Kapitola 10

KOMPLEXNÍ ČÍSLA A FUNKCE

Hlavní motivace zavedení komplexních čísel je řešení algebraických rovnic. Kvadratická rovnice, jejíž diskriminant je záporný, nemá v reálných číslech řešení, přesto však v mnoha situacích je užitečné s jejím řešením pracovat. Rovnice třetího stupně $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ vždy alespoň jeden kořen má. Limita této funkce v $-\infty$ je $-\infty$ a limita v $+\infty$ je $+\infty$, takže podle Bolzanovy věty o mezihodnotě 41 její řešení existuje. K jeho nalezení však někdy s reálnými čísly nevystačíme.

Rovnici $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ se pokoušíme řešit podobným způsobem jako rovnici kvadratickou řešíme doplněním na čtverec

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - 3x\frac{a^2}{9} - \frac{a^3}{27} + bx + c = 0$$

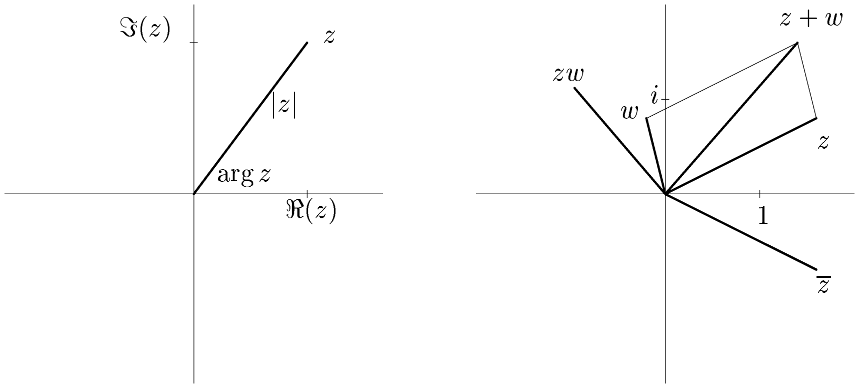
Tím z rovnice vypadne kvadratický člen. Zavedeme-li novou neznámou $y = x + a/3$, dostáváme rovnici $y^3 = 3py + 2q$, kde $p = a^2/9 - b/3$ a $q = a^3/54 - c/2$. Řešení rovnice $y^3 = 3py + 2q$ hledáme ve tvaru $y = u + v$.

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 3p(u + v) + 2q.$$

Pro neznámé u, v volíme další rovnici $uv = p$, tak aby se rovnice zjednodušila na $u^3 + v^3 = 2q$. Dosazením $v = p/u$ dostáváme pro u^3 kvadratickou rovnici $u^6 - 2qu^3 + p^3 = 0$ s řešením $u^3 = q \pm \sqrt{q^2 - p^3}$. Vzhledem k symetrii mezi u a v platí stejný vzorec i pro v^3. Protože $uv = p$, musí tato řešení mít opačná znaménka, například $u^3 = q + \sqrt{q^2 - p^3}$ a $v^3 = q - \sqrt{q^2 - p^3}$. Odtud

$$y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Chápeme-li třetí odmocninu jako funkci definovanou na celé reálné přímce, platí řešení pokud $q^2 - p^3 \geq 0$. Rovnice má však řešení i v případě že $q^2 - p^3 < 0$. Ukazuje se, že v tomto případě platí vzorec také, reálné řešení se ale získá odmocňováním komplexních čísel.



Obrázek 10.1: Komplexní rovina

Komplexní čísla jsou výrazy tvaru $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ jsou reálná čísla a i je symbol pro imaginární jednotku, jejíž druhá mocnina je -1. Komplexní číslo $z = x + iy$ je určeno svou reálnou složkou $x = \Re(z)$, a imaginární složkou $y = \Im(z)$. S komplexními čísly počítáme jako s algebraickými výrazy s použitím identity $i^2 = -1$.

$$
\begin{aligned}
(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\
(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}
$$

Geometrická povaha aritmetických operací s komplexními čísly vynikne, ztotožníme-li je s body roviny s pravoúhlou souřadnou soustavu. Komplexnímu číslu $z = x + iy$ odpovídá bod se souřadnicemi $[x, y]$. Tato geometrická reprezentace vede na alternativní vyjádření komplexních čísel polárními souřadnicemi. Absolutní hodnota $|z|$ komplexního čísla z je norma vektoru $[x, y]$, tj. $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Argument $\arg z$ nenulového komplexního čísla $z \neq 0$ je úhel, který úsečka spojující body 0 a z svírá s osou x. Pro $z = x + iy$ je $\arg z = \varphi$ právě když $x = |z| \cos \varphi$, $y = |z| \sin \varphi$ a $0 \leq \varphi < 2\pi$. Pro každé $z \neq 0$ je tedy

$$
z = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z)
$$

Sčítání komplexních čísel odpovídá sčítání vektorů. Geometrickou povahu násobení a dělení komplexních čísel vidíme z jejich polární reprezentace. Ze součtových vzorců pro sinus a kosinus totiž plyne

$$
\begin{aligned}
&r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\
&\quad = \quad r_1r_2(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +ir_1r_2(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2) \\
= \quad & r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{1}{r}(\cos\varphi-i\sin\varphi)$$

Komplexní čísla se tedy násobí tak, že se násobí jejich absolutní hodnoty a sčítají jejich argumenty. Při dělení komplexních čísel podobně dělíme jejich absolutní hodnoty a odčítáme argumenty.

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2 \bmod 2\pi$$
$$|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|,\quad \arg(z_1/z_2)=\arg z_1-\arg z_2 \bmod 2\pi$$

Vzdálenost dvou komplexních čísel $z,w\in\mathbb{C}$ je absolutní hodnota jejich rozdílu $|z-w|$. Pro trojúhelník s vrcholy 0, z a $-w$, jehož hrany mají délky $|z|$, $|w|$ a $|z+w|$, platí trojúhelníková nerovnost

$$|z|-|w|\le|z+w|\le|z|+|w|$$

Pro komplexní číslo $z=x+iy$ nazýváme $\overline{z}=x-iy$ číslo k němu komplexně sdružené. V komplexní rovině jsou čísla z a $\overline{z}$ umístěna symetricky podle reálné osy. Pomocí operace komplexního sdružení lze určit reálnou a imaginární složku komplexního čísla.

$$\Re(z)=\frac{z+\overline{z}}{2},\ \ \Im(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

Speciálně číslo z je reálné právě když $z=\overline{z}$. Snadno ověříme, že operace komplexního sdružení se zachovává při aritmetických operacích, tj.

$$\overline{z_1+z_2}+\overline{z_1}+\overline{z_2},\ \ \overline{z_1z_2}+\overline{z_1}\overline{z_2},\ \ \overline{-z}=-\overline{z},\ \ \overline{1/z}=1/\overline{z}$$

10.1 Komplexní funkce

Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}=\{x+iy\ :\ x,y\in\mathbb{R}\}$ a nazýváme ji též komplexní rovinou. Je to stejná množina jako aritmetický prostor $\mathbb{R}_2$, v $\mathbb{C}$ však máme ještě další aritmetické operace násobení a dělení, které v $\mathbb{R}_2$ nejsou. V nestandardním geometrickém světě odpovídá množině komplexních čísel množina nestandardních komplexních čísel a v ní jsou soubory infinitesimálních (nekonečně malých) a nekonečně velkých komplexních čísel.

$$
\begin{array}{ll}
\mathbb{C}^*=\{x+iy:\ x,y\in\mathbb{R}^*\} & \text{nestandardní}\\
\mathbb{C}^\infty=\{x+iy\in\mathbb{C}^*:\ x\in\mathbb{R}^\infty\ \text{ nebo }\ y\in\mathbb{R}^\infty\} & \text{nekonečně velká}\\
\mathbb{C}^0=\{x+iy\in\mathbb{C}^*:\ x\in\mathbb{R}^0\ \text{ a }\ y\in\mathbb{R}^0\} & \text{nekonečně malá}
\end{array}
$$

Nestandardní komplexní čísla $z,w\in\mathbb{C}^*$ jsou nekonečně blízká, je-li jejich rozdíl infinitesimální.

$$z\approx w\quad\Leftrightarrow\quad z-w\in\mathbb{C}^0$$

Monáda čísla $c \in \mathbb{C}$ je soubor $c^\bullet = \{z \in \mathbb{C}^* : c \approx z\}$. Monáda nekonečna je soubor $\infty = \mathbb{C}^\infty$. Relativizovaná monáda je každý soubor tvaru $c^\bullet \cap X^*$ nebo $\mathbb{C}^\infty \cap X^*$, kde $X \subseteq \mathbb{C}$ je množina komplexních čísel. Operace projekce $\mathfrak{P} : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}$ je definována po složkách $\mathfrak{P}(x+iy) = \mathfrak{P}(x) + i\mathfrak{P}(y)$. Prstencová monáda čísla $c \in \mathbb{C}$ je

$$c^\circ = \{z \in \mathbb{C}^* : c \approx z \neq c\}$$

Na rozdíl od reálné přímky nemáme v komplexní rovině žádné přirozeně definované uspořádání. Proto prstencové monády značíme spíše $\circ$ než $\pm$. Monádu nekonečna značíme ∞, protože v komplexní oblasti jednostranné submonády nekonečna nemáme.

Pro aritmetiku nestandardních komplexních čísel platí obdobné zákonitosti jako v reálném případě.

Tvrzení 285 *Nechť $x, y, u, v, \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$, $x \approx u$, $y \approx v$.*

1. Je-li $\alpha \in \mathbb{C}^0$ a $x \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{C}^\infty$, pak $x\alpha \in \mathbb{C}^0$.

2. Je-li $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^0$, pak $\alpha + \beta \in \mathbb{C}^0$.

3. $x \approx x$

4. $x \approx y \;\Rightarrow\; y \approx x$

5. $x \approx y$, $y \approx z \;\Rightarrow\; x \approx z$

6. $x + y \approx u + v$.

7. $x - y \approx u - v$.

8. Je-li $x, y \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{C}^\infty$, je $xy \approx uv$.

9. Je-li $x \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{C}^\infty$ a $y \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{C}^0$, je $\frac{x}{y} \approx \frac{u}{v}$.

Důkaz: 1. Je-li $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $x = x_1 + ix_2$ a podle předpokladu $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^0$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^\infty$. Odtud $x_1\alpha_1 - x_2\alpha_2 \in \mathbb{R}^0$ a $x_1\alpha_2 + x_2\alpha_1 \in \mathbb{R}^0$, takže $x\alpha \in \mathbb{C}^0$. Další body tvrzení se dokazují stejně jako v reálné oblasti s vyjímkou bodu 9. Nechť $y = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $v = s(\cos\psi + i\sin\psi)$, $y \notin \mathbb{C}^0$, $y \approx v$. Pak r a tedy ani s nejsou infinitesimální a $r \approx s$, takže $\frac{y}{r} \approx \frac{v}{s}$. To znamená, že $\cos\varphi \approx \cos\psi$ a $\sin\varphi \approx \sin\psi$, takže $\varphi \approx \psi$, $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{s}$ a tedy $\frac{1}{y} \approx \frac{1}{v}$. □

Komplexní funkce je zobrazení, které komplexním číslům přiřazuje komplexní čísla, tj. $f : {}_{\subseteq}\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Alternativně se na komplexní funkce díváme jako na rovinnou transformaci $[f_1, f_2] : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$, kde f_1, f_2 jsou reálné funkce dvou proměnných. Je tedy

$$f(x+iy) = f_1(x,y) + if_2(x,y)$$

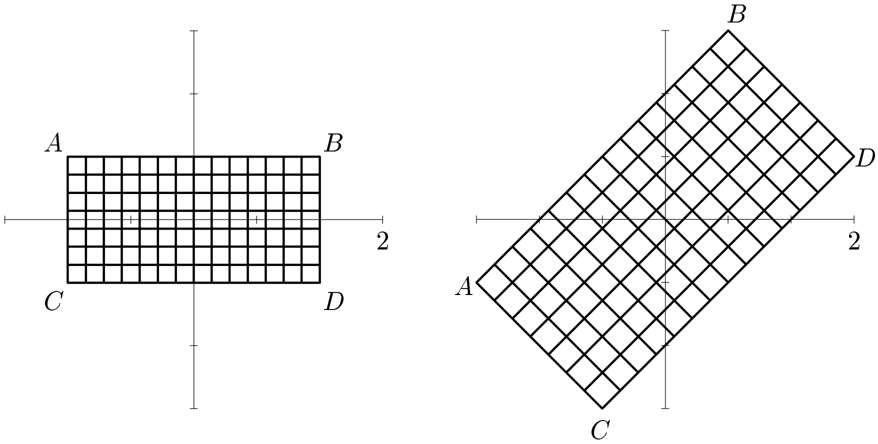
Spojitost a limity komplexních funkcí převádíme na spojitost a limity příslušných rovinných transformací. Například funkce reálné části $\Re(z)$, imaginární části $\Im(z)$ a komplexního sdružení $\overline{z}$ a absolutní hodnoty $|z|$ jsou spojité. Je-li $z = z_1 + iz_2$, $w = w_1 + iw_2$ a $z \approx w$, je $z_1^2 + z_2^2 \approx w_1^2 + w_2^2$, a protože reálná funkce druhé odmocniny je spojitá, je i $|z| \approx |w|$. Funkce $\arg z$ je spojitá ve všech komplexních číslech kromě reálných nezáporných. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ pro které $\Im(z) > 0$ je totiž $\arg z = \arccos \frac{\Re z}{|z|}$

složení spojitých funkcí a tedy je spojitá. Je- li $\Im(z) < 0$, je $\arg z = 2\pi - \arccos \frac{\Re z}{|z|}$ opět spojitá funkce. Nakonec je-li $\Re(z) < 0$, je $\arg z = \pi - \arcsin \frac{\Im z}{|z|}$, takže $\arg z$ je spojitá i v reálných záporných číslech. Funkce argumentu však není spojitá v kladných reálných číslech. Je-li $z > 0$ a α kladné infinitesimální, je $\arg(z + i\alpha) \approx 0$, zatímco $\arg(z - i\alpha) \approx 2\pi$.

Nespojitost funkce $\arg z$ na kladných reálných číslech je svázána s její konvenční definicí. Definujeme-li pro $z \neq 0$ funkci $\arg_1(z)$ jako jediné reálné číslo pro které $-\pi < \arg_1(z) \leq \pi$ a $z = |z|(\cos \arg_1 z + i \sin \arg_1 z)$, dostáváme funkci, která je spojitá všude kromě záporných reálných čísel. Obecně říkáme, že funkce Arg definovaná na nějaké množině komplexních čísel je funkcí argumentu, je-li spojitá a platí-li

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k_z$$

kde $k_z \in \mathbb{Z}$ je celé číslo, které závisí na z.



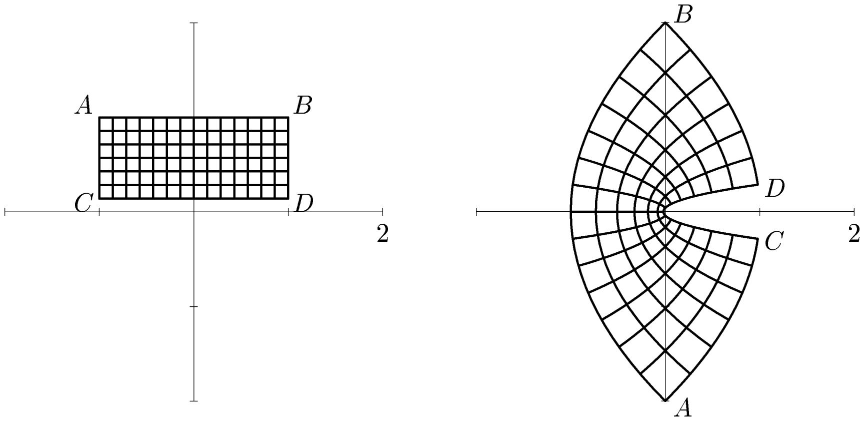
Obrázek 10.2: $f(z) = (1 + i)z$

Mnohočleny jsou komplexní funkce $P(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$ s komplexními koeficienty $c_0, \ldots, c_n$. Každý mnohočlen je spojitá funkce. Není-li konstantní, tj. je-li jeho stupeň větší než nula, je $\lim\limits_{z\to\infty} P(z) := \infty$. Podle trojúhelníkové nerovnosti je totiž

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |c_n z^n| - |c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0| \\ &\geq |c_n| \cdot |z|^n - |c_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} - \cdots - |c_0| \end{aligned}$$

a limita reálného mnohočlenu na pravé straně je $+\infty$.

Graf funkce komplexní proměnné je podmnožina čtyřrozměrného prostoru. Komplexní funkce proto znázorňujeme křivkami, na které se zobrazí pravoúhlá rovinná síť. Lineární funkce $f(z) = z + c$ je posunutí o vektor c. Je to shodná transformace, při které se nemění vzdálenosti. Násobení kladnou reálnou konstantou $f(z) = rz$ je



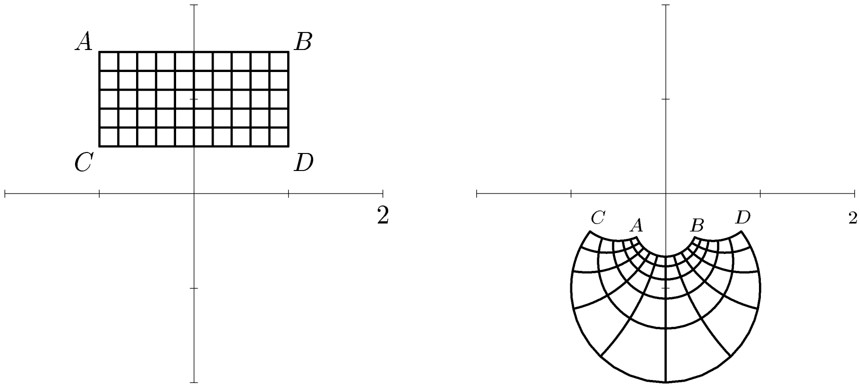
Obrázek 10.3: $f(z) = z^2$

podobnost s koeficientem r a středem 0 (zmenšení pro $r < 1$, zvětšení pro $r > 1$). Je-li $c = \cos\varphi + i\sin\varphi$ komplexní číslo s jednotkovou absolutní hodnotou, je funkce $f(z) = cz$ otočení o úhel φ. V obecném případě $c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ dostáváme kombinaci těchto dvou zobrazení: $f(z) = cz$ je otočení o úhel φ následované podobností s koeficientem r. Funkce $f(z) = (1+i)z$ je otočení o $\frac{\pi}{4}$ a zvětšení v poměru $\sqrt{2}$ (obr. 10.2). Všechny lineární funkce $f(z) = c_0 + c_1 z$, $c_1 \neq 0$ jsou vzájemně jednoznačné podobnosti a mají inverzní funkci $f^{-1}(z) = (z - c_0)/c_1$.

Geometrie kvadratického zobrazení $f(z) = z^2$ je nejlépe vidět v polárním tvaru. Je-li $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, je $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$. Zdvojnásobuje se tedy argument a umocňuje se absolutní hodnota. Kladný kvadrant $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z), \Im(z) > 0\}$ přitom přechází na horní polorovinu $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\}$, a tato horní polorovina přechází na celou komplexní rovinu. Vodorovná přímka ve vzdálenosti a od počátku s parametrickou rovnicí $z = t + ia$ přechází na křivku $z^2 = t^2 - a^2 + 2ita$. To je parabola s rovnicí $x = (y/2a)^2 - a^2$, jejíž osou je osa x a vrchol je v bodě $-a^2$ (obr. 10.3). Pro osu x je $a = 0$ a obě větve paraboly přechází na kladnou poloosu x. Svislá přímka ve vzdálenosti a od počátku s parametrickou rovnicí $z = a + ti$ přechází na křivku $z^2 = a^2 - t^2 + 2ita$. To je parabola s rovnicí $x = a^2 - (y/2a)^2$, jejíž osou je osa x a vrchol je v bodě a^2. Pro osu y je $a = 0$ a obě větve paraboly přechází na zápornou poloosu x. Každý nenulový bod $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ má právě dva vzory (odmocniny) $z_1 = \sqrt{r}(\cos\varphi/2 + i\sin\varphi/2)$ a $z_2 = -z_1$.

Analogicky pro funkci $f(z) = z^n$ se úhly n-násobí. Každé nenulové komplexní číslo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ má právě n n-tých odmocnin $z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Racionální lomená funkce je podíl dvou mnohočlenů. Funkce $f(z) = 1/z$ převádí vodorovnou přímku $z = t + ia$ ve vzdálenosti a od počátku na kružnici se středem $-i/2a$ a poloměrem $1/2a$. Je totiž $1/(t+ia) = (t-ia)/(t^2+a^2)$ a reálná a imaginární



Obrázek 10.4: $f(z) = 1/z$

složka splňují rovnici kružnice

$$\left(\frac{t}{t^2+a^2}\right)^2 + \left(\frac{-a}{t^2+a^2} + \frac{1}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a^2}$$

Kružnice prochází bodem 0, ten je však jediný v obraze vodorovné přímky vynechán. Podobně svislou přímku $z = t+ia$ ve vzdálenosti a od počátku na kružnici se středem $1/2a$ a poloměrem $1/2a$. Z toho plyne, že zobrazení $1/z$ převádí na kružnici každou přímky, která neprochází nulou. Pro vhodnou komplexní jednotku c totiž funkce cz převádí tuto přímku na přímku rovnoběžnou s osou x, kterou funkce $1/z$ převádí na kružnici. Tuto kružnici pak otočení cz převádí opět na kružnici. Ta je ale obrazem původní přímky, protože $1/z = c \cdot \frac{1}{cz}$. Pouze přímku $z = tc$ procházející nulou převádí funkce $1/z$ opět na přímku $1/tc$.

10.2 Základní věta algebry

Věta 286 (Základní věta algebry) *Každý komplexní mnohočlen $P(z)$ stupně alespoň 1 má alespoň jeden komplexní kořen, tj. existuje $z \in \mathbb{C}$ pro které $P(z) = 0$.*

Důkaz: Ukážeme, že funkce $|P(z)|$ nabývá nejmenší hodnotu. Protože $\lim_{z\to\infty} P(z) := \infty$, existuje $r > 0$ takové, že pro každé $|z| > r$ je $|P(z)| > |P(0)|$. Jednotkový kruh $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \le 1\}$ je kompaktní, takže funkce $|P(z)|$ má na něm nejmenší hodnotu v nějakém bodě z_0. Pak $|P(z_0)| \le |P(z)|$ pro každé $z \in \mathbb{C}$. Není-li totiž $z \in D$, je $|P(z)| > |P(0)| \ge |P(z_0)|$. Ukážeme, že $P(z_0) = 0$. Předpokládejme sporem, že $|P(z_0)| > 0$ a položme $Q(z) = P(z + z_0)$. Q je také mnohočlen a jeho absolutní hodnota má kladné minimum v nule. Je totiž

$$|Q(z)| = |P(z + z_0)| \ge |P(z_0)| = |Q(0)| > 0$$

Pišme $Q(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$, takže $Q(0) = c_0 \ne 0$. Nechť k je nejmenší přirozené číslo $k > 0$ pro které $c_k \ne 0$. Takové k existuje, protože stupeň P je alespoň 1. Pohybuje-li se bod z po kružnici s infinitesimálním poloměrem kolem nuly, pohybuje se bod $c_0 + c_k z^k$ po kružnici s infinitesimálním poloměrem kolem bodu c_0 a celou ji proběhne k-krát. Přitom absolutní hodnota $c_0 + c_k z^k$ musí někdy klesnout pod $|c_0|$. Zvolme tedy komplexní d pro které $d^k = -c_0/c_k$ a pro infinitesimální kladné α položme $z = \alpha d$. Pak $c_k z^k = c_k \alpha^k d^k = -c_0 \alpha^k$, takže

$$\begin{aligned} |Q(z)| &= |c_0(1-\alpha^k) + \alpha^{k+1}(c_{k+1}d^{k+1} + \cdots + c_n \alpha^{n-k-1} d^n)| \\ &\leq |c_0|(1-\alpha^k) + \alpha^{k+1}|(c_{k+1}d^{k+1} + \cdots + c_n \alpha^{n-k-1} d^n)| \\ &< |c_0| = |Q(0)| \end{aligned}$$

a to je spor. □

Věta 287 *Každý komplexní mnohočlen $P(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$, kde $c_n \neq 0$, lze rozložit na součin lineárních členů, tj. existují komplexní čísla $z_1, z_2, \ldots, z_n$, pro která $P(z) = c_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$.*

Důkaz: Podle základní věty algebry existuje z_1 pro které $P(z_1) = 0$. Z toho plyne

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z) - P(z_1) = c_1(z - z_1) + \cdots + c_n(z^n - z_1^n) \\ &= (z - z_1)\left(c_1 + c_2(z + z_1) + \cdots + c_n(z^{n-1} + \cdots + z_1^{n-1})\right) \end{aligned}$$

Na pravé straně je lineární člen $(z - z_1)$ násoben mnohočlenem stupně $n - 1$. Opakujeme-li tento postup n-krát, dostáváme rozklad mnohočlenu $P(z)$ na lineární členy. □

V rozkladu mnohočlenu na lineární členy se mohou některé členy opakovat. V takovém případě rozklad mnohočlenu lze zapsat ve tvaru

$$P(z) = c_n(z - z_1)^{r_1} \cdots (z - z_k)^{r_k}$$

kde $r_1 + \cdots + r_k = n$ je stupeň mnohočlenu. Říkáme pak, že kořen z_i mnohočlenu P má násobnost r_i.

Tvrzení 288 *Nechť $P(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$ je mnohočlen s reálnými koeficienty $a_0, \ldots, a_n$. Má-li P komplexní kořen z, má i komplexně sdružený kořen $\overline{z}$.*

Důkaz: Protože koeficienty a_i jsou reálná čísla, je $\overline{a_i} = a_i$. Protože operace komplexního sdružení se zachovává při aritmetických operacích, je

$$0 = \overline{P(z)} = \overline{a_0} + \cdots + \overline{a_n z^n} = a_0 + a_1 \overline{z} + \cdots a_n \overline{z}^n = P(\overline{z})$$

Sdružíme-li spolu dva lineární členy s komplexně sdruženými kořeny $a + bi$ a $a - bi$, dostáváme reálný kvadratický mnohočlen

$$(x - a - ib)(x - a + ib) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

Z toho plyne

Věta 289 *Každý mnohočlen s reálnými koeficienty lze rozložit na součin lineárních a kvadratických reálných členů.*

10.3 Derivace komplexní funkce

Definice 290 *Funkce komplexní proměnné f má v bodě z derivaci $f'(z)$, jestliže*

$$f'(z) = \lim_{c\to 0} \frac{f(z+c) - f(z)}{c}$$

Funkce f komplexní proměnné je holomorfní, jestliže $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina, a f má v každém $z \in \mathcal{D}(f)$ derivaci.

Je-li $f'(z) \neq 0$, je pro každé infinitesimální nenulové komplexní $\gamma \in \mathbb{C}^0$

$$\frac{f(z+\gamma) - f(z)}{\gamma f'(z)} \approx 1$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned} \arg(f(z+\gamma) - f(z)) &\approx \arg(f'(z)) + \arg(\gamma) \\ \frac{|f(z+\gamma) - f(z)|}{|\gamma|} &\approx |f'(z)| \end{aligned}$$

Na monádě bodu z působí tedy zobrazení f jako podobnost: otáčí ji o úhel $\arg f'(z)$ a zvětšuje ji (nebo zmenšuje) v poměru $|f'(z)|$. Má-li funkce f nenulovou derivaci v otevřené množině U, zachovává úhly křivek. Říkáme, že zobrazení je tam konformní. Například soustava parabol, na které zobrazení z^2 převádí vodorovné a svislé přímky, je na sebe kolmá (obr. 10.3), stejně tak soustava kružnic, které jsou obrazem vodorovných a svislých přímek při zobrazení $1/z$. (obr. 10.4). Tato geometrická vlastnost naznačuje, že existence derivace je značně silná podmínka

Věta 291 *Komplexní funkce $f(x+iy) = f_1(x,y) + i f_2(x,y)$ má v bodě $z = x+iy$ derivaci, praávě když rovinná transformace $[f_1, f_2]$ má v bodě $[x,y]$ diferenciál a platí Cauchy-Riemannovy podmínky*

$$\partial_1 f_1(x,y) = \partial_2 f_2(x,y), \;\; \partial_1 f_2(x,y) = -\partial_2 f_1(x,y)$$

Důkaz: Předpokládejme, že f má v bodě $z = x+iy$ derivaci $f'(z) = \lim\limits_{c\to 0} \frac{f(z+c)-f(z)}{c}$. Za komplexní číslo c dosadíme buď reálné číslo $c = a$ nebo imaginární číslo $c = ib$.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{a\to 0} \frac{f_1(x+a,y) - f_1(x,y)}{a} + \lim_{a\to 0} i \frac{f_2(x+a,y) - f_2(x,y)}{a} \\ &= \partial_1 f_1(x,y) + i \cdot \partial_1 f_2(x,y) \\ f'(z) &= \lim_{b\to 0} \frac{f_1(x,y+b) - f_1(x,y)}{ib} + \lim_{b\to 0} i \frac{f_2(x,y+b) - f_2(x,y)}{ib} \\ &= -i\partial_2 f_1(x,y) + \partial_2 f_2(x,y) \end{aligned}$$

Srovnáním těchto dvou identit již dostáváme Cauchy-Riemannovy podmínky. Pro $c = a + bi$ je

$$\begin{aligned} 0 &\approx \frac{f(z+c) - f(z) - cf'(z)}{|c|} \\ &= \frac{f_1(x+a, y+b) - f_1(x,y) - \partial_1 f_1(x,y)a - \partial_2 f_1(x,y)b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \\ &\quad i \cdot \frac{f_2(x+a, y+b) - f_2(x,y) - \partial_1 f_2(x,y)a - \partial_2 f_2(x,y)b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

takže $[f_1, f_2]$ má v $[x, y]$ diferenciál, Předpokládejme naopak, že $[f_1, f_2]$ má v bodě $[x, y]$ diferenciál a jsou splněny Cauchy-Riemannovy podmínky. Pro $z = x + iy$ položme

$$f'(z) = \partial_1 f_1(x,y) - i\partial_2 f_1(x,y) = \partial_2 f_2(x,y) + i\partial_1 f_2(x,y)$$

Pak pro každé infinitesimální $c = a+bi$ je $\frac{f(z+c)-f(z)-cf'(z)}{|c|}$ infinitesimální a z toho plyne, že $f'(z)$ je derivace f. □

Tvrzení 292 *Nechť f, g jsou funkce komplexní proměnné, $z \in \mathbb{C}$*

1. $(f+g)'(z) := f'(z) + g'(z)$
2. $(cf)'(z) := cf'(z)$ *pro* $c \in \mathbb{C}$.
3. $(fg)'(z) := f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
4. $\left(\frac{1}{g}\right)'(z) := \frac{-g'(z)}{g^2(z)}$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) := \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}$
6. $(f \circ g)'(z) := f'(g(z)) \cdot g'(z)$

Důkaz je stejný jako v reálné oblasti (viz věta 61 a 62). Protože derivace konstantní funkce je nulová, a derivace identické funkce je jednotková, je každý mnohočlen a každá racionální lomená funkce holomorfní. Pro jejich derivace platí stejné vzorce jako v reálném oboru.

Tvrzení 293 *Nechť f je komplexní funkce a v bodě $c \in \mathcal{D}(f)$ je $f'(c) \neq 0$. Pak existují otevřené množiny $U \ni c$, $V \ni f(c)$ takové, že $f(U) = V$ a pro každé $w \in V$ existuje právě jedno $z = g(w)$, pro které $f(z) = w$. Funkce $g = f^{-1}$ má v každém bodě derivaci*

$$g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}$$

Důkaz: Nechť $c = a + bi$, $f'(c) \neq 0$. Podle Cauchy-Riemannovy věty 291 je

$$f'(c) = \partial_1 f_1(c) + i\partial_1 f_2(c) = \partial_2 f_2(c) - i\partial_2 f_1(c)$$

Jacobián rovinné transformace $[f_1, f_2]$ v bodě $[a, b]$ je pak

$$\left[\begin{array}{cc} \partial_1 f_1(a,b) & \partial_2 f_1(a,b) \\ \partial_1 f_2(a,b) & \partial_2 f_2(a,b) \end{array}\right] = |f'(c)| \cdot \left[\begin{array}{cc} \cos\arg f'(c) & -\sin\arg f'(c) \\ \sin\arg f'(c) & \cos\arg f'(c) \end{array}\right]$$

To je lineární zobrazení otočení o úhel $\arg f'(c)$ a podobnost s koeficientem $|f'(z)|$. Podle věty o inverzním zobrazení v bodě $f(c) = a_1 + ib_1$ existuje inverzní spojité zobrazení g s Jacobiánem

$$\left[\begin{array}{cc} \partial_1 g_1(a_1,b_1) & \partial_2 g_1(a_1,b_1) \\ \partial_1 g_2(a_1,b_1) & \partial_2 g_2(a_1,b_1) \end{array}\right] = \frac{1}{|f'(c)|} \cdot \left[\begin{array}{cc} \cos\arg f'(c) & \sin\arg f'(c) \\ -\sin\arg f'(c) & \cos\arg f'(c) \end{array}\right]$$

Jacobián inverzního zobrazení tedy opět splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky, takže g má v bodě $f(c)$ derivaci

$$g'(f(c)) = \frac{\cos\arg f'(c) - i\sin\arg f'(c)}{|f'(c)|} = \frac{1}{f'(c)} \quad \square$$

Funkce z^2 je prostá na horní polorovině $U = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ a má zde inverzní funkci, $f(z) = \sqrt{|z|}(\cos\arg(z)/2 + i\sin\arg(z)/2)$, která je spojitá a její definiční obor je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Podle tvrzení 293 zde f má derivaci $f'(z) = 1/2f(z)$. Druhá mocnina je prostá i na mnoha jiných otevřených množinách, například na každé polorovině vymezené libovolnou přímkou procházející nulou. Obecně pro každou funkci inverzní k druhé mocnině je

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k_z\pi}{2} + i\sin\frac{\arg z + 2k_z\pi}{2}\right)$$

pro vhodné celé k_z. Toto k_z závisí na z a při přechodu z přes reálnou osu se může nespojitě měnit, přesto že funkce sama je spojitá. Podobně pro každou funkci inverzní k n-té mocnině je

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k_z\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k_z\pi}{n}\right)$$

10.4 Mocninné řady

Teorie mocninných řad se zobecňuje i na komplexní oblast. Všechna tvrzení i důkazy jsou stejné jako v reálné oblasti. Posloupnost $(c_n)_n$ konverguje k $c \in \mathbb{C}$, jestliže pro každé $p \in \mathbb{N}^\infty$ je $c_p \approx c$. Posloupnost $(c_n)_n$ komplexních čísel konverguje absolutně, jestliže konverguje reálná posloupnost $(|c_n|)_n$. Každá absolutně konvergentní posloupnost je konvergentní, při přeuspořádání jejích členů se její součet nezmění.

Definice 294 *Mocninná řada se středem $c \in \mathbb{C}$ je komplexní funkce definovaná předpisem*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-c)^k$$

kde c_k je posloupnost komplexních čísel. Její poloměr konvergence je

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

Věta 295 *Nechť $r > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady $f(z) = \sum c_k z^k$. Pak*

1. $f(z)$ konverguje absolutně pro $|z| < r$

2. $f(z)$ nekonverguje pro $|z| > r$

3. $f(z)$ je spojitá v každém bodě $|z| < r$

4. V každém $|z| < r$ má $f(z)$ derivaci a primitivní funkci

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} z^k \\ F(z) &= c_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1} \end{aligned}$$

které mají stejný poloměr konvergence r.

Primitivní funkce je jednoznačně určena až na konstantu c_{-1}.

Tvrzení 296 *Nechť f je holomorfní funkce, jejíž definiční obor $\mathcal{D}(f) = B_r(c)$ je otevřený kruh. Jestliže $f'(z) = 0$ pro každé $z \in \mathcal{D}(f)$, pak f je konstantní.*

Důkaz: Předpokládejme sporem, že pro $z, z + w \in B_r(c)$ je $f(z) \neq f(z+w)$. Pro tato z, w uvažujme funkci $g(t) = f(z + tw)$ komplexní proměnné t. Pak $g'(t) = f'(z + tw)w = 0$ kdykoliv $z + tw \in B_r(c)$. Nechť $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ je reálná a imaginární složka $g(t)$. Pro t, a reálné platí

$$0 = g'(t) = \lim_{a\to 0} \frac{g_1(t+a) - g_1(t)}{a} + i \lim_{a\to 0} \frac{g_2(t+a) - g_2(t)}{a} = g_1'(t) + ig_2'(t)$$

na intervalu $t \in [0, 1]$ mají tedy reálné funkce g_1 a g_2 nulové derivace, takže jsou konstantní, a z toho plyne $f(z) = f(z + w)$. □

10.5 Elementární funkce

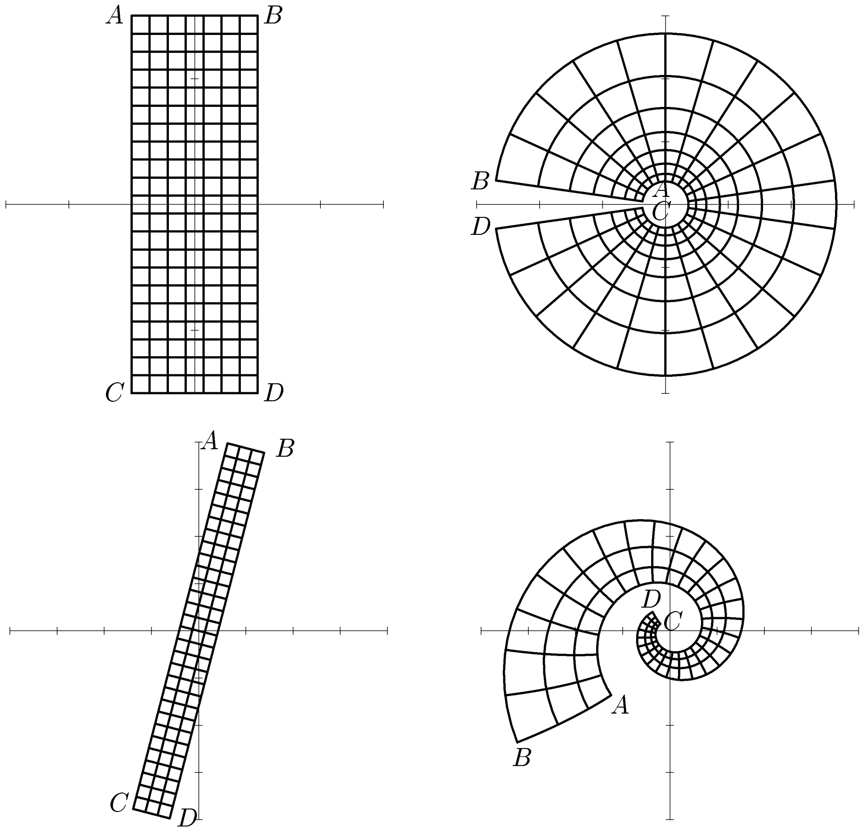
10.5.1 Exponenciála

Z Taylorovy věty jsme v reálném oboru odvodili rozvoj exponenciály, sinu a kosinu

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\end{aligned}$$

Všechny tyto řady mají obě poloměr konvergence $+\infty$.



Obrázek 10.5: Komplexní exponenciála

V komplexním oboru definujeme exponenciální funkci stejnou řadou jako v reálném oboru

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Poloměr konvergence je $r = +\infty$, takže řada je definována pro všechna $z \in \mathbb{C}$, a její derivace je $(e^z)' = e^z$. Také v komplexní oblasti převádí exponenciála sčítání na násobení. Protože řady pro e^z a e^w konvergují absolutně, podle věty 23 platí

$$e^z \cdot e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^k w^j}{k!j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-k} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-k} \binom{n}{k} \frac{z^k w^{n-k}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \\ &= e^{z+w} \end{aligned}$$

Pro ryze imaginární číslo $z = iy$ je

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1} - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \cdots = \cos y + i \sin y$$

Komplexní exponenciála tedy v sobě zahrnuje i goniometrické funkce. Pro obecné komplexní číslo $z = x + iy$ pak je

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Exponenciála je periodická funkce s periodou $2\pi i$, to znamená, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je $e^{z+2\pi i} = e^z$. Pás $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Im(z) < 2\pi\}$ převádí exponenciála na celou komplexní rovinu s vyjímkou nulového bodu. Přitom vodorovné přímky $z = t + ia$ převádí na paprsky které svírají s osou x úhel a. Svislé přímky $z = a + it$ převádí na kružnice se středem 0 a poloměrem e^a. Přímky $z = ta + ibt$, $a, b \neq 0$ převádí na geometrické spirály (obr. 10.5).

10.5.2 Goniometrické funkce

Také goniometrické funkce sinus a kosinus definujeme v komplexním oboru stejnými mocninnými řady jako v oboru reálném.

$$\begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

Jejich poloměr konvergence je $+\infty$ a platí $\sin' z = \cos z$, $\cos' z = -\sin z$. Vzorec $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ pak platí pro každé komplexní z. Dále $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$, protože cos je funkce sudá, a sinus je funkce lichá. Z těchto dvou vzorců plyne

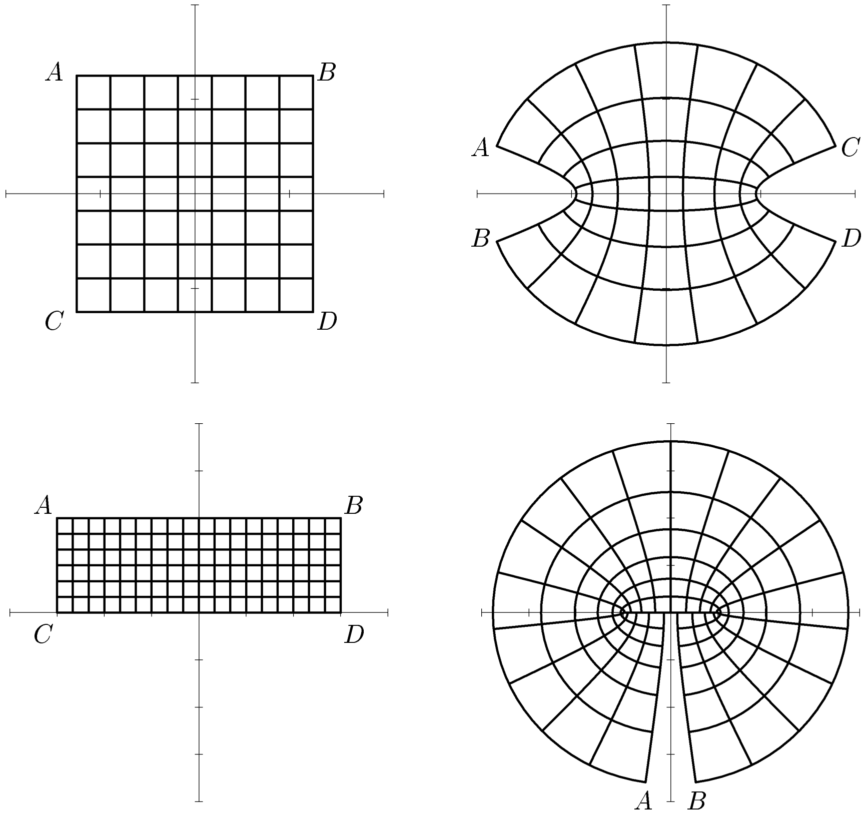
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Speciálně pro ryze imaginární číslo $z = iy$ je

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \cosh y, \quad \sin iy = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \sinh y$$

Na imaginární přímce se tedy goniometrické funkce chovají jako hyperbolické funkce. Ze součtového vzorce pro exponenciálu snadno odvodíme součtové vzorce pro sinus a kosinus ve stejném tvaru jako v reálném oboru. Odtud dostáváme vyjádření sinu a kosinu pro obecné komplexní číslo $z = x + iy$

$$\begin{aligned} \cos(x+iy) &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ \sin(x+iy) &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$



Obrázek 10.6: Komplexní sinus

Také v komplexní oblasti jsou goniometrické funkce periodické s periodou 2π a jsou na sebe převoditelné vzorci

$$\cos(z + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin z, \quad \sin(z + \tfrac{\pi}{2}) = \cos z$$

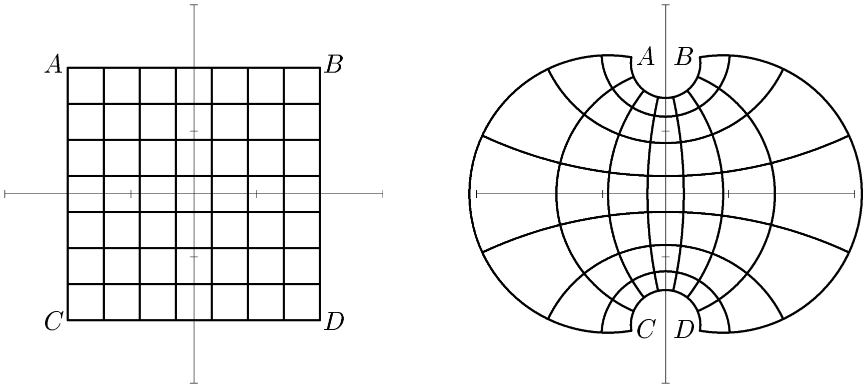
Vodorovnou přímky $z = t + ai$ převádí sinus i kosinus na elipsu s poloosami $\cosh a$ a $\sinh a$. Při $a = 0$ přechází tato elipsa na reálnou úsečku $\langle -1, 1\rangle$. Pro velká a se tato elipsa blíží kružnici. Svislou přímku $z = a + it$ převádí sinus na hyperbolu s poloosami $\sin x$, $\cos x$ a s asymptotami $t(\cos a, \pm \sin a)$, kosinus ji převádí na hyperbolu s asymptotami $t(\sin a, \pm \cos a)$ (obr.10.6). Na množině

$$\{z \in \mathbb{C} : \ -\pi < \Re z < \pi, \ \Im z > 0\}$$

jsou obě funkce prosté. Sinus ji převádí na celou komplexní rovinu s vyjímkou reálného intervalu $[-1, 1]$ a komplexní polopřímky $\{z \in \mathbb{C} : \ \Re z = 0, \ \Im z < 0\}$. Kosinus je převádí na komplexní rovinu s vyjímkou reálné polopřímky $(-\infty, 1\rangle$.

Tangens a kotangens definujeme podíly

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$



Obrázek 10.7: Komplexní tangens

Úpravou součtových vzorců pro sinus a kosinus dostáváme

$$\tan(x+iy) = \frac{\sin 2x + i\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}, \quad \cot(x+iy) = -\frac{\sin 2x - i\sinh 2y}{\cos 2x - \cosh 2y}$$

Protože $\cosh y \geq 1$ pro každé reálné y, je funkce $\tan z$ definována v každém $z \neq \frac{\pi}{2}k\pi$, funkce cot je definována v každém $z \neq k\pi$. Funkce tangens zobrazuje svislé přímky $z = a + iy$ na kružnice se středem $-\cot 2a$ a poloměrem $1/2\sin 2a$. Vodorovné přímky $z = x + ai$ zobrazuje tangens na kružnice se středem $\coth 2a$ a poloměrem $1/\sinh 2y$ (obr. 10.7). Platí totiž

$$\begin{aligned} |\tan(x+iy) + \cot 2x| &= \left|\frac{1}{\sin 2x}\right|, \\ |\tan(x+iy) - i\coth 2y| &= \left|\frac{1}{\sinh 2y}\right| \end{aligned}$$

Funkce tan je tedy prostá na množině $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \Re z < \frac{\pi}{2}\}$ a zobrazuje ji na množinu $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \Re z = 0, |\Im z| \geq 1\}$.

10.5.3 Logaritmus

Funkce e^z je prostá na otevřeném pásu $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im z < 2\pi\}$ a má zde spojitou inverzní funkce $\ln(z) = \ln|z| + i\arg z$. Její definiční obor je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a její derivace je $1/z$. Exponenciála je prostá i na jiných otevřených množinách a každá taková otevřená množina určuje nějakou spojitou inverzní funkci, kterou nazýváme větev logaritmu. Například pro každé reálné a je exponenciála prostá na pásu $\{z : a < \Im z < a + 2\pi\}$. Každá větev logaritmu má tvar

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\arg z + 2k_z\pi$$

pro vhodné celé k_z. Rozvoj logaritmu do mocninné řady nalezneme pomocí primitivní funkce. Geometrická řada

$$1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \cdots = \frac{1}{z}$$

má poloměr konvergence 1. Její primitivní funkce

$$f(z) = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + \cdots$$

má také poloměr konvergence 1. Protože $f'(z) = 1/z$, $f(1) = 0$ je to funkce logaritmická. $f(z) = \ln|z| + i \arg z + 2k_z\pi$. Zde je $k_z = 0$ pro $\Im(z) \geq 0$, $k_z = -1$ pro $\Im(z) < 0$.

Na rozdíl od exponenciály platí rozvoj logaritmu jen v omezeném kruhu. Rozvineme-li logaritmus v okolí jiného bodu, řada může mít větší poloměr konvergence, v žádném případě ale tento kruh nemůže obsahovat nulu, kde logaritmus není definován.

Ze vzorců pro goniometrické a hyperbolické funkce dostaneme pomocí logaritmu vzorce pro cyklometrické a hyperbolometrické funkce, které platí na každé otevřené množině, na které existuje nějaká větev logaritmu.

$$\begin{aligned}
\arccos z &= -i \operatorname{Log}\,(z + \sqrt{z^2-1}) \\
\arcsin z &= -i \operatorname{Log} i(z + \sqrt{z^2+1}) \\
\arctan z &= \frac{i}{2} \operatorname{Log} \frac{i+z}{i-z} = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1+iz}{1-iz} \\
\operatorname{arccot} z &= \frac{i}{2} \operatorname{Log} \frac{z-i}{z+i} = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{iz-1}{iz+1} \\
\arg\cosh z &= \operatorname{Log}\,(z + \sqrt{z^2-1}) \\
\arg\sinh z &= \operatorname{Log}\,(z + \sqrt{z^2+1}) \\
\arg\tanh z &= \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z} \\
\arg\coth z &= \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{z+1}{z-1}
\end{aligned}$$

Je-li totiž $w = \arccos z$, je $z = \cos w = \frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$, takže

$$(e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0,$$

a tedy $e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2-1}$. Podobně je-li $w = \arctan z$, je

$$z = \tan w = \frac{1}{i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}, \quad \text{takže } e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{i-z}{i+z}.$$

Primitivní funkce geometrické řady

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots$$

je arkus tangens

$$\arctan z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots$$

Rozvoj platí pro $|z| < 1$.

10.6 Křivkový integrál

Křivka v komplexní rovině je spojité zobrazení $g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{C}$ dané dvojicí spojitých funkcí $g(t) = g_1(t) + i g_2(t)$. Její derivace je $g'(t) = g_1'(t) + i g_2'(t)$. Infinitesimální dělení $(s_j)_{j=0}^{p}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ určuje infinitesimální lomenou cestu $(z_j, z_{j+1} - z_j)$, kde $z_j = g(t_j)$. Pro komplexní funkci $f : {}_{\subseteq}\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s reálnou a imaginární složkou $f(x+iy) = f_1(x,y) + i f_2(x,y)$ uvažujme součty $\sum_{j=0}^{p} f(z_j)(z_{j+1} - z_j)$. Je-li g diferencovatelná, je

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p} f(z_j)(z_{j+1} - z_j) &\approx \sum_{j=1}^{p-1} f(g(t_j)) \cdot (g_1'(t_j) + i g_2'(t_j))(t_{j+1} - t_j) \\
&= \sum_{j=1}^{p-1} (f_1(g(t_j)) g_1'(t_j) - f_2(g(t_j)) g_2'(t_j))(t_{j+1} - t_j) + \\
&\qquad i \sum_{j=1}^{p-1} (f_2(g(t_j)) g_1'(t_j) + f_1(g(t_j)) g_2'(t_j))(t_{j+1} - t_j) \\
&\approx \int_a^b (f_1(g(s)) g_1'(s) - f_2(g(s)) g_2'(s))\, ds + \\
&\qquad i \int_a^b (f_2(g(s)) g_1'(s) + f_1(g(s)) g_2'(s))\, ds \\
&= \int_g \varphi_1 + i \int_g \varphi_2
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,y) &= f_1(x,y)\, dx - f_2(x,y)\, dy, \\
\varphi_2(x,y) &= f_2(x,y)\, dx + f_1(x,y)\, dy
\end{aligned}$$

To je diferenciální forma v $\mathbb{C}$ jejíž reálná a imaginární složka jsou diferenciální formy v $\mathbb{R}_2$.

$$\begin{aligned}
f(z)\, dz &= (f_1(x,y) + i f_2(x,y))(dx + i\, dy) \\
&= f_1(x,y)\, dx - f_2(x,y)\, dy + i\, (f_2(x,y)\, dx + f_1(x,y)\, dy) \\
&= \varphi_1(x,y) + i \varphi_2(x,y)
\end{aligned}$$

Křivkový integrál funkce f po diferencovatelné křivce g definujeme

$$\int_g f(z)\,dz \quad = \quad \int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_g \varphi_1 + i\int_g \varphi_2$$

Tvrzení 297 *Pro spojitou komplexní funkci f a diferencovatelnou křivku g platí*

$$\left|\int_g f(z)\,dz\right| \le \int_g |f(z)|\cdot|dz| = \int_g \sqrt{f_1^2(x,y)+f_2^2(x,y)}\cdot\sqrt{dx^2+dy^2}$$

Důkaz: Pro každé infinitesimální dělení t_j, $z_j = g(t_j)$ je

$$\begin{aligned}
\left|\int_g f(z)\,dz\right| &\approx \left|\sum_{j=0}^{p-1} f(z_j)(z_{j+1}-z_j)\right| \le \sum_{j=0}^{p-1}|f(z_j)|\cdot|(z_{j+1}-z_j)| \\
&\approx \sum_{j=0}^{p-1}|f(g(t_j))|\cdot\sqrt{g_1'^2(t_j)+g_1'^2(t_j)}(t_{j+1}-t_j) \\
&\approx \int_g \sqrt{f_1^2(x,y)+f_2^2(x,y)}\cdot\sqrt{dx^2+dy^2} \quad \square
\end{aligned}$$

Na pravé straně nerovnosti je metrická forma $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$.

Funkce $\frac{1}{z}$ určuje diferenciální formu

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{z} &= \frac{dx+i\,dy}{x+iy} = \frac{(x-iy)(dx+i\,dy)}{x^2+y_2} \\
&= \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2} + i\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2} = \psi_1(x,y)+i\psi_2(x,y)
\end{aligned}$$

Reálná část této diferenciální formy je diferenciál logaritmu absolutní hodnoty

$$d\ln\sqrt{x^2+y^2} = d\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \psi_1(x,y)$$

a její integrál po každé uzavřené křivce neprocházející počátkem je nulový. Imaginární část $\psi_2(x,y)$ je diferenciál funkce argumentu. Její integrál po každé křivce neprocházející počátkem je index nuly vzhledem k této křivce násobený 2π. Pro každou uzavřenou diferencovatelnou křivku neprocházející počátkem je tedy

$$\mathrm{ind}_g(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_g \frac{dz}{z}, \quad \mathrm{ind}_g(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_g \frac{dz}{z-c}$$

Věta 298 (Cauchyova věta) *Nechť f je holomorfní funkce v jednoduše souvislé oblasti. Pak její křivkový integrál po každé uzavřené diferencovatelné křivce je nulový.*

Důkaz: Je-li $f(z)$ holomorfní funkce, pak pro reálnou i imaginární složku $f(z)\,dz$ platí

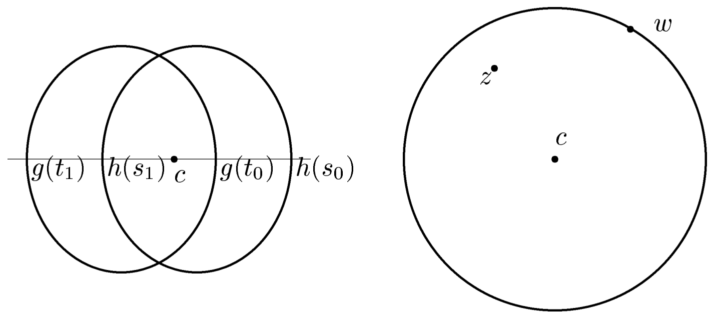
$$\begin{aligned} d\varphi_1(x,y) &= (-\partial_2 f_1(x,y) - \partial_1 f_2(x,y))\,dx \wedge dy = 0 \\ d\varphi_2(x,y) &= (-\partial_2 f_2(x,y) + \partial_1 f_1(x,y))\,dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

takže $\int_g f(z)\,dz = 0$ podle Greenovy věty. □

Říkáme, že uzavřená křivka g jednou pozitivně oběhne kolem bodu $c = a + bi$, jestliže $\mathrm{ind}_g(c) = 1$ a pro diferenciální formu

$$\psi_c(x,y) = \frac{-(y-b)dx + (x-a)dy}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

pro každé t platí $\psi_c(g(t), g'(t)) > 0$. Každý paprsek $c + ut$ pak protíná křivku $g(t)$ právě v jednom bodě. Například kružnice pozitivně obíhá kolem každého svého vnitřního bodu.



Obrázek 10.8: Cauchyova věta

Tvrzení 299 *Nechť f je holomorfní funkce v jednoduše souvislé oblasti a g diferencovatelná uzavřená křivka, která jednou pozitivně oběhne kolem bodu c. Pak*

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_g \frac{f(z)}{z-c}\,dz$$

Důkaz: Ukážeme nejprve, že pro každé dvě křivky g, h splňující předpoklady, je uvažovaný integrál stejný. Podle předpokladu má každá křivka právě dva průsečíky s vodorovnou přímkou procházející bodem c, jeden nalevo od něj a druhý napravo. To znamená, že existují jediná t_0, t_1, s_0, s_1 taková, že platí (obr. 10.8 vlevo)

$$g(t_1) - c < 0 < g(t_0) - c, \quad h(s_1) - c < 0 < h(s_0) - c$$

Uvažujme uzavřené křivky

$$K : g(t_0) \xrightarrow{g} g(t_1) \to h(s_1) \xrightarrow{\ominus h} h(s_0) \to g(t_0)$$

$$L : g(t_1) \xrightarrow{g} g(t_0) \to h(s_0) \xrightarrow{\ominus h} h(s_1) \to g(t_1)$$

Celá křivka K se nachází v polorovině $\{z: \Im(z-c) \geq 0\}$ a také v jednodušše souvislé oblasti $\mathbb{C} \setminus \{c+iy: y \leq 0$, ve které je funkce $\frac{f(z)}{z-c}$ holomorfní. Podobně celá křivka L je v polorovně $\{x: \Im(z-c) \leq 0\}$ a také v oblasti, na které je $\frac{f(z)}{z-c}$ holomorfní. Z toho plyne

$$\begin{aligned} \int_K \frac{f(z)}{z-c}\,dz &= \int_L \frac{f(z)}{z-c}\,dz = 0 \\ \int_g \frac{f(z)}{z-c}\,dz + \int_{\ominus h} \frac{f(z)}{z-c}\,dz &= \int_K \frac{f(z)}{z-c}\,dz + \int_L \frac{f(z)}{z-c}\,dz = 0 \end{aligned}$$

takže integrály funkce $\frac{f(z)}{z-c}$ po obou křivkách jsou stejné. Pro kružnici $g(t) = c+re^{it}$ položme

$$M_r = \max\{|f(c+re^{it}) - f(c)|: \ t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$$

Protože f je spojitá, $\lim\limits_{r \to 0^+} M_r = 0$ a

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_g \frac{f(z)\,dz}{z-c} - f(c) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_g \frac{f(z) - f(c)}{z-c}\,dz \right| \leq \frac{M_r}{2\pi} \int_g \frac{|dz|}{|z-c|} = M_r$$

a odtud již plyne výsledek. □

Věta 300 *Každou holomorfní funkci lze v každém bodě rozvinout do mocninné řady.*

Důkaz: Nechť f je holomorfní v $c \in \mathcal{D}(f)$ a $r > 0$ je takové, že $B_r(c) \subseteq \mathcal{D}(f)$. Položme $g(t) = c + re^{it}$. Pro $|w-c| = r$, $|z-c| < r$ (obr. 10.8 vpravo) je

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-c}{w-c}} = f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}$$

přitom pro pevné c a z je tato konvergence stejnoměrná v proměnné w na kružnici $|w-c| = r$. Řadu tedy můžeme integrovat člen po členu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_g \frac{f(w)\,dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-c)^n \cdot \int_g \frac{f(w)\,dw}{(w-c)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-c)^n \quad \square$$

Funkci f jsme tedy v $B_r(c)$ vyjádřili mocninnou řadou s koeficienty

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_g \frac{f(w)\,dw}{(w-c)^{n+1}}$$

Protože mocninná řada má derivace všech řádů, plyne z toho, že také každá holomorfní funkce má derivace všech řádů

$$f^{(n)}(c) = n! c_n = \frac{n!}{2\pi i} \int_g \frac{f(w)\,dw}{(w-c)^{n+1}}$$

Vzorec platí nejen pro křivky $g = c + re^it$ ale pro každou křivku, pro kterou je $\mathrm{ind}_g(c) = 1$. Tyto vlastnosti holomorfních funkcí jsou v příkrém protikladu k vlastnostem diferencovatelných funkcí v reálném oboru, které jsou často diferencovatelné jen do určitého řádu a i v případě že mají derivace všech řádů, nelze je vždy rozvinout do mocninné řady. (Příklad 88). Další pozoruhodná vlastnost holomorfních funkcí je, že jsou jednoznačně určeny svými hodnotami na libovolné vlastní monádě.

Tvrzení 301 *Nechť* $f, g : _{\subseteq}\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *jsou holomorfní funkce na stejné otevřené souvislé oblasti,* $c \in \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g)$ *a pro každé* $z \approx c$ *je* $f(z) = g(z)$*. Pak* $f = g$*.*

Důkaz: Jestliže f a g se rovnají na monádě $c^\bullet$, pak se rovnají na nějakém kruhu $B_r(c)$ a tedy mají na $B_r(c)$ stejný rozvoj do mocninné řady. Pro libovolné $z \in \mathcal{D}(f)$ existuje posloupnost $z_i \in \mathcal{D}(f)$ a $r_i > 0$ taková, že $B_{r_i}(z_i) \subseteq \mathcal{D}(f)$, $z_{i+1} \in B_{r_i}(z_i)$, $z_0 = c$ a $z_n = z$. Funkce f a g se tedy rovnají na každém kruhu $B_{r_i}(z_i)$ a tedy také $f(z) = g(z)$. $\square$