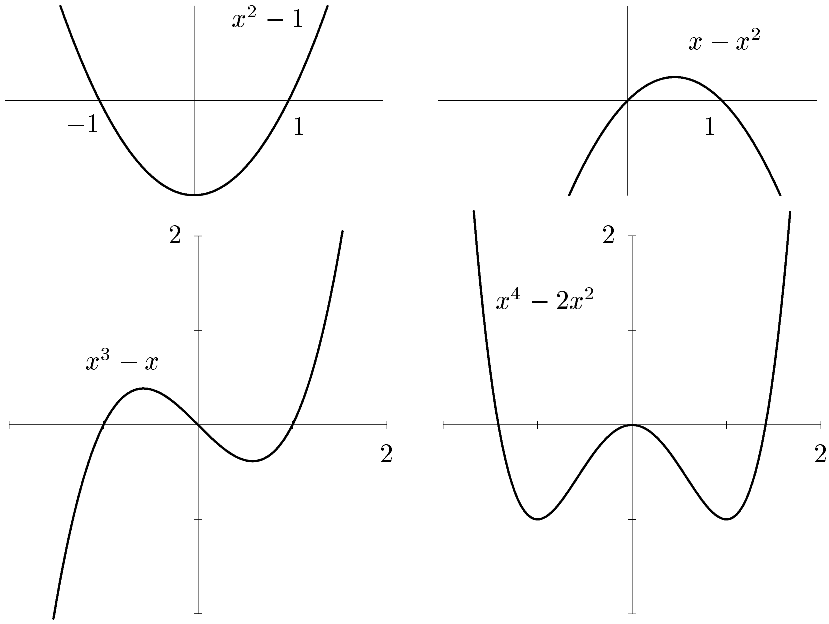
Reálnou funkci znázorňujeme jejím grafem tak, že na osu x vynášíme hodnoty nezávislé proměnné a na osu y hodnoty závislé proměnné. Graf reálné funkce f je tedy množina bodů

$$\mathcal{G}(f) = \{[x, f(x)] : \; x \in \mathcal{D}(f)\}$$

Nejjednodušší je konstantní funkce $f(x) = a$, jejíž graf je vodorovná přímka ve vzdálenosti a nad osou x (nebo ve vzdálenosti $-a$ pod osou x, je-li a záporné). Graf lineární funkce $f(x) = ax + b$ je přímka, která protíná osu y v bodě $[0, b]$ a s osou

x svírá úhel φ, jehož tangens je a (obr. 1.4 vlevo). Přímka, která je rovnoběžná s osou y má rovnici $x = a$, není však grafem žádné funkce. Obecná rovnice přímky je $ax+by+c=0$ kde alespoň jedno z čísel a, b je nenulové. Rovnici přímky procházející danými body $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$, kde $x_1 \neq x_2$, stanovíme z podobnosti trojúhelníků. Pro každý její bod $[x, y]$ je $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ a odtud (obr. 1.4 vpravo)

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$



Obrázek 1.5: Mnohočleny

Graf kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$, je parabola. Doplněním na čtverec ji převedeme na tvar

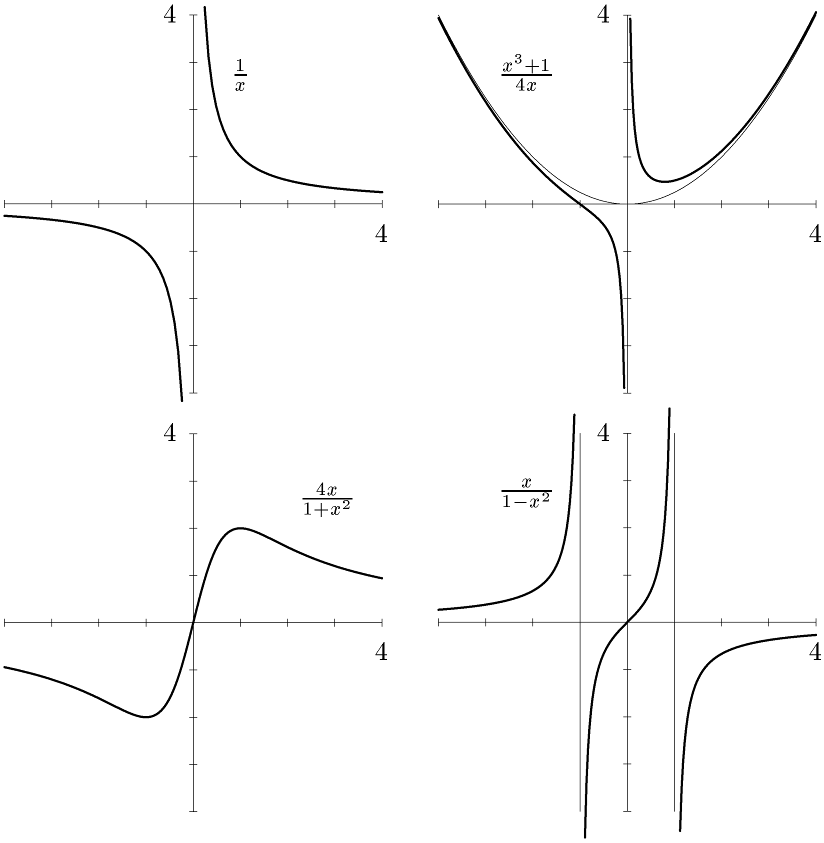
$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

její osa je přímka $x = -\frac{b}{2a}$ rovnoběžná s osou y. V bodě $[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}]$ má parabola nejnižší bod pokud $a > 0$ (obr. 1.5 vlevo nahoře) a nejvyšší bod pokud $a < 0$ (obr. 1.5 vpravo nahoře).

Mnohočlen je funkce

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

kde $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou reálná čísla (obr. 1.5). Definiční obor mnohočlenu je celá reálná přímka $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Největší n, pro které $c_n \neq 0$, se nazývá stupeň mnohočlenu. Stupeň konstantní nenulové funkce $f(x) = c_0 \neq 0$ je 0, stupeň nulové funkce $f(x) = 0$ je -1.

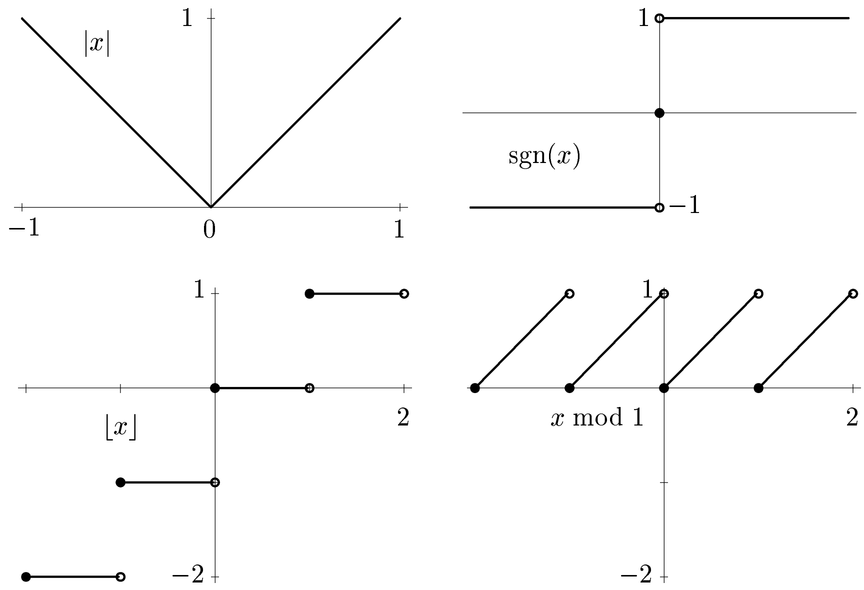


Obrázek 1.6: Racionální lomené funkce

Racionální lomená funkce (obr. 1.6) je podíl dvou mnohočlenů

$$f(x) = \frac{c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n}{d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m}$$

Racionální funkce je definována všude, kde se její jmenovatel nerovná nule. Protože mnohočlen m-tého stupně má nejvýše m reálných kořenů, je definiční obor racionální funkce reálná přímka s vyjímkou nejvýše konečně mnoha bodů. Speciálně mocnina se záporným exponentem je racionální lomená funkce $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Její definiční obor je $\mathcal{D}(x^{-n}) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Funkce $f(x) = x/(1 - x^2)$ má definiční obor $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.



Obrázek 1.7: Funkce

Funkce absolutní hodnoty $|x|$ a znaménka $\mathrm{sgn}(x)$ definujeme

$\lvert x\rvert = -x$	pro $x \le 0$	$\mathrm{sgn}(x) = -1$	pro $x < 0$
$\lvert x\rvert = x$	pro $x \ge 0$	$\mathrm{sgn}(x) = 1$	pro $x > 0$
		$\mathrm{sgn}(0) = 0$	

Platí tedy $x = |x| \cdot \mathrm{sgn}(x)$. Funkce celé části $\lfloor x \rfloor$ je definována jako největší celé číslo, které je menší nebo rovno x, tedy

$$y = \lfloor x \rfloor \;\Leftrightarrow\; y \le x < y + 1,\; y \in \mathbb{Z}$$

Funkce modulu je $(x \bmod 1) = x - \lfloor x \rfloor$ (viz obr. 1.7).

Vzdálenost bodů x a y reálné přímky je absolutní hodnota jejich rozdílu $|x - y|$. Nerovnost $|x - y| < a$ je ekvivalentní nerovnosti $x - a < y < x + a$. Obě tyto nerovnosti znamenají, že vzdálenost y od x je nejvýše a. Pro absolutní hodnotu platí důležitá trojúhelníková nerovnost

$$|x| - |y| \le |x + y| \le |x| + |y|$$

To lze ukázat rozborem případů. Je-li buď $x, y \ge 0$ nebo $x, y \le 0$, je $|x+y| = |x|+|y|$. Je-li $x \ge 0 \ge y$, je $|x + y| \le x \le |x| + |y|$ a podobně pro $x \le 0 \le y$, takže ve všech případech platí $|x + y| \le |x| + |y|$. Odtud plyne $|x| = |x + y - y| \le |x + y| + |y|$, takže $|x| - |y| \le |x + y|$.

Reálné funkce můžeme sčítat odčítat, násobit a dělit. Jsou-li f, g reálné funkce, je $f+g$ funkce definovaná předpisem $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ pro ta x, pro která jsou definovány obě funkce f i g. Definiční obor funkce $f+g$ je tedy průnik definičních oborů funkcí f a g, $\mathcal{D}(f+g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$. Obdobně jsou definovány funkce $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Podíl funkcí je ovšem definován pouze tehdy, když je jmenovatel různý od nuly: $\mathcal{D}(\frac{f}{g}) = \{x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) : g(x) \neq 0\}$. Všechny racionální lomené funkce lze získat aritmetickými operacemi ze dvou funkcí základních, totiž z konstantní funkce $f(x) = 1$ a z identické funkce $g(x) = x$.

Další operace s funkcemi je skládání. Jsou-li f, g reálné funkce, definujeme jejich složení $h = f \circ g$ předpisem $h(x) = f(g(x))$. Definiční obor složené funkce je $\mathcal{D}(f \circ g) = \{x \in \mathcal{D}(g) : \ g(x) \in \mathcal{D}(f)\}$. U skládání funkcí záleží na pořadí. Je-li $f(x) = 2x$ a $g(x) = x^2$, je $f \circ g(x) = 2g(x) = 2x^2$ zatímco $g \circ f(x) = (2x)^2 = 4x^2$. Složení dvou mnohočlenů je opět mnohočlen, složení dvou racionálních funkcí je opět racionální funkce.

1.2 Infinitesimální veličiny

Při mnoha geometrických a fyzikálních úvahách se přirozeně objevují nekonečně malé veličiny. Nazýváme je též infinitesimální.

1.2.1 Derivace

Hledejme obdélník, který při dané (jednotkové) délce obvodu má největší obsah. Označíme-li x délku jedné strany obdélníka, má jeho druhá strana délku $(1-2x)/2$ (x musí být menší než $\frac{1}{2}$) a jeho obsah je pak $P(x) = x(\frac{1}{2} - x)$. Pro nekonečně malé α je

$$\begin{aligned} P(x+\alpha) &= \frac{x}{2} + \frac{\alpha}{2} - x^2 - 2x\alpha - \alpha^2 \\ &= P(x) + (\tfrac{1}{2} - 2x - \alpha)\alpha \end{aligned}$$

Je-li $\frac{1}{2} - 2x > 0$, je pro nekonečně malé kladné α také $\frac{1}{2} - 2x - \alpha > 0$ a tedy $P(x+\alpha) > P(x)$. Zvětší-li se x, zvětší se také $P(x)$. Naopak je-li $\frac{1}{2} - 2x < 0$ je $P(x+\alpha) < P(x)$. Při $\frac{1}{2} - 2x = 0$ je $P(x+\alpha) = P(x) - \alpha^2$, jakoukoliv infinitesimální změnou strany se obsah jen zmenší. Obsah $P(x)$ má tedy největší hodnotu při $x = \frac{1}{4}$, což odpovídá čtverci. Výraz $P'(x) = \frac{1}{2} - 2x$ charakterizuje rychlost růstu funkce $P(x)$ a nazývá se derivace funkce $P(x)$. Dostaneme jí tak, že ve výrazu

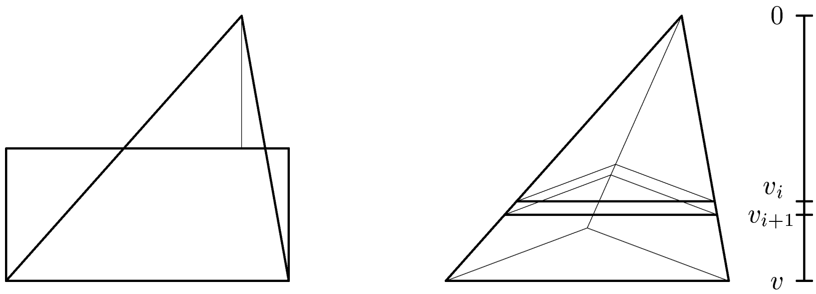
$$\frac{P(x+\alpha) - P(x)}{\alpha} = \frac{1}{2} - 2x - \alpha$$

zanedbáme nekonečně malý člen α. Extrémní hodnoty funkce (maxima nebo minima) hledáme tak, že určíme její derivaci, a hledáme body, ve kterých je nulová.

1.2.2 Integrace

Obsah trojúhelníku určíme tak, že ho rozdělíme na tři díly, ze kterých sestavíme obdélník (obr. 1.8 vlevo). U čtyřstěnu takto postupovat nemůžeme. Můžeme ho však rozdělit na nekonečně mnoho nekonečně tenkých trojúhelníkových desek, jejichž objem určit lze. Výšku v čtyřstěnu rozdělíme na q nekonečně malých intervalů délky $\alpha = v/q$. Ve vzdálenostech $v_i = vi/q$ od vrcholu vedeme řezy rovnoběžné s podstavou. Na i-tém řezu je trojúhelník podobný podstavě s koeficientem podobnosti i/q. Jeho plošný obsah je $P(\frac{i}{q})^2$, kde P je plošný obsah podstavy. Pro objem V_i i-té desky platí

$$P\left(\frac{i}{q}\right)^2\frac{v}{q} < V_i < P\left(\frac{i+1}{q}\right)^2\frac{v}{q}$$



Obrázek 1.8: Trojúhelník a čtyřstěn

Objem čtyřstěnu je $V = V_0 + \cdots + V_{q-1}$, takže

$$\begin{aligned}
\frac{Pv}{q^3}(1+2^2+\cdots+(q-1)^2) &< V < \frac{Pv}{q^3}(1+2^2+\cdots+q^2) \\
\frac{Pv}{q^3}\cdot\frac{(q-1)q(2q-1)}{6} &< V < \frac{Pv}{q^3}\cdot\frac{q(q+1)(2q+1)}{6} \\
\frac{Pv}{3}\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{2q}\right) &< V < \frac{Pv}{3}\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{2q}\right)
\end{aligned}$$

Je-li q nekonečně velké, jsou obě strany nerovnosti nekonečně blízko $V = Pv/3$. Alternativně dospějeme ke stejnému výsledku limitním procesem. Platí-li nerovost pro každé přirozené číslo q, pak jediné reálné číslo V, které každou tuto nerovnost splňuje je $V = Pv/3$. Uvedený výpočet je speciální případ integrace reálné funkce $P(\frac{x}{v})^2$ (plocha řezu ve vzdálenosti x od vrcholu) v mezích od 0 do v. To budeme zapisovat vzorcem

$$V = \int_0^v P\left(\frac{x}{v}\right)^2 dx = \frac{Pv}{3}$$

1.2.3 Diferenciální rovnice

Průměrná rychlost pohybujícího se tělesa je podíl uražené dráhy a délky časového intervalu. Je-li tato délka nekonečně malá, mluvíme o okamžité rychlosti. Předpokládejme, že se těleso pohybuje po přímce a označme $x(t)$ jeho polohu v čase t. Okamžitá rychlost $v(t)$ tělesa v čase t je jeho průměrná rychlost v nekonečně krátkém časovém intervalu $\langle t, t+\alpha \rangle$, tedy derivace funkce jeho polohy.

$$v(t) = \frac{x(t+\alpha) - x(t)}{\alpha} = x'(t)$$

Obdobně průměrné zrychlení tělesa v nějakém časovém intervalu je rozdíl jeho koncové a počáteční rychlosti dělený délkou časového intervalu. Při nekonečně krátkém časovém intervalu dostáváme okamžité zrychlení v čase t

$$a(t) = \frac{v(t+\alpha) - v(t)}{\alpha} = v'(t)$$

Známe-li síly, které na těleso působí, můžeme určit jeho pohyb z třetího Newtonova pohybového zákona. Ten říká, že zrychlení tělesa násobené jeho hmotností se rovná síle, která na něj působí, $F = ma$.

Jestliže těleso hmotnosti m padá v gravitačním poli jiného tělesa hmotnosti M, které je umístěno v počátku souřadné soustavy, pak síla, která na něj působí, je proměnlivá a podle Newtonova gravitačního zákona je rovna $ma = F = -\kappa Mm/x^2$, kde κ je gravitační konstanta. To znamená, že jeho poloha a rychlost splňují soustavu diferenciálních rovnic

$$x'(t) = v(t),\ v'(t) = -\frac{\kappa M}{x^2(t)}$$

Zvolíme-li nekonečně malý časový interval α, dostáváme tak postupně

$$\begin{array}{rcl} x(t+\alpha) & = & x(t) + \alpha v(t) \\ v(t+\alpha) & = & v(t) - \alpha\kappa M/x^2(t) \\ x(t+2\alpha) & = & x(t+\alpha) + \alpha v(t+\alpha) \\ v(t+2\alpha) & = & v(t+\alpha) - \alpha\kappa M/x^2(t+\alpha) \\ & \vdots & \end{array}$$

To je návod na numerický výpočet řešení soustavy. Čím menší α zvolíme, tím přesnější toto řešení je.

Ukažme si příklad řešení jednodušší úlohy, kdy růst nějaké veličiny během nekonečně krátkého časového intervalu je úměrný druhé mocnině její velikosti. To vede na diferenciální rovnici

$$x'(t) = rx^2(t)$$

kde r je konstanta úměrnosti. Hledáme řešení této rovnice v časovém intervalu $\langle 0, t \rangle$ délky t. Rozdělíme ho na infinitesimální intervaly délky $\alpha = t/p$ a označíme $x_i = x(it/p)$ hodnotu veličiny v i-tém časovém intervalu $(0 \leq i \leq p)$. Pak

$$x_{i+1} = x_i + \tfrac{t}{p} \cdot rx_i^2 = x_i(1 + \tfrac{t}{p} \cdot rx_i)$$

S použitím přibližného vzorce $\frac{1}{1+a} \doteq 1 - a$ pro malá a je

$$\frac{1}{x_{i+1}} = \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t}{p} r x_i} \doteq \frac{1 - \frac{t}{p} r x_i}{x_i} = \frac{1}{x_i} - \frac{t}{p} \cdot r$$

Sečteme-li tyto rovnosti pro i od nuly po $p - 1$ dostáváme $\frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x(0)} - rt$, takže

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x(0)} - rt} = \frac{x(0)}{1 - rt \cdot x(0)}$$

1.3 Nestandardní geometrické objekty

Infinitesimální veličiny, jejichž potřebu jsme viděli v předcházejícím odstavci, lze zavést na základě rozlišení mezi geometrickým světem přirozené zkušenosti, kde se setkáváme s potenciálním nekonečnem, a geometrickým světem klasické novověké přírodovědy, kde se setkáváme s aktuálním nekonečnem. Sestrojujeme-li postupně přirozená čísla (například jako body reálné přímky), v každém okamžiku jich máme jen konečně mnoho. Předpokládáme, že pokud jsme již sestrojili nějaké číslo n, jsme schopni sestrojit také následující číslo $n + 1$. V tomto smyslu v této konstrukci můžeme pokračovat až do nekonečna, toto nekonečno je zde však jen v možnosti (potenci), není nikdy uskutečněno (aktualizováno). Teprve uvažujeme-li množinu všech přirozených čísel jako jediný matematický objekt, zabýváme se aktuálním nekonečnem. V této aktuálně nekonečné množině jsou čísla, se kterými se při naší postupné konstrukci nikdy nesetkáme, která tedy můžeme považovat za nekonečná.

Každé přirozené číslo, které nějak popíšeme, budeme považovat za konečné. Může být sice nepředstavitelně velké a nesrovnatelné s čímkoliv v reálném světě, například $10^{10^{10}}$, ale i o takovém čísle něco víme, například to, že je dělitelné dvěma. Tím, že jsme ho popsali, dostali jsme ho před obzor naší pozornosti. V obzoru naší pozornosti můžeme držet však jen konečně mnoho čísel, všechna ostatní se nalézají až za naším obzorem, jsou pro nás nekonečná. Přijímáme tedy princip, že nekonečně velká přirozená čísla existují, na druhé straně však nemůžeme na žádné takové číslo poukázat. Takovýmto poukazem bychom ho totiž dostali před obzor naší pozornosti.

Omezení na konečně velká přirozená čísla odpovídá pohledu antické geometrie, která se zabývala geometrickými objekty ležícími před obzorem, jako jsou úsečky, trojúhelníky nebo čtverce, nikoliv však přímkami, nebo neomezenými křivkami, které obzor překračují. Obzor je však svázán s pozorovatelem a nelze ho chápat objektivně. V novověku vedl požadavek objektivity ke znevážení obzoru a k jeho vyloučení z geometrie. Tím se přirozený geometrický svět před obzorem rozepnul do klasického geometrického světa, který se rozprostírá až do nekonečna a zahrnuje i neomezené geometrické útvary jako přímky v jejich úplnosti.

Klasický geometrický svět však nemůžeme zkoumat přímo, ale pouze z té jeho části, která leží před obzorem, tj. z přirozeného geometrického světa. Činíme tak s vírou, že vlastnosti klasického geometrického světa jsou před obzorem i za obzorem stejné. Poznatky které získáme studiem přirozeného geometrického světa uplatňujeme i na klasický geometrický svět. V klasickém geometrickém světě se proto orientujeme podle stejných principů, předpokládáme zde stejné vztahy a zákonitosti jako ve světě přirozeném. Vnitřně jsou oba tyto světy nerozlišitelné. Zabýváme-li se jedním z nich, nelze z žádné jeho vlastnosti poznat, o který se jedná.

Princip expanze *V klasickém geometrickém světě platí stejné zákonitosti jako v přirozeném geometrickém světě.*

1.3.1 Nestandardní přirozená čísla

Konečně velká čísla nazýváme též standardní, a jejich soubor značíme $\mathbb{N}$. Soubor všech přirozených čísel (konečných či nekonečných) značíme $\mathbb{N}^*$ a nazýváme ho soubor nestandardních přirozených čísel. Soubor nekonečně velkých přirozených čísel značíme $\mathbb{N}^\infty = \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$. Tato terminologie pochází z nestandardní analýzy, která pracuje s ekvivalentními matematickými prostředky, avšak s jinou interpretací. V nestandardní analýze je základní strukturou standardní množina $\mathbb{N}$ přirozených čísel, která se rozšiřuje o nekonečná přirozená čísla. Předpokládá se, že v oborech $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^*$ platí stejné aritmetické zákonitosti (princip expanze) a že standardní čísla $\mathbb{N}$ tvoří počáteční úsek souboru nestandardních čísel $\mathbb{N}^*$.

Princip počátečního úseku

1.*Je-li* $n \in \mathbb{N}$*,* $m \in \mathbb{N}^*$ *a* $m < n$*, pak* $m \in \mathbb{N}$*.*

2.*Je-li* $n, m \in \mathbb{N}$*, je také* $n + m \in \mathbb{N}$*,* $nm \in \mathbb{N}$ *a* $n^m \in \mathbb{N}$ *standardní.*

Pokud jsme již sestrojili čísla n a m, věříme, že budeme moci sestrojit i čísla, která z nich vzniknou aritmetickými operacemi. Naopak, je-li $p \in \mathbb{N}^\infty$ nekonečné číslo, jsou také čísla $2p$ a p^2 nekonečná. To plyne z principu počátečního úseku. Také číslo $p-1$ je však nekonečné. Kdyby bylo konečné, bylo by totiž konečné také $p = (p-1)+1$. Podobně můžeme uvažovat pro dělení a odmocňování:

Tvrzení 1 *Z nekonečného přirozené číslo se nestane konečné ani odečtením libovolného konečného čísla, dělením konečným číslem ani odmocněním konečným číslem:*

1. Je-li $p \in \mathbb{N}^\infty$*,* $n \in \mathbb{N}$*, je* $p - n \in \mathbb{N}^\infty$

2. Je-li $pn \in \mathbb{N}^\infty$*,* $n \in \mathbb{N}$*, je* $p \in \mathbb{N}^\infty$

3. Je-li $p^n \in \mathbb{N}^\infty$*,* $n \in \mathbb{N}$*, je* $p \in \mathbb{N}^\infty$

Důkaz: Kdyby $p - n$ náleželo do $\mathbb{N}$ pak by $n = (p - n) + n$ náleželo do $\mathbb{N}$ podle principu počátečního úseku. Kdyby p náleželo do $\mathbb{N}$, náleželo by tam také $p \cdot n$ (případně) p^n. $\square$

1.3.2 Nestandardní reálná čísla

Také v oboru reálných čísel se projevuje rozdíl mezi přirozeným a klasickým geometrickým světem. Při postupných konstrukcích reálných čísel aritmetickými operacemi zůstáváme ve standardním geometrickém světě. Tak můžeme půlit jednotkovou

$$\underbrace{\overbrace{0,1,2,3,\dots}^{\mathbb{N}}\ \overbrace{\dots,p-1,p,p+1,\dots,2p,\dots,p^2,\dots,p^p,\dots}^{\mathbb{N}^\infty}}_{\mathbb{N}^*}$$

Obrázek 1.9: Nestandardní přirozená čísla

úsečku a sestrojovat čísla $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\dots$, nikdy však tento proces neuskutečníme celý najednou. Čísla tvaru 2^{-p}, ke kterým se takto nikdy nedostaneme, považujeme za nekonečně malá a patří do nestandardního geometrického světa. V nestandardním geometrickém světě obsahuje reálná přímka jednak nekonečně velká čísla, jednak čísla nekonečně malá. Standardní reálná čísla $\mathbb{R}$ tvoří podsoubor nestandardních reálných čísel $\mathbb{R}^*$. V blízkosti každého standardního reálného čísla je celý subor jemu nekonečně blízkých nestandardních reálných čísel. Podle principu expanze v těchto dvou oborech platí stejné aritmetické zákonitosti. Všechny tyto soubory vymezujeme pomocí nekonečných přirozených čísel.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^\infty &= \{x \in \mathbb{R}^* : (\exists p \in \mathbb{N}^\infty)(|x| > p)\} && \text{nekonečně velká} \\ \mathbb{R}^0 &= \{x \in \mathbb{R}^* : (\exists p \in \mathbb{N}^\infty)(|x| < \tfrac{1}{p})\} && \text{nekonečně malá} \end{aligned}$$

Nekonečně malá čísla nazýváme také infinitesimální. Jsou to převrácené hodnoty čísel nekonečně velkých a naopak nekonečně velká čísla jsou převrácené hodnoty nenulových infinitesimálních čísel. Proměnné pro konečně velká přirozená čísla z $\mathbb{N}$ značíme písmeny $n,m,\dots$, proměnné pro nekonečná přirozená čísla z $\mathbb{N}^\infty$ značíme písmeny $p,q,\dots$. Proměnné pro nekonečně malá čísla značíme malými písmeny ze začátku řecké abecedy $\alpha,\beta,\dots$. Konečně velká nestandardní čísla tvoří soubor

$$\mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^\infty = \{x \in \mathbb{R}^* : (\forall p \in \mathbb{N}^\infty)(|x| < p)\} \quad \text{konečně velká}$$

Sem patří všechna standardní reálná čísla, tj. $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^\infty$, ale také například všechna infinitesimální čísla. Tyto soubory můžeme ekvivalentně popsat pomocí konečných přirozených čísel.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^\infty &= \{x \in \mathbb{R}^* : (\forall n \in \mathbb{N})(|x| > n)\} \\ \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^\infty &= \{x \in \mathbb{R}^* : (\exists n \in \mathbb{N})(|x| < n)\} \\ \mathbb{R}^0 &= \{x \in \mathbb{R}^* : (\forall n \in \mathbb{N})(|x| < \tfrac{1}{n})\} \end{aligned}$$

Je-li totiž $x \in \mathbb{R}^\infty$, existuje $p \in \mathbb{N}^\infty$ pro které $|x| > p$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $|x| > p > n$. Jestliže naopak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x| > n$, existuje $p \in \mathbb{N}^*$ pro které $p < |x| \le p+1$. Kdyby toto p náleželo do $\mathbb{N}$, náleželo by do $\mathbb{N}$ i $p+1$ a to je spor. je tedy $p \in \mathbb{N}^\infty$. Podobně v ostatních případech.

Tvrzení 2 *Součin infinitesimálního a konečně velkého čísla je infinitesimální. Součet dvou infinitesimálních čísel je infinitesimální.*

1. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}^0$ a $x \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^\infty$, pak $x\alpha \in \mathbb{R}^0$.

2. Je-li $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^0$, pak $\alpha+\beta \in \mathbb{R}^0$.

Důkaz: 1. Nechť $x \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^\infty$ a $\alpha \in \mathbb{R}^0$. Podle předpokladu existuje $n \in \mathbb{N}$, tak že $|x| < n$, a $p \in \mathbb{N}^\infty$ tak že $|\alpha| < \frac{1}{p}$. Předpokládejme sporem že $|x\alpha|$ nenáleží do $\mathbb{R}^0$, tj. že existuje $m \in \mathbb{N}$ pro které $\frac{1}{m} < |x\alpha|$. Protože $|x\alpha| < \frac{n}{p}$, dostáváme $p < mn$ a podle principu počátečního úseku je $mn \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathbb{N}$ a to je spor.
2. Nechť γ je větší z čísel $|\alpha|$, $|\beta|$. Pak Pak $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \leq 2\gamma \in \mathbb{R}^0$ (trojúhelníková nerovnost) podle bodu 1.

Definice 3 *Říkáme, že nestandardní reálná čísla x,y jsou nekonečně blízká ($x \approx y$), je-li jejich rozdíl nekonečně malý.*

$$x \approx y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{R}^0$$

Tvrzení 4 *Nekonečná blízkost je relace ekvivalence, to znamená*
1. $x \approx x$
2. $x \approx y \Rightarrow y \approx x$
3. $x \approx y,\ y \approx z \Rightarrow x \approx z$

První dva body jsou okamžitě zřejmé. Jsou-li $x - y$ a $y - z$ nekonečně malé, je $|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z|$ také nekonečně malé podle tvrzení 2.2, takže $x \approx z$. □

Nekonečná blízkost se v některých případech také zachovává při aritmetických operacích.

Tvrzení 5 *Nechť* $x, y, u, v \in \mathbb{R}^*$, $x \approx u$, $y \approx v$. *Pak*
1. $x + y \approx u + v$.
2. $x - y \approx u - v$.
3. Je-li $x, y \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^\infty$, *je* $xy \approx uv$.
4. Je-li $x \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^\infty$ *a* $y \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^0$, *je* $\frac{x}{y} \approx \frac{u}{v}$.
5. Je-li $x, u \geq 0$, *je* $\sqrt{x} \approx \sqrt{u}$.

Důkaz: 1. $|(x + y) - (u + v)| \leq |x - u| + |y - v| \in \mathbb{R}^0$.
2. $|(x - y) - (u - v)| \leq |x - u| + |v - y| \in \mathbb{R}^0$.
3. $|xy - uv| = |(x - u)y + u(y - v)| \leq |x - u| \cdot |y| + |u| \cdot |y - v| \in \mathbb{R}^0$ podle tvrzení 2.1. Podle předpokladu je totiž y konečně velké a protože $u \approx x$, je také u konečně velké.
4. Ukážeme nejprve $\frac{1}{y} \approx \frac{1}{v}$. Protože $y \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^0$, existuje $n \in \mathbb{N}$ pro které $|y| > \frac{1}{n}$. Protože $y \approx v$, je $|v - y| < \frac{1}{2n}$ a tedy $|v| = |y + v - y| \geq |y| - |v - y| > \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$, takže $v \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^0$. Odtud $\frac{1}{y}, \frac{1}{v} \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^\infty$, takže $|\frac{1}{y} - \frac{1}{v}| = |y - v| \cdot |\frac{1}{y}| \cdot |\frac{1}{v}| \in \mathbb{R}^0$ podle tvrzení 2.1 a $\frac{1}{y} \approx \frac{1}{v}$. Podle bodu 3 je pak $\frac{x}{y} \approx \frac{u}{v}$.
5. Je-li $\sqrt{x} \approx 0$ a $\sqrt{u} \approx 0$, je $\sqrt{x} \approx \sqrt{u}$. Není-li alespoň jedno z těchto čísel infinitesimální, je $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{u}}$ konečně velké a $\sqrt{x} - \sqrt{u} = \frac{x-u}{\sqrt{x}-\sqrt{u}} \approx 0$. □

Soubor nestandardních reálných čísel $\mathbb{R}^*$ se tedy rozpadá na třídy ekvivalence navzájem nekonečně blízkých nestandardních reálných čísel. Speciálně každé standardní reálné číslo $a \in \mathbb{R}$ určuje jednu takovou třídu $a^\bullet = \{x \in \mathbb{R}^* : x \approx a\}$, kterou nazýváme monádou čísla a. Tento soubor obsahuje jediné standardní reálné číslo. Je-li totiž $b \in \mathbb{R}$ a $b \neq a$, pak není $b \approx a$. Je-li $x \in \mathbb{R}^\infty$, pak jeho třída ekvivalence neobsahuje žádné standardní reálné číslo. Je-li však $x \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^\infty$ konečně velké, jsou libovolně blízko od něj standardní reálná čísla. Ono samo tedy poukazuje na určité místo standardní reálné přímky. Standardní reálné číslo, které se na tomto místě vyskytuje, nazýváme projekcí čísla x. To je nový princip, který z předcházejících neplyne.

Princip zpětné projekce *Každé konečně velké nestandardní číslo x je nekonečně blízké právě jednomu standardnímu reálnému číslu a, které nazýváme jeho projekcí $a = \mathfrak{P}(x)$.*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^\infty)(\exists! a = \mathfrak{P}(x) \in \mathbb{R})(x \approx a)$$

Reálná čísla se reprezentují nekonečnými desetinnými rozvoji $x = x_0.x_1x_2x_3\ldots$, kde $x_0 \in \mathbb{Z}$ je celé číslo a $x_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ jsou desetinné číslice pro $i > 0$. Takové číslo je sevřeno mezi posloupnosti

$$a_n = x_0 + \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n},\ b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$$

Protože $0 \leq x_i \leq 9$, je $a_n \leq x$ a

$$x \leq a_n + \frac{9}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{9}{10^{n+k}} \leq a_n + \frac{9}{10^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = b_n$$

Je-li $p \in \mathbb{N}^\infty$ nekonečně velké číslo, náleží a_p i b_p do $\mathbb{N}^*$ a přitom $a_p \approx b_p$. Jsou-li $p < q$ dvě nekonečně velká čísla, je $a_p \leq a_q \leq b_q \leq b_p$, a všechna tato čísla jsou navzájem nekonečně blízká. Podle principu zpětné projekce tedy k danému desetinnému rozvoji existuje jediné reálné číslo x takové, že pro každé $p \in \mathbb{N}^\infty$ je $x \approx a_p$.

Princip zpětné projekce také zajišťuje například existenci n-tých odmocnin kladných reálných čísel. Pro $x \in \mathbb{R}$ kladné, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ zvolíme-li $q \in \mathbb{N}^\infty$ libovolně a definujeme $p \in \mathbb{N}^*$ jako největší číslo (v nestandardním světě), pro které platí $\frac{p^n}{q^n} < x \leq \frac{(p+1)^n}{q^n}$. Pak $\frac{p}{q}$ je konečné. Je-li totiž $x \geq 1$ je $\frac{p}{q} < \frac{p^n}{q^n} < x$, je-li $0 < x < 1$, je $\frac{p}{q} \leq 1$. Existuje tedy $y = \mathfrak{P}(\frac{p}{q}) \in \mathbb{R}$ a $y^n \approx \frac{p^n}{q^n} \approx x$, takže $y^n = x$. Přitom takové y existuje jediné. Je-li totiž $0 < y_1 < y_2$, je $y_1^n < y_2^n$. Také n-tá odmocnina zachovává nekonečnou blízkost. Je-li $x, u \geq 0$, $x \approx u$, je buď $\sqrt[n]{x} \approx 0 \approx \sqrt[n]{u}$, nebo

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{u} = \frac{x - u}{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}u} + \cdots + \sqrt[n]{u^{n-1}}} \approx 0$$

1.3.3 Množiny, posloupnosti a funkce

V geometrickém světě nejsou jen čísla, ale také jejich množiny, posloupnosti čísel, reálné funkce a vztahy mezi nimi. Každý takový objekt má svou reprezentaci i v nestandardním světě. Například reálnému intervalu $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ odpovídá interval $(0,1)^* \subseteq \mathbb{R}^*$, který je v nestandardním světě definován stejným způsobem jako interval $(0,1)$ ve světě standardním, tj. $(0,1)^* = \{x \in \mathbb{R}^* : 0 < x < 1\}$.

Princip vnoření *Každému objektu x standardního geometrického světa odpovídá v nestandardním geometrickém světě jeho obraz, který označujeme x^*. Mezi objekty $x, y, z, \ldots$ jsou ve standardním světě stejné vztahy jako mezi jejich obrazy $x^*, y^*, z^*, \ldots$ v nestandardním světě.*

Standardní množině přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ odpovídá v nestandardním světě nestandardní množina přirozených čísel $\mathbb{N}^*$. Ta obsahuje obrazy přirozených čísel $0^*, 1^*, 2^*, \ldots$. Pro zjednodušení zápisu, budeme $*$ vynechávat všude kromě číselných množin. Standardní číslo x budeme ztotožňovat s nestandardním číslem x^*. Tak se stane $\mathbb{N}$ částí množiny $\mathbb{N}^*$ a $\mathbb{R}$ se stane částí množiny $\mathbb{R}^*$. Obraz množiny sudých přirozených čísel $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ je množina sudých nestandardních přirozených čísel $A^* = \{2n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Obraz množiny racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je množina $\mathbb{Q}^* = \{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}^*, m \neq 0\}$.

V nestandardním geometrickém světě jsou také množiny, které nejsou obrazem žádné množiny standardního světa například intervaly $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^* : a < x < b\}$, kde $a, b \in \mathbb{R}^*$ jsou nestandardní čísla. Podobně jako ve standardním světě vymezujeme i zde množiny pomocí vlastností a množinových operací. Množinu nestandardních reálných čísel, které mají vlastnost φ, značíme $\{x \in \mathbb{R}^* : \varphi(x)\}$. Jestliže vlastnost φ se odvolává jen na objekty standardního světa, je tato množina obrazem množiny, kterou vlastnost φ vymezuje ve standardním světě.

$$\{x \in \mathbb{R}^* : \varphi(x)\} = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x)\}^*.$$

Jinak tato množina nemusí být obrazem žádné standardní množiny.

Ne každý soubor nestandardních reálných čísel je však množina. Pracujeme-li uvnitř nestandardního geometrického světa, neuznáváme obzor a nedokážeme (nebo nechceme) rozlišit standardní objekty od nestandardních. Množiny jsou takové soubory, kde u každého čísla je jednoznačně (objektivně) určeno, zda do této množiny patří nebo ne. Soubory jako $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^\infty$ tedy množiny nejsou. V nestandardním světě nelze rozhodnout, zda dané číslo je před obzorem nebo již za ním. Ze stejného důvodu nejsou množiny soubory $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\infty$ nebo monády $a^\bullet$. Jsou totiž v nestandardním světě vymezeny s odkazem na standardní svět, nikoliv pouze v samotném nestandardním světě.

Také na množiny nestandardního světa se vztahuje princip expanze. V nestandardním světě platí mezi čísly a množinami nebo mezi množinami navzájem stejné vztahy jako ve světě standardním. Například každá množina přirozených čísel má nejmenší prvek, takže také každá množina nestandardních přirozených čísel má nejmenší prvek. Soubor $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, který nejmenší prvek nemá, nemůže být tedy množinou.

Podobná situace je u posloupností. Posloupnost $(a_n)_{n\geq 0}$ definovanou předpisem $a_n = 1/2^n$ chápeme jako jediný objekt geometrického světa. Způsob jak ji vytváříme je před obzorem naší zkušenosti a proto náleží do standardního geometrického světa. V nestandardním světě je jejím obrazem rozšířená posloupnost $(a^*_p)_{p\geq 0}$, která je definována i pro nestandardní přirozená čísla stejným předpisem $a^*_p = 1/2^p$ jako ve světě standardním. Posloupnost $a_n = \alpha^n$, kde $\alpha \in \mathbb{R}^0$ je infinitesimální nenulové reálné číslo, je objekt nestandardního geometrického světa, který není obrazem žádné standardní posloupnosti. Definujeme-li posloupnost $(a_n)_n$ předpisem $a_n = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$ pro $n \in \mathbb{N}^\infty$, dostáváme objekt, který není posloupností ani v nestandardním světě. Není definována totiž uvnitř nestandardního světa, ale pomocí obou světů. Stejně jako u standardních čísel, budeme i u obrazů standardních posloupností vynechávat symbol $*$. Je-li $(a_n)_{n\geq 0}$ posloupnost ve standardním světě, zapisujeme a_p hodnotu jejího obrazu i na nestandardních $p \in \mathbb{N}^*$.

Reálná funkce $P(x) = x(\frac{1}{2} - x)$ se nachází ve standardním geometrickém světě a je definována pro standardní reálná čísla. Jejím obrazem v nestandardním světě je funkce $P^*(x)$, která je definována stejným vzorcem i pro nestandardní reálná čísla. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ definujme (ve standardním světě) reálnou funkci γ_a předpisem $\gamma_a(0) = a$, $\gamma_a(x) = 0$ pro $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. V nestandardním světě můžeme pro každé $a \in \mathbb{R}^*$ definovat funkci δ_a předpisem $\delta_a(0) = a$, $\delta_a(x) = 0$ pro $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^*$. Je-li $a \in \mathbb{R}$, je funkce $\delta_a = \gamma^*_a$ obrazem funkce γ_a. Je-li však $a \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$, není funkce δ_a obrazem žádné standardní funkce. Také u funkcí budeme symbol $*$ vynechávat a značit stejným symbolem funkci ve standardním světě i její nestandardní rozšíření.

1.4 Monády

Každé standardní reálné číslo a je obklopeno souborem nekonečně blízkých nestandardních reálných čísel. Tento soubor nazýváme jeho monádou a značíme ho $a^\bullet$ (monády nejsou množiny). Monády příslušející různým reálným číslům jsou disjunktní a těsně k sobě přiléhají. Každé konečně velké nestandardní číslo do nějaké monády náleží. Monády nemají nejmenší ani největší prvek, v tomto smyslu nemají ostré hranice. Kromě těchto monád konečně velkých čísel ještě uvažujeme monádu nekonečna, tj. soubor nekonečně velkých čísel $\mathbb{R}^\infty$, který též značíme $\pm\infty$. Tuto monádu nazýváme nevlastní, monády příslušející standardním reálným číslům nazýváme vlastní. Monády tvoří rozklad souboru $\mathbb{R}^*$ nestandardních reálných čísel. Každé nestandardní reálné číslo patří právě do jediné monády. Pracujeme-li s nějakou podmnožinou $X \subseteq \mathbb{R}$, uvažujeme ještě monády relativizované na X, tj. soubory tvaru $A \cap X^*$, kde A je úplná monáda a $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina reálných čísel.

Definice 6 *Úplné monády jsou soubory*

$$a^\bullet = \{x \in \mathbb{R}^* : x \approx a\}, \ \ \pm\infty = \mathbb{R}^\infty$$

Relativizovaná monáda je každý soubor tvaru $A \cap X^*$, kde A je úplná monáda a $X \subseteq \mathbb{R}$ je standardní množina reálných čísel.

Termín monáda budeme nadále používat ve smyslu relativizovaná monáda. Pro $a \in \mathbb{R}$ označme

$$\begin{array}{rcll} a^\bullet & = & \{x \in \mathbb{R}^* : a \approx x\} & \text{úplná monáda } a \\ a^\pm & = & \{x \in \mathbb{R}^* : a \approx x \neq a\} & \text{prstencová monáda } a \\ a^- & = & \{x \in \mathbb{R}^* : a \approx x < a\} & \text{levá monáda } a \\ a^+ & = & \{x \in \mathbb{R}^* : a \approx x > a\} & \text{pravá monáda } a \\ a & = & \{a\} & \text{bodová monáda } a \end{array}$$

Tyto monády nazýváme vlastní. Dále uvažujeme nevlastní monády

$$\begin{array}{rcll} \pm\infty & = & \mathbb{R}^\infty & \text{úplná monáda nekonečna} \\ +\infty & = & \{x \in \mathbb{R}^\infty : x > 0\} & \text{kladné nekonečno} \\ -\infty & = & \{x \in \mathbb{R}^\infty : x < 0\} & \text{záporné nekonečno} \end{array}$$

Monády srovnáváme podle velikosti a používáme na ně aritmetické operace. Jsou-li A, B monády, definujeme

$$\begin{array}{rcl} A < B & \Leftrightarrow & (\forall x \in A)(\forall y \in B)(x < y) \\ A \leq B & \Leftrightarrow & (\forall x \in A)(\forall y \in B)(x \leq y) \end{array}$$

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $-\infty < a < +\infty$, neplatí však ani $a < \pm\infty$ ani $\pm\infty < a$. Aritmetické operace s monádami definujeme

$$\begin{array}{rcl} A + B & = & \{x + y : x \in A,\ \ y \in B\} \\ A - B & = & \{x - y : x \in A,\ \ y \in B\} \\ AB & = & \{xy : x \in A,\ \ y \in B\} \\ \dfrac{A}{B} & = & \left\{\dfrac{x}{y} : x \in A,\ \ y \in B\right\} \\ \sqrt[n]{A} & = & \{\sqrt[n]{x} : x \in A\} \end{array}$$

pokud všechny výrazy, ze kterých jsou tyto soubory sestaveny, jsou definovány a pokud tyto soubory jsou monády. V opačném případě říkáme, že se jedná o neurčitý nebo nedefinovaný výraz. Například je-li $a \in \mathbb{R}$, je $a + \infty = +\infty$ (zde chápeme a jako bodovou monádu). Je-li totiž $x \in +\infty$, tj. je-li x nekonečně velké kladné číslo, je také $a + x$ nekonečně velké a kladné, takže $a + x \in +\infty$. To znamená, že $a + \infty$ je podsouborem $+\infty$. Naopak každé $y \in +\infty$ lze psát ve tvaru $y = a + (y - a)$ a $y - a \in +\infty$, takže $+\infty$ je podsouborem $a + \infty$. Podobně ukážeme

$$a + \infty = +\infty,\ \ a - \infty = -\infty,\ \ +\infty + \infty = +\infty.$$

Je-li $a > 0$, je

$$+\infty \cdot a = +\infty,\ \ \frac{+\infty}{a} = +\infty,\ \ \frac{a}{+\infty} = 0^+,\ \ \frac{a}{-\infty} = 0^-,\ \ \frac{a}{0^+} = +\infty$$

$$+\infty\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty,\quad \sqrt[n]{+\infty}=+\infty.$$

Pro vlastní monády je $0^+ + 0^+ = 0^+$, $0^+ + 0^- = 0^\bullet$ (sčítáme-li kladná infinitesimální čísla se zápornými, dostaneme všechna infinitesimální čísla včetně nuly). Z tvrzení 5 plyne, že pro každá dvě reálná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a+b)^\bullet = a^\bullet + b^\bullet,\quad (a-b)^\bullet = a^\bullet - b^\bullet,\quad (a\cdot b)^\bullet = a^\bullet \cdot b^\bullet$$

a pokud $b \neq 0$ též $(a/b)^\bullet = a^\bullet/b^\bullet$.

Často však výsledkem aritmetické operace s monádami není monáda. Říkáme pak, že je to neurčitý výraz. Například $\pm\infty+(\pm\infty)$ je celý soubor $\mathbb{R}^*$ nestandardních čísel, protože každé $x \in \mathbb{R}^*$ lze psát jako součet dvou nekonečně velkých čísel. Je-li x konečně velké a $y \in \mathbb{R}^\infty$, pak $x = y + (x-y)$, je-li $x \in \mathbb{R}^\infty$, pak $x = 2x + (-x)$. Výraz $\pm\infty+(\pm\infty)$ je tedy neurčitý. Podobně jsou neurčité výrazy $0^\bullet\cdot(\pm\infty)$ (zatímco $0\cdot(\pm\infty)=0$). Také výraz $\frac{1}{0^\bullet}$ je neurčitý, protože obsahuje nedefinovaný výraz $\frac{1}{0}$. Ze stejného důvodu je Také $\sqrt{-\infty}$ neurčitý výraz. Další neurčité výrazy jsou

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad \frac{0^\pm}{0^\pm},\quad \pm\infty\cdot 0^\bullet,\quad +\infty-\infty.$$

Pro aritmetické operace s monádami neplatí distributivní zákon. Jsou-li A, B, C monády, je $A(B+C) \subseteq AB + AC$, rovnost zde však vždy neplatí. Je-li totiž $x \in A(B+C)$, existují $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ pro která $x = a(b+c) = ab + ac$, takže $ab \in AB$, $ac \in AC$ a $x \in AB + AC$. Je-li však $x \in AB + AC$, existují $a_1, a_2 \in A$, $b \in B$, $c \in C$ pro které $x = a_1 b + a_2 c$ ale a_1 a a_2 mohou být různá, takže x nemusí náležet do $A(B+C)$. Například $0^+\cdot(1-0^+) = 0^+\cdot 1^- = 0^+$, zatímco $0^+\cdot 1 - 0^+\cdot 0^+ = 0^+ - 0^+ = 0^\bullet$. I pro monády však platí zákony komutativní a asociativní $A+B = B+A$, $(A+B)+C = A+(B+C)$ a podobně pro násobení.

Cvičení. Určete

1. $-\infty-\infty$	2. $-\infty\cdot(+\infty)$
3. $0^+\cdot 0^-$	4. $\dfrac{0^+}{0^-}$
5. $\dfrac{+\infty}{-\infty}$	6. $1+0^-$
7. $2^+ - 1^-$	8. $\dfrac{-1}{\pm\infty}$