Kapitola 11

DIFERENCIÁLNÍ SOUSTAVY

Soustava diferenciálních rovnic popisuje vývoj systému popsaného více proměnnými, které se navzájem ovlivňují. Uvažujme například model vývoje početních stavů populací dravce a kořisti na nějakém teritoriu. Označme $x(t)$ početní stav kořisti a $y(t)$ početní stav dravců v čase t. Předpokládáme, že za infinitesimální časový interval délky α přibude $\alpha ax(t)$ kořisti reprodukcí (a je konstanta populačního přírůstku) a ubyde $\alpha bx(t)y(t)$ kořisti, která padne za oběť dravcům. Tento úbytek je úměrný četnosti setkávání obou populací. Protože dravci se živí kořistí, jejich přírůstek $\alpha cx(t)y(t)$ je také úměrný velikosti obou populací. Přirozený úbytek dravců $\alpha dy(t)$ je úměrný velikosti jejich populace. Položíme-li pro jednoduchost $a = b = c = d = 1$, dostáváme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - x(t) \cdot y(t) \\ y'(t) &= x(t) \cdot y(t) - y(t) \end{aligned}$$

Pravou stranu soustavy chápeme jako vektorové pole $f : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$, kde $f(x, y) = [x - xy, xy - y]$. Vektor $f(x, y)$ je umístěn v bodě $[x, y]$ a předepisuje, jekým směrem a jakou rychlostí se z něj systém bude pohybovat (obr. 11.1 vlevo). Řešení soustavy je rovinná křivka, jejíž tečné vektory jsou právě vektory $f(x, y)$ (obr. 11.1 vpravo). Řešení je určeno počátečními podmínkami $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Řešení soustavy diferenciálních rovnic již obecně nelze převést na integrál. V našem případě lze soustavu řešit pomocí jejího invariantu, kterým je funkce

$$H(x, y) = x + y - \ln x - \ln y$$

na kladném kvadrantu. Jsou-li totiž $x(t)$, $y(t)$ řešení soustavy, pak pro složenou funkci $h(t) = H(x(t), y(t))$ je

$$\begin{aligned} h'(t) &= \partial_1 H(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \partial_2 H(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \\ &= \left(1 - \frac{1}{x(t)}\right) x(t)(1 - y(t) + \left(1 - \frac{1}{y(t)}\right) y(t)(x(t) - 1) = 0 \end{aligned}$$

y y

Δ Θ

x x

Obrázek 11.1: Dravec a kořist

Funkce $h(t)$ jsou tedy konstantní, to znamená, že řešení soustavy jsou vrstevnice funkce H. Pro $c > 2$ je vrstevnice $f^{-1}(c)$ uzavřená křivka. Pouze vrstevnice $f^{-1}(2)$ sestává z jediného bodu $[1,1]$. Řešení soustavy lze získat redukcí na jednu diferenciální rovnici. Nechť $y = g(x)$ je implicitní funkce příslušná H, tj. $H(x, g(x)) = c > 2$. Pak $x(t)$ splňuje diferenciální rovnici

$$x'(t) = x(t)(1 - g(x(t))$$

Z řešení této rovnice lze pak určit i $y(t) = g(x(t)$.

Na soustavu diferenciálních rovnic lze převést i obecnou diferenciální rovnici $x'(t) = f(x(t), t)$ prvního řádu. Položme $y(t) = t$. Pak

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= 1 \end{aligned}$$

Autonomní diferenciální rovnici druhého řádu $x''(t) = f(x(t), x'(t))$ lze převést na soustavu diferenciálních rovnic položíme-li $y(t) = x'(t)$

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= f(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

Neautonomní rovnici druhého řádu $x''(t) = f(x(t), x'(t), t)$ převedeme na soustavu tří diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= f(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) &= 1 \end{aligned}$$

Také diferenciální rovnice vyšších řádů a jejich soustavy lze takto převést na soustavy autonomních diferenciálních rovnic zavedením nových proměnných. Obecně soustava n autonomních diferenciálních rovnic prvního řádu je úloha nalézt n reálných funkcí $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ splňujících rovnice

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad x_1(0) = c_1 \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad x_n(0) = c_n \end{aligned}$$

Zde $f = [f_1, \ldots f_n] : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ je zobrazení definované v okolí počátečního bodu $c = [c_1, \ldots, c_n]$ a $x(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ funkce jedné proměnné s hodnotami v $\mathbb{R}_n$. Vektorově zapisujeme tuto úlohu ve tvaru

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(0) = c$$

Geometricky chápeme $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ jako vektorové pole, které každému bodu $x \in \mathcal{D}(f)$ přiřazuje vektor $f(x)$ umístěný v bodě x. Řešení soustavy je křivka $x(t)$, jejíž směr a rychlost v bodě x je $f(x)$. Mluvíme o autonomní soustavě, protože vektorové pole f nezávisí explicitně na čase.

Soustavu diferenciálních rovnic již obecně nelze řešit pomocí primitivní funkce, lze ji však řešit integrací. Pro infinitesimální α platí

$$\frac{x(t+\alpha) - x(t)}{\alpha} \approx f(x(t))$$

Známe-li $x(t)$, určíme z tohoto vztahu $x(t+\alpha) \approx x(t) + \alpha f(x(t))$, odtud $x(t+2\alpha)$, atd. Řešení soustavy diferenciálních rovnic hledáme lokálně, na nějakém časovém intervalu (t_1, t_2) obsahujícím $t_0 = 0$. Z jevu přetečení víme, že globální řešení nemusí existovat

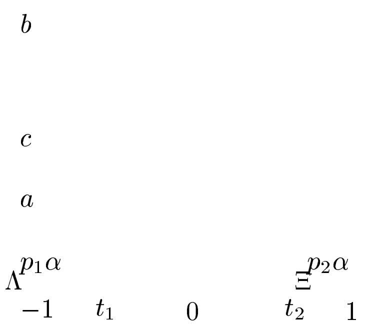
Věta 302 (Existence řešení) *Nechť $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ je spojité zobrazení a c vnitřní bod jeho definičního oboru. Pak existují $t_1 < 0 < t_2$ a funkce $x : (t_1, t_2) \to \mathbb{R}_n$ pro kterou $x(0) = c$ a $x'(t) = f(x(t))$.*

Důkaz: zvolme $a, b \in \mathbb{R}_n$ takové, že $c \in (a, b)$ a $\langle a, b\rangle \subseteq \mathcal{D}(f)$. Protože $\langle a, b\rangle$ je kompaktní, je f na $\langle a, b\rangle$ omezená. Položme

$$M = \max\{||f(x)|| : x \in \langle a, b\rangle\},$$

takže pro každé $1 \leq k \leq n$ a pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $|f_k(x)| \leq M$. Zvolme α infinitesimální kladné a sestrojme posloupnost bodů $c_i \in \langle a, b\rangle^*$ (s kladnými i zápornými indexy) rekurentním předpisem $c_0 = c$,

$$\begin{aligned} c_{i+1} &= c_i + \alpha f(c_i) \ \text{ pro } i > 0 \\ c_{i-1} &= c_i - \alpha f(c_i) \ \text{ pro } i < 0 \end{aligned}$$



Obrázek 11.2: Existence a jednoznačnost

Zobrazení x sestrojíme tak aby platilo $x(\alpha i) \approx c_i$. Posloupnost c_i sestrojujeme tak dlouho, dokud dvojice $[\alpha i, c_i]$ zůstává v intervalu $\langle -1, 1\rangle \times \langle a, b\rangle$ (viz obr. 11.2 vlevo). Nechť $p_2 > 0$ je nejmenší číslo pro které buď $c_{p_2} \notin \langle a, b\rangle^*$ nebo $\alpha p_2 > 1$. Nechť $p_1 < 0$ je největší číslo pro které buď $c_{p_1} \notin \langle a, b\rangle^*$ nebo $\alpha p_1 < -1$. Posloupnost $c_i \in \langle a, b\rangle^*$ je tedy definována pro $p_1 \le i \le p_2$. Ani $p_1\alpha$ ani $p_2\alpha$ nejsou infinitesimální. Je totiž buď $p_2\alpha \approx 1$ nebo $f(p_2\alpha) \approx a$ nebo $f(p_2\alpha) \approx b$. Kdyby však $p_2\alpha$ bylo infinitesimální, bylo by $f(p_2\alpha) \approx c$. Zvolme libovolná $t_1 < 0 < t_2$ pro která

$$\mathfrak{P}(p_1\alpha) < t_1 < 0 < t_2 < \mathfrak{P}(p_2\alpha)$$

Pro $t \in \langle t_1, t_2\rangle$, položme $x(t) = \mathfrak{P}(c_i)$, kde $i\alpha \le t < (i+1)\alpha$. Takový index i pro dané t existuje jediný. Ukážeme, že takto definovaná funkce x je řešením soustavy. Je-li $p_1 \le i$, $i + 1 \le p_2$, je $||c_{i+1} - c_i|| \le \alpha M$, takže pro každé $p_1 \le i < j \le p_2$ je $||c_j - c_i|| \le (j - i)\alpha M$. Je-li tedy $t_1 \le t < s < t_2$ a $(i - 1)\alpha \le t < i\alpha$, $j\alpha \le s < (i + 1)\alpha$, je $x(t) \approx c_i$, $x(s) \approx c_j$ a

$$||x(s) - x(t)|| \approx ||c_j - c_i|| \le (j - i)\alpha M \approx (s - t)M$$

To znamená, že $||x(t) - x(s)|| \le (s - t)M$, takže zobrazení x je spojité. Dále ukážeme, že pro každé $t_1 < t < s < t_2$ existují $u_1, \dots u_n \in (t, s)$ pro které

$$x_k(s) - x_k(t) = (s - t) \cdot f_k(x(u_k))$$

pro $1 \le k \le n$. Funkce $x_k : \langle t_1, t_2\rangle \to \mathbb{R}$ nabývá na intervalu $\langle t, s\rangle$ minimum v nějakém bodě v_k a maximum v nějakém bodě w_k. Nechť $(i - 1)\alpha \le t < i\alpha$ a $j\alpha \le s < (j + 1)\alpha$. Pak

$$\begin{aligned} x_k(s) - x_k(t) &\approx (c_j)_k - (c_i)_k = \sum_{l=i}^{j-1} \alpha \cdot f_k(c_l) \\ &\le (j - i)\alpha \cdot f_k(x(w_k)) \approx (s - t) f_k(x(w_k)) \end{aligned}$$

Odtud $x_k(s) - x_k(t) \leq (s-t)f_k(x(w_k))$ a podobně pro dolní odhad

$$f_k(x(v_k)) \leq \frac{x_k(s) - x_k(t)}{s-t} \leq f_k(x(w_k))$$

Podle věty o mezihodnotě pro spojitou funkci $f_k \circ x$ existuje u_k mezi body v_k a w_k, pro které $x_k(s) - x_k(t) = (s-t)f_k(x(u_k))$. Podle principu expanze pro $s \approx t$ nestandardní existuje $u_k \in (t,s)^*$ pro které

$$\frac{x_k(s) - x_k(t)}{s-t} = f_k(x(u_k)) \approx f(x(t))$$

takže $x'(t) = f(x(t))$. □

Řešení soustavy diferenciálních rovnic se spojitou pravou stranou nemusí být počáteční podmínkou vždy určeno jednoznačně. To se může stát již pro jedinou rovnici

Příklad 303 *Diferenciální rovnice* $x'(t) = \sqrt{|x(t)|}$, $x(0) = 0$ *má na* $(-\infty, +\infty)$ *nekonečně mnoho řešení.*

Rovnice má zřejmě nulové řešení $x(t) = 0$. Řešíme-li však tuto rovnici s kladnou počáteční podmínkou, dostáváme

$$t - c = \int dt = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dt = 2\sqrt{x}$$

Speciálně $c = 0$ dává řešení $x(t) = t^2/4$, které lze rozšířit na záporná t předpisem $x(t) = \mathrm{sgn}(t) \cdot t^2/4$. Pro každá $a < b$ existují další řešení (obr. 11.2 vpravo)

$$\begin{array}{rcll} x(t) & = & -(t-a)^2/4 & t \leq a \\ x(t) & = & 0, & a \leq t \leq b \\ x(t) & = & (t-b)^2/4 & t \geq b \end{array}$$

Rovnice má nekonečně mnoho řešení protože funkce $\sqrt{|t|}$ v okolí nuly roste příliš rychle. Má zde totiž nekonečnou derivaci. Ukážeme, že pro lischitzovské funkce je řešení jednoznačné.

Definice 304 *Říkáme, že zobrazení* $f : _{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ *je lipschitzovské, jestliže existuje* $K > 0$ *(lipschitzovská konstanta) takové, že pro každé* $x, y \in \mathcal{D}(f)$ *platí*

$$||f(x) - f(y)|| \leq K||x - y||$$

Funkce $\sqrt{x}$ lipschtzovská není. Z nerovnosti

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K|x-y| = K|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{y}|$$

totiž dostáváme nerovnost $1 \leq K|\sqrt{x} + \sqrt{y}|$, která pro x, y v okolí nuly není splněna. Má-li však funkce omezenou derivaci, tj. je-li v každém bodě $|f'(x)| < K$, je lipschitzovská, pro každé x, y existuje c, pro které $|f(x) - f(y)| = |(x-y)f'(c)| \leq K|x-y|$. Obecněji

Tvrzení 305 *Nechť zobrazení $f : _{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ je diferencovatelné na konvexní kompaktní množině $A \subseteq \mathcal{D}(f)$. Pak f je na A lipschitzovské.*

Důkaz: Protože parciální derivace jsou spojité, jsou na A omezené, tj. existuje $K > 0$ takové, že pro každé $x \in A$ je $|\partial_i f_j(x)| < K$. Pro každé $x, y \in A$ a $1 \leq j \leq m$ existuje c na přímce spojující body x a y, pro které

$$\begin{aligned} |f_j(x) - f_j(y)| &= |df_j(c, x-y)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\partial_i f_j(c)| \cdot |x_i - y_i| \\ &\leq Kn||x-y|| \end{aligned}$$

Odtud $||f(x) - f(y)|| \leq ||x-y||Kn\sqrt{m}$. □

Pro důkaz jednoznačnosti potřebujeme následující diferenciální nerovnost.

Tvrzení 306 *Nechť f je nezáporná diferencovatelná funkce na reálném intervalu obsahujícím nulu, $a > 0$, $b \geq 0$ a pro každé $t \in \mathcal{D}(f)$ platí $|f'(t)| \leq a \cdot f(t) + b$. Pak pro každé $t \in \mathcal{D}(f)$ je*

$$f(t) \leq f(0) \cdot e^{a|t|} + \frac{b}{a}\left(e^{a|t|} - 1\right)$$

Důkaz: Předpokládejme nejprve $b > 0$ a položme $g(t) = \ln(af(t) + b)$. Pak

$$|g'(t)| = \frac{a|f'(t)|}{af(t) + b} \leq a$$

takže $|g(t) - g(0)| \leq a|t|$ a tedy $af(t) + b \leq (af(0) + b)e^{a|t|}$. Z toho již plyne tvrzení pro $b > 0$. Nechť nyní $b = 0$, tj. $|f'(t)| \leq af(t)$. Pro každé $c > 0$ je $|f'(t)| < af(t) + c$, takže podle předcházejícího důkazu, $f(t) \leq f(0) \cdot e^{at} + \frac{c}{a}(e^{a|t|} - 1)$, a tedy $f(t) \leq f(0) \cdot e^{a|t|}$. □

Věta 307 (Jednoznačnost řešení) *Nechť zobrazení $f : _{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ je lipschitzovské s konstantou K. Nechť $t_1 < 0 < t_2$ a $x, y : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}_n$ jsou spojité funkce, takové, že pro každé $t \in (t_1, t_2)$ platí $x'(t) = f(x(t))$, $y'(t) = f(y(t))$. Pak pro každé $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ je*

$$||x(t) - y(t)|| \leq ||x(0) - y(0)||e^{K|t|}$$

Speciálně, je-li $x(0) = y(0)$, pak $x(t) = y(t)$ pro každé $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$.

Důkaz: Položme $z(t) = y(t) - x(t)$ a $g(t) = ||z(t)|| = \sqrt{z_1^2(t) + \cdots + z_n^2(t)}$. Podle Schwarzovy nerovnosti $|u \cdot v| \leq ||u|| \cdot ||v||$ je

$$\begin{aligned} |g'(t)| &= \frac{|2z_1(t)z_1'(t) + \cdots + 2z_n(t)z_n'(t)|}{2||z(t)||} = \frac{|z(t) \cdot z'(t)|}{||z(t)||} \\ &\leq ||z'(t)|| = ||f(y(t)) - f(x(t))|| \leq K||y(t) - x(t)|| \\ &= Kg(t) \end{aligned}$$

takže $|g'(t)| \leq Kg(t)$. Podle tvrzení 306 je $g(t) \leq g(0) \cdot e^{K|t|}$. □

11.1 Lineární soustava

Uvažujme soustavu n lineárních rovnic s n neznámými

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j(t), \quad x_i(0) = c_i, \quad i = 1, \dots, n$$

S použitím maticového násobení píšeme

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ & \vdots & \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Rozdělíme-li časový interval $[0, t]$ na p infinitesimálních intervalů délky $1/p$, dostáváme podle důkazu věty 302

$$x(\tfrac{i+1}{p}t) \approx x(\tfrac{i}{p}t) + \tfrac{1}{p}A \cdot x(\tfrac{i}{p}t) \approx (I + \tfrac{At}{p}) \cdot x(\tfrac{i}{p}t)$$

Zde I je jednotková matice $I_{ii} = 1$ a $I_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. Odtud

$$x(t) \approx \left(I + \frac{At}{p}\right)^p \cdot x(0)$$

To je formálně stejný vzorec jako pro exponenciální funkci. Exponenciálu matice nejjednodušeji definujeme řadou.

Tvrzení 308 *Pro každou čtvercovou matici A absolutně konverguje řada*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

Důkaz: Položme $a = \max\{|A_{ij}| : 1 \leq i, j \leq n\}$. Pak $|(A^2)_{ik}| \leq \sum_{l=1}^{n} |A_{il} A_{lj}| \leq na^2$ a obecně $|(A^k)_{ij}| \leq n^{k-1} a^k$. Protože řada $\sum_k n^{k-1} a^k / k!$ je konvergentní, je také pro každou dvojici indexů i, j absolutně konvergentní řada $\sum_k (A^k)_{ij}/k!$. □

Tvrzení 309 *Nechť A je matice typu $n \times n$. Řešení lineární soustavy*

$$x'(t) = A \cdot x(t), \quad x(0) = c$$

je $x(t) = e^{At} \cdot c$.

Důkaz:

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot c = A \cdot x(t), \quad x(0) = I \cdot c = c$$

Podrobněji, je $x_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{(A^k)_{ij}t^k}{k!} c_j$ a odtud

$$\begin{aligned} x_i'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{(A^k)_{ij}t^{k-1}}{(k-1)!} c_j = \sum_{l=1}^{n} A_{il} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{(A^{k-1})_{lj}t^{k-1}}{(k-1)!} c_j \\ &= \sum_{l=1}^{n} A_{il} \cdot x_l(t) \quad \Box \end{aligned}$$

Exponenciálu matice lze určit z jejích vlastních hodnot. Říkáme, že komplexní číslo λ je vlastní hodnota matice A, a nenulový komplexní sloupcový vektor v její pravý vlastní vektor, jestliže $Av = \lambda v$, neboli $(A - \lambda I)v = 0$. Z této podmínky plyne, že λ je vlastní hodnota A právě když $\det(A - \lambda I) = 0$. To je algebraická rovnice pro λ n-tého stupně, která má v komplexní oblasti n řešení, počítáme-li je i s jejich násobnostmi. Zároveň vidíme, že pro vlastní hodnotu λ existuje také její levý řádkový vektor u splňující identitu $u(A - \lambda I) = 0$, tj $uA = \lambda u$. Zvlášť jednoduchý tvar má exponenciála matice v případě, že A má n navzájem různých vlastních hodnot $\lambda_1, \dots \lambda_n$. Označme v_i pravý (sloupcový) vektor a u_i levý (řádkový) vektor odpovídající vlastní hodnotě λ_i. Vektory $u_1, \dots, u_n$ jsou lineárně nezávislé. Předpokládejme totiž sporem, že jsou lineárně závislé a nechť $1 \leq k \leq n$ je nejmenší počet těchto vektorů, které jsou lineárně závislé. Po vhodném přeuspořádání těchto vektorů

$$a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k = 0$$

pro nějaká nenulová a_i. Tuto rovnost vynásobíme maticí A zprava

$$a_1 \lambda_1 u_1 + \cdots + a_k \lambda_k u_k = 0.$$

Od této rovnice odečteme první rovnici vynásobenou λ_k

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k)u_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)u_{k-1} = 0$$

takže dostáváme netriviální lineární kombinaci s menším počtem vektorů a to je spor. Pro $i \neq j$ je

$$\lambda_i(u_i \cdot v_j) = (\lambda_i u_i) \cdot v_j = u_i \cdot A \cdot v_j = \lambda_j(u_i \cdot v_j)$$

Protože $\lambda_i \neq \lambda_j$, plyne odtud $u_i \cdot v_j = 0$. Z lineární nezávislosti vektorů u_i plyne $u_i \cdot v_i \neq 0$. Tyto vektory nyní normujeme tak, aby jejich skalární součin byl jednotkový, takže

$$u_i \cdot A = \lambda_i u_i, \;\; A \cdot v_i = \lambda_i v_i, \;\; u_i \cdot v_i = 1$$

Označme $V_{ij} = (v_j)_i$ čtvercovou matici sestavenou z pravých vlastních vektorů, $U_{ij} = (u_i)_j$ čtvercovou matici sestavenou z levých vlastních vektorů a Λ diagonální matici sestavenou z vlastních hodnot, tj. $\Lambda_{ii} = \lambda_i$, $\Lambda_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

$$V = [v_1, \dots, v_n], \;\; \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \;\; U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Pak

$$U \cdot A = \Lambda \cdot U, \;\; A \cdot V = V \cdot \Lambda, \;\; U \cdot V = V \cdot U = I$$

Odtud plyne reprezentace pro matici A, její mocniny a její exponenciálu

$$A = V \cdot \Lambda \cdot U, \;\; A^n = V \cdot \Lambda^n \cdot U, \;\; e^A = V \cdot e^\Lambda \cdot U$$

kde

$$\Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}, \;\; e^\Lambda = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Odtud

$$\begin{aligned} (e^{At})_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} V_{ik} e^{\lambda_k t} U_{kj} \\ x_i(t) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ik} e^{\lambda_k t} U_{kj} x_j(0) \end{aligned}$$

Každé řešení lineární diferenciální soustavy je tedy lineární kombinace exponenciál. Jsou-li vlastní hodnoty komplexní čísla, objeví se v řešeních goniometrické funkce podle vzorce $e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$.

Každá lineární soustava má stacionární bod $\mathbf{0}$. Stabilita tohoto bodu závisí na vlastních číslech matice. Lineární soustava

$$x'(t) = x(t), \;\; y'(t) = y(t)$$

sestává ze dvou nezávislých diferenciálních rovnic. Její matice je jednotková takže je přímo v diagonálním tvaru

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \;\; \lambda_{1,2} = 1, \;\; e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Její řešení $x(t) = x(0)e^t$, $y(t) = y(0)e^t$ jsou polopřímky vycházející z nulového bodu (obr. 11.3 nahoře vlevo). Nulový bod soustavy, jejíž obě vlastní hodnoty jsou kladné, nazýváme nestabilní uzel. Nulový bod soustavy, jejíž obě vlastní hodnoty jsou záporné, nazýváme stabilní uzel.

Lineární soustava

$$x'(t) = x(t), \;\; y'(t) = -y(t)$$

sestává ze dvou nezávislých diferenciálních rovnic. Její matice a exponenciála jsou

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \;\; \lambda_{1,2} = \pm 1, \;\; e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Její řešení $x(t) = x(0)e^t$, $y(t) = y(0)e^{-t}$ jsou osy x a y a dále hyperboly $x(t) \cdot y(t) = x(0) \cdot y(0)$ (obr.11.3 nahoře vpravo). Nulový bod soustavy, jejíž jedna vlastní hodnota

Π Σ

nestabilní uzel sedlo

Υ Φ

střed stabilní ohnisko

Obrázek 11.3: Lineární soustava

je záporná a druhá kladná, nazýváme sedlo.

Lineární soustava

$$x'(t) = -y(t), \;\; y'(t) = x(t)$$

je ekvivalentní rovnici druhého řádu $x''(t) = -x(t)$. Její matice a exponenciála je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \;\; \lambda_{1,2} = \pm i, \;\; e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Její řešení

$$x(t) = x(0)\cos t - y(0)\sin t, \;\; y(t) = x(0)\sin t + y(0)\cos t$$

jsou kružnice s poloměrem $\sqrt{x^2(0) + y^2(0)}$ (obr.11.3 dole vlevo). Nulový bod soustavy, jejíž obě vlastní hodnoty jsou ryze imaginární nazýváme střed.

Lineární soustava

$$x'(t) = -x(t) - y(t), \;\; y'(t) = x(t) - y(t)$$

má matici a její exponenciálu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \lambda_{1,2} = -1 \pm i, \ e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{bmatrix}$$

Její řešení

$$x(t) = (x(0)\cos t - y(0)\sin t)e^{-t}, \ \ y(t) = (x(0)\sin t + y(0)\cos t)e^{-t}$$

jsou geometrické spirály (obr.11.3 dole vpravo). Nulový bod soustavy, jejíž vlastní hodnoty jsou komplexně sdružená čísla, nazýváme stabilní ohnisko, je-li jejich reálná část záporná, a nestabilní ohnisko, je-li jejich reálná část kladná. Další řešení lineárních soustav jsou na obr.11.4. Jejich matice a vlastní hodnoty jsou

$$\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ -3 & -10 \end{bmatrix} \\[6pt]
\lambda : 7, 13 & \lambda : -3, 1 & \lambda = -7, -13 \\[10pt]
\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \\[6pt]
\lambda : 1 \pm 4i & \lambda : \pm 3i & \lambda : -3 \pm 3i \\[10pt]
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \\[6pt]
\lambda : 0, 1 & \lambda : 0 & \lambda : 1
\end{array}$$

Soustavy v horním řádku mají reálné vlastní hodnoty. Jsou-li obě vlastní hodnoty kladné, řešení se od nulového bodu vzdalují, jsou-li obě záporné, řešení se k nulovému bodu přibližují. Je-li jedna vlastní hodnota kladná a druhá záporná, řešení se přibližují nebo vzdalují podle odpovídajících vlastních vektorů. V druhém řádku jsou soustavy s komplexními vlastními hodnotami. Je-li jejich reálná část kladná nebo záporná, řešení se z nulového bodu vzdalují nebo se k němu přibližují po spirálách. Jsou-li obě vlastní hodnoty ryze imaginární, řešení jsou elipsy. Ve třetím řádku jsou soustavy jejichž vlastní hodnoty jsou buďto nulové nebo jednonásobné. Je-li matice A nulová (uprostřed), má soustava pouze konstantní řešení, trajektorie jsou body. Má-li matice A hodnost 1 (vlevo), je jedna její vlastní hodnota nulová a každý bod na paprsku odpovídajícího vlastního vektoru určuje konstantní trajektorii. Z těchto bodů se ostatní trajektorie vzdalují ve směru druhého vlastního vektoru. Poslední případ dvojnásobné nenulové vlastní hodnoty (vpravo) si probereme podrobněji.

Má-li matice A vlastní hodnotu λ násobnosti $m > 1$, označme $L(\lambda)$ čtvercovou matici typu $m \times m$ definovanou

$$L(\lambda)_{ii} = \lambda, \ \ L(\lambda)_{ij} = 1 \text{ pro } j = i+1, \ \ L(\lambda)_{ij} = 0 \text{ jinak}$$

Ψ nestabilní uzel Ω sedlo ff stabilní uzel

fi nestabilní ohnisko fl střed ffi stabilní ohnisko

ffl ı J

Obrázek 11.4: Lineární soustavy

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Nechť A má vlastní hodnoty λ_i s násobnostmi m_i, kde $1 \le i \le r$ a $m_1 + \cdots + m_r = n$. V tomto případě lze matici A rozložit na kanonický Jordanův tvar $A = V\Lambda U$, kde U, V jsou opět navzájem inverzní matice, a Λ je sestavena z matic $L(\lambda_i)$ na diagonále

$$\Lambda_{m_1+\ldots+m_{k-1}+i,m_1+\ldots+m_{k-1}+j} = L(\lambda_k)_{ij}, \quad \Lambda_{ij} = 0 \text{ jinak}$$

a opět $e^A = Ve^\Lambda U$. Mocniny matice $L(\lambda)$ jsou

$$\begin{aligned} L(\lambda)^k_{ij} &= \binom{k}{j-i}\lambda^{k+i-j}, \quad 0 \le j-i \le k \\ L(\lambda)^k_{ij} &= 0, \quad j-i < 0 \end{aligned}$$

Například pro $m = 4$ tyto mocniny jsou

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}$$

Exponenciála matice $L(\lambda)t$ je pak

$$\begin{aligned} (e^{L(\lambda)t})_{ij} &= \sum_{k=j-i}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \binom{k}{j-i} \lambda^{k+i-j} = t^{j-i} \sum_{k=j-i}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-j+i}}{(j-i)!(k-j+i)!} \\ &= \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Pro $n = 4$ je

$$e^{L(\lambda)t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t} & \frac{1}{6}t^3 e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Obecné řešení lineární diferenciální soustavy je tedy lineární kombinace členů $t^i e^{\lambda t}$, kde λ je vlastní hodnota a i je nejvýše rovna její násobnosti

Tvrzení 310 *Nechť matice A má vlastní hodnoty λ_j s násobnostmi r_j, kde $r_1 + \cdots + r_m = n$ je dimenze matice. Pak obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic $x'(t) = A \cdot x(t)$ má tvar*

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}(t) e^{\lambda_j t}$$

kde λ_j je vlastní hodnota matice A násobnosti r_j a P_{ij} je mnohočlen stupně nejvýše r_j.

11.2 Stabilita stacionárních bodů

Definice 311 *Tok soustavy diferenciálních rovnic $x'(t) = f(x(t))$ s lipschitzovským zobrazením $f : _{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ je zobrazení $F : _{\subseteq}\mathbb{R}_{n+1} \to \mathbb{R}_n$ takové, že pro $c \in \mathbb{R}_n$, $t \in \mathbb{R}$ platí $F(c,t) = d \in \mathbb{R}_n$ právě když existuje řešení soustavy $x'(t) = f(x(t))$, pro které $x(0) = c$ a $x(t) = d$.*

Tok lineární diferenciální rovnice $x'(t) = rx(t)$ je $F(c,t) = ce^{rt}$. Jeho definiční obor je celé $\mathbb{R}_2$. Pro diferenciální rovnici $x'(t) = rx^2(t)$ je tok $F(c,t) = c/(1 - rct)$ s definičním oborem $\mathcal{D}(F) = \{[c,t] : \ rct < 1\}$. Věta 307 zaručuje, že tok soustavy diferenciálních rovnic je definován jednoznačně.

Tvrzení 312 *Nechť F je tok soustavy diferenciálních rovnic $x'(t) = f(x(t))$ s lipschitzovským zobrazením $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$. Pak F je spojité zobrazení a*

$$\partial_{n+1}F = f \circ F, \quad F(x,0) = x, \quad F(F(x,t),s) = F(x,t+s).$$

Důkaz: Nechť K je lipschitzovská konstanta f, $y \approx x$, $s \approx t$. Pak existuje u mezi t a s, tak že

$$\begin{aligned} \|F(y,s) - F(x,t)\| &\leq \|F(y,s) - F(y,t)\| + \|F(y,t) - F(x,t)\| \\ &\leq \partial_{n+1}F(y,u)|t-s| + \|y-x\|e^{K|t-s|} \approx 0 \end{aligned}$$

takže F je spojité. Přímo z definice plyne $\partial_{n+1}F = f \circ F$. Pro pevné x, t položme $y(s) = F(F(x,t),s)$, $z(s) = F(x,t+s)$ (obr. 11.5 vlevo). Pak $y(0) = F(x,t) = z(0)$ a obě funkce y i z jsou řešením soustavy, tj, $y'(s) = f(y(s))$, $z'(s) = f(z(s))$. Z věty 307 plyne $y(s) = z(s)$. □

Každé $x \in \mathbb{R}_n$ určuje křivku $F(x) : \subseteq\mathbb{R} \to \mathbb{R}_n$ definovanou $F(x)(t) = F(x,t)$, která je řešením soustavy s počáteční podmínkou $F(x)(0) = x$. Každé $t \in \mathbb{R}$ určuje zobrazení $F(.,t) : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$. Přitom

$$F(.,0) = \mathrm{Id}, \quad F(.,t) \circ F(.,s) = F(.,t+s)$$

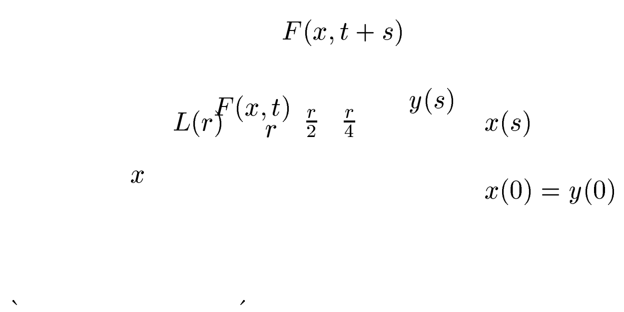
Definice 313 *Bod $c \in \mathbb{R}_n$ je stacionární bod soustavy diferenciálních rovnic $x'(t) = f(x(t))$ s tokem F, pokud $f(c) = 0$, tj. $F(c,t) = c$. Stacionární bod $c \in \mathbb{R}_n$ soustavy $x'(t) = f(x(t))$ je stabilní, pokud pro každé $a \approx c$ a každé $t \in \mathbb{R}^*$, $t > 0$ platí $F(a,t) \approx c$.*

Lineární diferenciální rovnice $x'(t) = rx(t)$ s řešením $x(t) = x_0e^{rt}$ má stacionární bod 0. Je-li $r \leq 0$, je tento bod stabilní. Je-li $r > 0$, je nestabilní. Diferenciální rovnice $x'(t) = x(t)(1 - x(t))$ (logistický růst, příklad 132) má nestabilní stacionární bod 0 a stabilní stacionární bod 1.

Tvrzení 314 *Lineární soustava diferenciálních rovnic $x'(t) = A \cdot x(t)$ má stacionární bod $\mathbf{o}$. Mají-li všechny vlastní hodnoty matice A zápornou reálnou část, je $\mathbf{o}$ stabilní bod soustavy. Jestliže alespoň jedna vlastní hodnota soustavy má kladnou reálnou část, není $\mathbf{o}$ stabilní bod soustavy.*

Důkaz: Nechť každá vlastní hodnota matice A má zápornou reálnou část. Z tvrzení 310 plyne $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{At} = 0$, takže pro každou počáteční podmínku $a \approx \mathbf{o}$ a každé $t \in \mathbb{R}^*$, $t \geq 0$ je $F(a,t) = e^{At} \cdot a \approx \mathbf{o}$. Nechť existuje vlastní hodnota A, která má kladnou reálnou část. Pak Pro nějakou dvojici indexů i, j je $\lim\limits_{t\to+\infty}(e^{At})_{ij} = \pm\infty$. Pro $t \in \mathbb{R}^\infty$, $t > 0$ položme $a_j = 1/(e^{At})_{ij} \approx 0$, $a_k = 0$ pro $k \neq j$. Pak $(e^{At} \cdot a)_i = 1$, takže $\mathbf{o}$ není stabilní. □

V případě obecné soustavy diferenciálních rovnic $x'(t) = f(x(t))$, můžeme někdy stabilitu stacionárních bodů rozhodnout na základě lineární soustavy, která danou soustavu v okolí stacionárního bodu nejlépe aproximuje. Matice této lineární soustavy je Jacobián zobrazení f ve stacionárním bodě.



Obrázek 11.5: Stabilita

Věta 315 *Nechť $x'(t) = f(x(t))$ je soustava diferenciálních rovnic s diferencovatelnou pravou stranou $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$. Nechť $f(c) = \mathbf{0}$ je stacionární bod soustavy a nechť všechny vlastní hodnoty Jacobiánu $\partial f(c)$ mají zápornou reálnou část. Pak c je stabilní bod soustavy.*

Důkaz: Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $c = \mathbf{0}$ a položme $A = \partial f(\mathbf{0})$. Pak existuje $s > 0$ takové, že $||e^{As}|| \le \frac{1}{4}$, tj. pro každý $x \in \mathbb{R}_n$ je $||e^{As} \cdot x|| \le ||x||/4$. Zvolme $R > 0$ a nechť $K > 0$ je lipschitzovská konstanta zobrazení f na množině $B_R(\mathbf{0})$. Protože parciální derivace f jsou spojité a $\lim\limits_{x\to\mathbf{0}} ||f(x) - A\cdot x||/||x|| = 0$, pro každé $0 < r \le R$ existuje

$$L(r) = \max\left\{\frac{||f(x) - A\cdot x||}{||x||},\ \ ||x|| \le r\right\} \quad \text{a} \quad \lim_{r\to 0^+} L(r) = 0$$

Nechť $r < Re^{-Ks}$ a $x(t)$, $y(t)$ jsou řešení soustavy a její linearizace na intervalu $[0,s]$ s počáteční podmínkou v $B_r(\mathbf{0})$ (obr. 11.5 vpravo), tj.

$$x'(t) = f(x(t)),\ \ y'(t) = A\cdot y(t),\ \ x(0) = y(0) \in B_r(\mathbf{0}),\ \ t \in [0,s]$$

Protože $||x'(t)|| = ||f(x(t))|| \le K||x(t)||$, pro každé $t \in [0,s]$ je $||x(s)|| \le ||x(0)||e^{Kt}$, takže $x(t) \in B_R(\mathbf{0})$. Položme $g(t) = ||x(t) - y(t)||$. Pak pro $t \in [0,s]$ je

$$\begin{aligned}
|g'(t)| &\le ||x'(t) - y'(t)|| = ||f(x(t)) - A\cdot y(t)|| \\
&\le ||f(x(t)) - f(y(t))|| + ||f(y(t)) - A\cdot y(t)|| \\
&\le K||x(t) - y(t)|| + L(re^{Ks})||y(t)|| \\
&\le Kg(t) + re^{Ks}L(re^{Ks})
\end{aligned}$$

Zvolme r_0 tak, že pro každé $r < r_0$ je $L(re^{Ks})\frac{e^{Ks}}{K}(e^{Ks} - 1) < \frac{1}{4}$. Podle tvrzení 306 pro každé $t \in [0,s]$ je

$$g(t) < L(re^{Ks})\frac{re^{Ks}}{K}(e^{Ks} - 1) < \frac{r}{4}$$

Odtud
$$||x(s)|| \leq ||y(s)|| + ||x(s) - y(s)|| \leq \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2}$$
Je-li tedy $x \in B_r(\mathbf{0})$, pak $F(x,s) \in B_{r/2}(\mathbf{0})$ a pro každé $t \in [0,s]$ je $F(x,t) \in B_{re^{Ks}}(\mathbf{0})$. Z toho plyne že pro každé $t > 0$ je $F(x,t) \in B_{re^{Ks}}(\mathbf{0})$. Je-li $x \approx \mathbf{0}$, je $F(x,t) \approx \mathbf{0}$ pro každé $t > 0$, takže $\mathbf{0}$ je stabilní bod. □

Řešení soustavy diferenciálních rovnic se zjednoduší, najdeme-li funkce, které jsou na řešeních buď konstantní nebo monotónní. Takové funkce se nazývají invarianty nebo ljapunovské funkce.

Definice 316 *Nechť $x'(t) = f(x(t))$ je soustava diferenciálních rovnic s diferencovatelným zobrazením $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ a $V : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce.*
1. V je invariant soustavy, jestliže $\operatorname{grad} V(x) \cdot f(x) = 0$.
2. V je ljapunovská funkce soustavy, jestliže $\operatorname{grad} V(x) \cdot f(x) \leq 0$.
3. V je potenciál soustavy, jestliže $f(x) = -\operatorname{grad} V(x)$.

Připomeňme, že gradient funkce je vektor jejích parciálních derivací, takže
$$\operatorname{grad} V(x) \cdot f(x) = \partial_1 V(x) \cdot f_1(x) + \cdots + \partial_n V(x) \cdot f_n(x)$$
Potenciál je speciální případ ljapunovské funkce. Je-li $f(x) = -\operatorname{grad} V(x)$, je $\operatorname{grad} V(x) \cdot f(x) = -||\operatorname{grad} V(x)||^2 \leq 0$. Je-li V gradient, pak trajektorie soustavy se pohybují ve směru největšího poklesu funkce V kolmo na její vrstevnice. Je-li V ljapunovská funkce, trajektorie soustavy překračují vrstevnice ve stejném směru, od vyšších hodnot k nižším, ale ne nutně v kolmém směru. Nakonec je-li V invariant, trajektorie soustavy jsou podmnožinami vrstevnic.

Tvrzení 317 *Nechť $V : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce a $x(t)$ řešení soustavy $x'(t) = f(x(t))$ s diferencovatelnou pravou stranou $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$. Položme $h(t) = V(x(t))$. Je-li V invariant soustavy, je h konstantní funkce. Je-li V ljapunovská funkce soustavy, je h nerostoucí funkce.*

Důkaz: Položme $H(x) = \operatorname{grad} V(x) \cdot f(x)$. Pak
$$h'(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x(t)) \cdot x_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x(t)) \cdot f(x_i(t)) = H(x(t)) \;\square$$
Má-li soustava $x'(t) = f(x(t))$ potenciál V a jestliže v bodě $x \in \mathcal{D}(V)$ je $\operatorname{grad} V(x) = 0$, je x stacionární bod soustavy. Jestliže Hessián $\partial_{ij} V(x)$ je negativně definitní, je x stabilní. Je totiž $\partial_i f_j(x) = -\partial_{ij} V(x)$.

Uvažujme obecnou soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic
$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t) \end{aligned}$$
Je-li $a + d = 0$, má soustava invariant
$$V(x,y) = cx^2 - 2axy - by^2.$$

Pokud V je pozitivně definitní, jsou trajektorie elipsy (obr. 11.3 dole vlevo, nebo obr. 11.4 uprostřed). Je-li V je indefinitiní, jsou trajektorie hyperboly (obr. 11.3 nahoře vpravo, nebo obr. 11.4 nahoře uprostřed). Je-li $b = c$, má soustava potenciál

$$V(x, y) = -(ax^2 + 2bxy + dy^2)/2.$$

(obr. 11.3 nahoře, nebo obr. 11.4 dole vlevo). Je-li $a, d < 0$ a $(b + c)^2 < 4ad$, je například $V(x, y) = x^2 + y^2$ ljapunovská funkce soustavy (obr. 11.3 nahoře vpravo a obr. 11.4 uprostřed vpravo).

Soustava diferenciálních rovnic

$$x'(t) = x(t)(1 - y(t)), \quad y'(t) = y(t)(x(t) - 1)$$

pro populační model dravce a kořisti má pro $x, y > 0$ invariant $V(x, y) = x + y - \ln x - \ln y$ (obr. 11.1). Její stacionární body $\mathfrak{o} = [0, 0]$ a $[1, 1]$ nalezneme řešením soustavy rovnic $x(1 - y) = 0$ a $y(x - 1) = 0$. Diferenciál pravé strany je

$$\partial f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - y & -x \\ y & x - 1 \end{bmatrix}$$

V bodě $[0, 0]$ jsou vlastní hodnoty $\lambda = \pm 1$, takže se jedná o sedlo. V bodě $[1, 1]$ jsou vlastní hodnoty $\lambda = \pm i$, a jedná se o střed.

Soustava diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

má potenciál

$$V(x, y) = \frac{1}{4}\Big((x - 1)^2 + y^2\Big)\Big((x + 1)^2 + y^2\Big)$$

se sedlovým bodem $[0, 0]$ a lokálními minimy v bodech $[-1, 0]$ a $[1, 0]$ (obr. 11.6 vlevo).

Soustava diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

má ljapunovskou funkci

$$V(x, y) = (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)$$

která má lokální minima v bodech jednotkové kružnice. Tato kružnice je trajektorií systému, ke které ostatní trajektorie směřují po spirálách. Počátek je nestabilní stacionární bod.

Obrázek 11.6: Ljapunovské funkce

Má-li soustavu $x'(t) = f(x(t))$ invariant $V : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$, lze snížit počet diferenciálních rovnic o jednu. Z rovnice $V(x_1, \ldots, x_n) = C$ určíme podle věty o implicitní funkci $x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Dosazením do původní soustavy dostáváme

$$x_i'(t) = f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1})), \;\; i = 1, \ldots, n-1$$

Hodnotu konstanty C určíme z počáteční podmínky $x_i(0) = c_i$ jako $C = g(c_1, \ldots, c_n)$.

11.3 Newtonovská mechanika

Rovnice Newtonovské mechaniky

$$mx''(t) = F(x(t)), \;\; x(t_0) = x_0, \;\; x'(t_0) = v_0$$

s potenciálem

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(s)\, ds, \;\; F(x) = -V'(x)$$

převedeme na soustavu dvou rovnic

$$x'(t) = v(t), \;\; v'(t) = -V'(x(t))/m$$

Potenciální energie není potenciálem soustavy diferenciálních rovnic, odvozuje se však od ní invariant celkové energie (součet energie kinetické a potenciální). Soustava

$$x'(t) = v(t), \;\; v'(t) = -V'(x(t))/m$$

má invariant

$$H(x,v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

Uvažujeme-li v mechanických systémech faktor tření, musíme uvažovat další sílu, která působí proti směru pohybu. V nejjednodušším případě předpokládáme, že síla tření je úměrná rychlosti. Pak dostáváme diferenciální rovnici

$$mx''(t) = F(x(t)) - qx'(t), \;\; x(t_0) = x_0, \;\; x'(t_0) = v_0$$

nebo alternativně soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$x' = v, \;\; v' = \frac{1}{m}F(x) - qv$$

kde $q > 0$ je koeficient tření. V tomto případě je celková energie

$$H(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

ljapunovská funkce soustavy.

Obrázek 11.7: Matematické kyvadlo

Lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$x''(t) + 2ax'(t) + bx(t) = 0$$

kde a, b jsou konstanty převedeme na soustavu lineárních rovnic prvního řádu

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -2a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Vlastní hodnoty její matice splňují rovnici $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$. Je-li $a^2 > b$ má tato rovnice dvě reálná řešení $\lambda_1 = -a - \sqrt{a^2 - b}$, $\lambda_2 = -a + \sqrt{a^2 - b}$. Řešení rovnice je pak

$$x(t) = C_1 e^{(-a-\sqrt{a^2-b})t} + C_2 e^{(-a+\sqrt{a^2-b})t}$$

Je-li $a^2 < b$ jsou vlastní hodnoty komplexní čísla a řešení je

$$x(t) = e^{-at}\left(C_1 \cos(\sqrt{b-a^2}t) + C_2 \sin(\sqrt{b-a^2}t)\right)$$

U matematického kyvadla označme x úhel průvodiče od vrcholu dráhy. Potenciální funkce je $V(x) = \cos x$, takže

$$x' = v, \quad v' = \sin x$$

Celková energie je $H(x,v) = \frac{1}{2}v^2 + \cos x$ (obr. 11.7 nahoře). Systém má sedlové stacionární body $[2k\pi, 0]$ a středy $[(2k+1)\pi, 0]$. Uvažujeme-li působení tření, dostáváme dynamický systém

$$x' = v, \quad v' = \sin x - v$$

Celková energie $H(x,v) = \frac{1}{2}v^2 + \cos x$ je nyní ljapunovská funkce, podle trajektorií je klesající (obr. 11.7 dole). Stacionární body $[2k\pi, 0]$ jsou nestabilní uzly a stacionární body $[(2k+1)\pi, 0]$ jsou stabilní uzly.