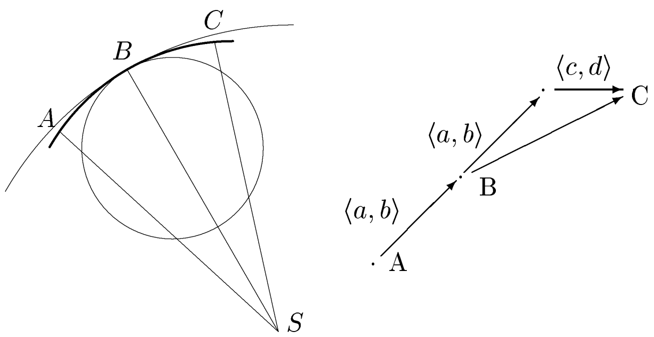
Kapitola 12

Rovinné křivky

12.1 Evoluta a involuta

Křivost křivky má ještě jeden geometrický význam. Její převrácená hodnota je poloměr oskulační kružnice, tj. kružnice, která křivku v daném bodě nejlépe aproximuje. Oskulační kružnici určuje trojice různých nekonečně blízkých bodů křivky.



Obrázek 12.1: Oskulační kružnice

Definice 318 *Křivka $\langle x(t),y(t)\rangle$ má v bodě t oskulační kružnici se středem v bodě $S=\langle X(t),Y(t)\rangle$, jestliže střed kružnice procházející body*

$$\langle x^*(t-\alpha),y^*(t-\alpha)\rangle,\ \ \langle x(t),y(t)\rangle,\ \ \langle x^*(t+\alpha),y^*(t+\alpha)\rangle$$

7je pro každé nenulové infinitesimální α nekonečně blízko bodu S. Křivku $\langle X(t),Y(t)\rangle$ spojující středy oskulačních kružnic nazýváme evolutou křivky $\langle x(t),y(t)\rangle$.

Tvrzení 319 *Jestliže křivka $\langle x(t), y(t)\rangle$ má v bodě t spojité druhé derivace a $x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t) \neq 0$, pak střed její oskulační kružnice je*

$$\begin{aligned} X(t) &= x(t) - y'(t)\frac{x'^2(t)+y'^2(t)}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)} \\ Y(t) &= y(t) + x'(t)\frac{x'^2(t)+y'^2(t)}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)} \end{aligned}$$

Důkaz: Označme $A = \langle x^*(t-\alpha), y^*(t-\alpha)\rangle$, $B = \langle x(t), y(t)\rangle$, $C = \langle x^*(t+\alpha), y^*(t+\alpha)\rangle$ body křivky a hledejme střed $S = \langle X(t), Y(t)\rangle$ kružnice, která body A, B, C prochází (obr. 12.1). Položme

$$\begin{array}{ll} a = x(t) - x^*(t-\alpha), & b = y(t) - y^*(t-\alpha) \\ c = x^*(t+\alpha) - 2x(t) + x^*(t-\alpha), & d = y^*(t+\alpha) - 2y(t) + y^*(t-\alpha), \\ u = X(t) - x(t), & v = Y(t) - y(t). \end{array}$$

Pak je

$$\frac{a}{\alpha} \approx x'(t), \quad \frac{b}{\alpha} \approx y'(t), \quad \frac{c}{\alpha^2} \approx x''(t), \quad \frac{d}{\alpha^2} \approx y''(t), \quad \frac{c}{\alpha} \approx 0, \quad \frac{d}{\alpha} \approx 0$$

Protože bod $S - B = \langle u, v\rangle$ je střed kružnice procházející body

$$A - B = \langle -a, -b\rangle, \quad B - B = \langle 0, 0\rangle, \quad C - B = \langle a+c, b+d\rangle,$$

dostáváme podmínky

$$(u+a)^2 + (v+b)^2 = u^2 + v^2 = (u-a-c)^2 + (v-b-d)^2$$

které určují soustavu lineárních rovnic pro neznámé u a v

$$\begin{aligned} -2au - 2bv &= a^2 + b^2 \\ 2(a+c)u + 2(b+d)v &= (a+c)^2 + (b+d)^2 \end{aligned}$$

Jejich řešením (a dělením čitatele i jmenovatele α^3) dostáváme

$$\begin{aligned} u &= -\frac{(\frac{b}{\alpha}+\frac{d}{\alpha})(\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\alpha^2}) + \frac{b}{\alpha}((\frac{a+c}{\alpha})^2 + (\frac{b+d}{\alpha})^2)}{2(\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{d}{\alpha^2} - \frac{b}{\alpha}\cdot\frac{c}{\alpha^2})} \\ &\approx -\frac{y'(t)(x'^2(t)+y'^2(t))}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)} \\ v &= \frac{(\frac{a}{\alpha}+\frac{c}{\alpha})(\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\alpha^2}) + \frac{a}{\alpha}((\frac{a+c}{\alpha})^2 + (\frac{b+d}{\alpha})^2)}{2(\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{d}{\alpha^2} - \frac{b}{\alpha}\cdot\frac{c}{\alpha^2})} \\ &\approx \frac{x'(t)(x'^2(t)+y'^2(t))}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)} \end{aligned}$$

Poloměr oskulační kružnice $r(t)$ v bodě t nazýváme poloměr křivosti. Je to velikost vektoru $\langle X(t) - x(t), Y(t), y(t)\rangle$, tedy

$$r(t) = \frac{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}$$

Je-li křivka parametrizovaná délkou, je

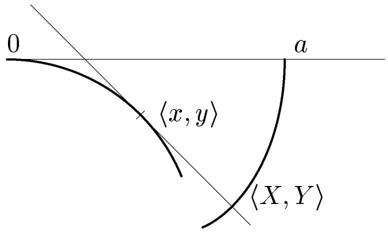
$$r(s) = \frac{1}{|x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|} = \frac{1}{k(s)}$$

Stejně se zjednodušuje vzorec pro evolutu křivky

$$\begin{aligned} X(s) &= x(s) - \frac{y'(s)}{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)} \\ Y(s) &= y(s) + \frac{x'(s)}{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)} \end{aligned}$$

Parametr s evoluty však již není nutně její délka.

Tvar evoluty křivky je vidět z opačné konstrukce involuty. Involuta křivky, je dráha bodu přímky, která se po ní valí. Při tomto pohybu se bod involuty otáčí okolo bodu dotyku původní křivky s přímkou, takže tato původní křivka je evolutou své involuty.



Obrázek 12.2: Involuta

Tvrzení 320 *Je-li $\langle x(t), y(t)\rangle$ diferencovatelná křivka, pak její involuta má parametrickou rovnici*

$$\begin{aligned} X(t) &= x(t) + (a - \sigma(t))\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \\ X(t) &= x(t) + (a - \sigma(t))\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \end{aligned}$$

pokud $x'^2(t) + y'^{(}t) \neq 0$. Zde a je libovolný parametr.

Důkaz: Předpokládejme, že v čase $t = 0$ se přímka dotýká křivky v bodě $\langle x(0), y(0)\rangle$, a bod, který involutu vytváří, je ve vzdálenosti a od bodu dotyku. V čase t se pak přímka dotýká křivky v bodě $\langle x(t), y(t)\rangle$ a bod, který involutu vytváří je od bodu dotyku vzdálen $a - \sigma(t)$. □

Zatímco křivka má pouze jednu evolutu, má celý soubor involut parametrizovaný a. Pro křivku $\langle x(s), y(s)\rangle$ parametrizovanou délkou se vzorec parametrické rovnice involuty zjednodušují

$$X(s) = x(s) + (a-s)x'(s), \quad Y(s) = y(s) + (a-s)y'(s)$$

Pro involutu $\langle X(s), Y(s)\rangle$ parametr s ale již není délka.

Tvrzení 321 *Křivka, která má spojité derivace třetího řádu, je evolutou své involuty.*

Důkaz: Nechť $\langle x(s), y(s)\rangle$ je křivka parametrizovaná délkou a

$$X(s) = x(s) + (a-s)x'(s), \quad Y(s) = y(s) + (a-s)y'(s)$$

její involuta. Evolutu křivky $\langle X(s), Y(s)\rangle$ určíme podle tvrzení 319. Je

$$\begin{aligned}
X' &= (a-s)x'' = (s-a)y'\varphi' \\
Y' &= (a-s)y'' = (a-s)x'\varphi' \\
X'' &= y'\varphi' + (s-a)y''\varphi' + (s-a)y'\varphi'' \\
Y'' &= -x'\varphi' - (s-a)x''\varphi' - (s-a)x'\varphi''
\end{aligned}$$

Odtud

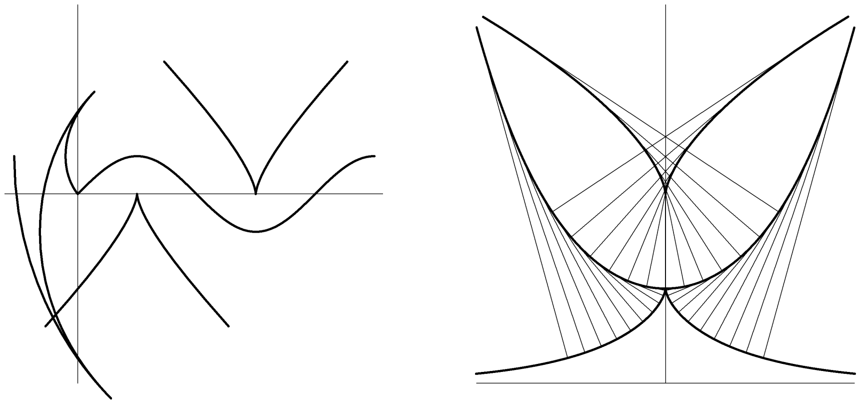
$$X'Y'' - X''Y' = (s-a)^2\varphi'^2(x'y'' - x''y') = (s-a)^2\varphi'^3$$

Evoluta je tedy

$$\begin{aligned}
u(s) &= X(s) - Y'(s)\frac{X'^2(s) + Y'^2(s)}{X'(s)Y''(s) - X''(s)Y'(s)} \\
&= x(s) + (a-s)x'(s) + (s-a)x'(s)\varphi'(s)\frac{(s-a)^2\varphi'^2(s)}{(s-a)^2\varphi'^3(s)} = x(s) \\
v(s) &= Y(s) + X'(s)\frac{X'^2(s) + Y'^2(s)}{X'(s)Y''(s) - X''(s)Y'(s)} \\
&= y(s) + (a-s)y'(s) + (s-a)y'(s)\varphi'(s)\frac{(s-a)^2\varphi'^2(s)}{(s-a)^2\varphi'^3(s)} = x(s)
\end{aligned}$$

Involuta a evoluta sinusové křivky je na obr. 12.3 vlevo. V inflexních bodech $x = k\pi$ se evoluta vzdaluje do nekonečna, zatímco involuta v nich má nulovou rychlost a bod obratu.

Involuta a evoluta hyperbolického kosinu je na obr. 12.3 vpravo. Graf funkce $f(x) = a\cosh\frac{x}{a}$ parametrizujeme rovnicí $x(t) = at$, $y(t) = a\cosh t$. Pak je



Obrázek 12.3: Involuta a evoluta sinu a hyperbolického kosinu

$$x'(t) = 1, \ \ x''(t) = 0, \ \ y'(t) = a \sinh t, \ \ y''(t) = a \cosh t$$

takže $x'^2(t) + y'^2(t) = a^2 \cosh^2 t$. Rovnice evoluty je

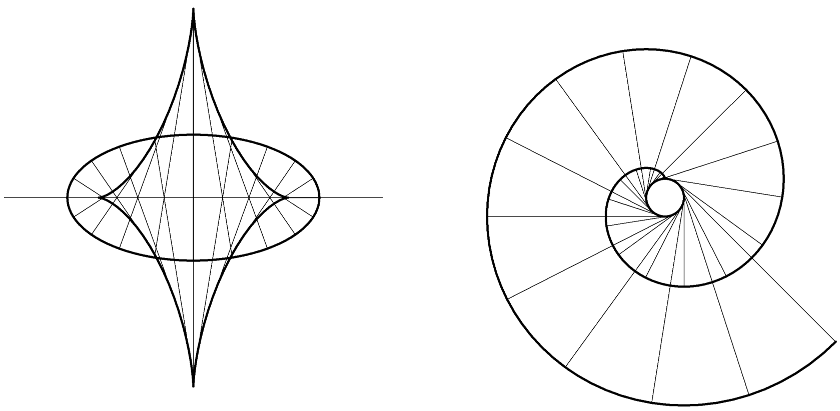
$$X(t) = a(t - \sinh t), \ \ Y(t) = a(\cosh t + 1)$$

Ze vzorce pro délku $\sigma(t) = a \sinh t$ odvodíme rovnici involuty.

Příklad 322 (Traktrix) *Rovnice involuty hyperbolického kosinu dotýkající se křivky v bodě* $\langle 0, a \rangle$ *je*

$$X(t) = a(t - \tanh t), \ \ Y(t) = \frac{a}{\cosh t}$$

Tato křivka se nazývá traktrix. Pro $t \to \pm\infty$ se asymptoticky přibližuje k ose x.



Obrázek 12.4: Evoluta elipsy a involuta kružnice

Rovnice elipsy a jejich derivace jsou

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos t & y(t) &= b\sin t \\ x'(t) &= -a\sin t & y'(t) &= b\cos t \\ x''(t) &= -a\cos t & y''(t) &= -b\sin t \end{aligned}$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t, \quad x'y'' - x''y' = ab$$

Rovnice evoluty je tedy

$$X(t) = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t, \quad Y(t) = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$$

a to je (deformovaná) astroida. V bodech $t = k\pi/2$ má hroty; její vektor rychlosti je v těchto bodech nulový. Involutu elipsy nelze vyjádřit jednoduchým vzorcem, protože jednoduchým vzorcem nelze vyjádřit její délku. Involuta kružnice s poloměrem r je (obr. 12.4 vpravo)

$$X(t) = r(\cos t + t\sin t), \quad Y(t) = r(\sin t - t\cos t)$$

Geometrická spirála $x(t) = e^{at}\cos t$, $y(t) = e^{at}\sin t$ má derivace

$$\begin{aligned} x'(t) &= e^{at}(a\cos t - \sin t) \\ y'(t) &= e^{at}(a\sin t + \cos t) \\ x''(t) &= e^{at}(a^2\cos t - 2a\sin t - \cos t), \\ y''(t) &= e^{at}(a^2\sin t + 2a\cos t - \sin t) \end{aligned}$$

Odtud $x'^2(t)+y'^2(t) = x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t) = e^{2at}(a^2+1)$, takže délka geometrické spirály je

$$\sigma(t) = \int_0^t e^{at}\sqrt{a^2+1}\,dt = \left[\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}e^{at}\right]_0^t = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}(e^{at}-1)$$

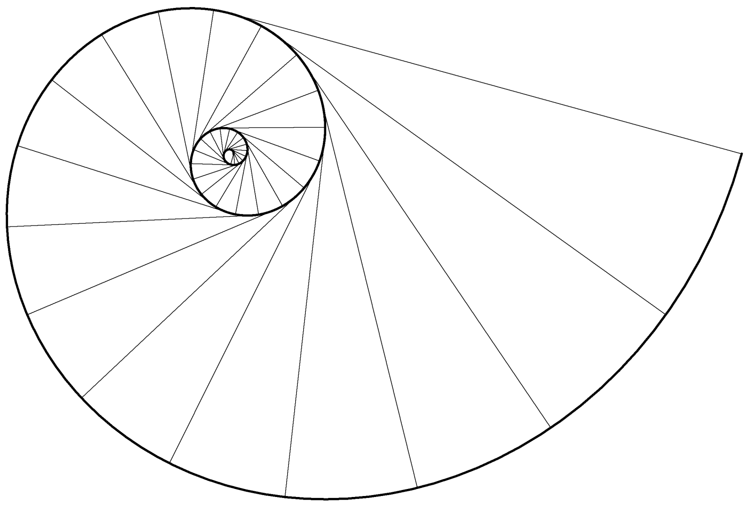
Délka větve geometrické spirály uzavřené v jednotkové kružnici je

$$\lim_{t\to-\infty}\sigma(t) = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

Evoluta geometrické spirály je

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{at}\cos t - e^{at}(a\sin t + \cos t) = -ae^{at}\sin t \\ Y(t) &= e^{at}\sin t - e^{at}(a\cos t - \sin t) = ae^{at}\cos t \end{aligned}$$

To je geometrická spirála, která z původní spirály $\langle x(t), y(t)\rangle$ vznikne otočením o úhel $\frac{\pi}{2}$ a geometrickou podobností s koeficientem a. Svírá tedy s průvodičem stejný úhel, jako spirála původní. Speciálně, jestliže $\frac{\ln a}{a} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, je spirála svou vlastní evolutou. (obr. 12.5).



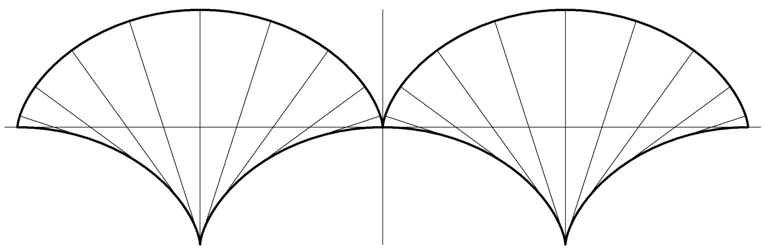
Obrázek 12.5: Evoluta geometrické spirály

Rovnice a derivace prosté cykloidy jsou

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t-\sin t), & y(t) &= r(1-\cos t) \\ x'(t) &= r(1-\cos t), & y'(t) &= r\sin t \\ x''(t) &= r\sin t, & y''(t) &= r\cos t \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} x'^2(t)+y'^2(t) &= 2r^2(1-\cos t) = 4r^2\sin^2\frac{t}{2} \\ x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t) &= r^2(\cos t-1) \end{aligned}$$



Obrázek 12.6: Evoluta cykloidy

Délka cykloidy je tedy

$$\sigma(t) = \int_0^t 2r \sin \frac{t}{2}\, dt = \left[-4 \cos \frac{t}{2}\right]_0^t = 4r \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right) = 8r \sin^2 \frac{t}{4}$$

Speciálně délka oblouku cykloidy mezi dvěma hroty je $\sigma(2\pi) = 8r$. Evoluta cykloidy má rovnici

$$\begin{aligned} X(t) &= rt - r\sin t - r\sin t(-2) = rt + r\sin t \\ Y(t) &= r - r\cos t + (r - r\cos t)(-2) = -r + r\cos t \end{aligned}$$

To je opět cykloida, která je proti původní cykloidě posunuta o r dolů a π doprava (obr. 12.6).

Cvičení

1. Pro danou křivku $\langle x(t), y(t)\rangle$ určete množinu bodů, které od ní mají konstantní vzdálenost a.
2. Určete evolutu paraboly $f(x) = x^2/2a$
3. Určete délku a evolutu Archimedovy spirály.
4. Určete délku epicykloidy a hypocykloidy.