Kapitola 2

LIMITA A SPOJITOST

2.1 Limita posloupnosti

Reálná posloupnost $(a_n)_{n\geq 0}$ přiřazuje každému přirozenému číslu $n \in \mathbb{N}$ reálné číslo $a_n \in \mathbb{R}$. Podle principu vnoření se v nestandardním světě rozšiřuje na posloupnost, která přiřazuje každému $n \in \mathbb{N}^*$ nestandardní reálné číslo $a_n \in \mathbb{R}^*$. Přitom je zde definována stejnými vztahy (stejným vzorcem) jako ve světě standardním. Limita posloupnosti vyjadřuje jak se tato posloupnost chová na nekonečných přirozených číslech.

Definice 7 *Limita reálné posloupnosti $(a_n)_{n\geq 0}$ je soubor*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \{a_p : p \in \mathbb{N}^\infty\}$$

pokud tento soubor je monáda. Není-li tento soubor monáda, říkáme, že limita posloupnosti neexistuje, nebo že to je neurčitý výraz.

Limity posloupností mohou být značně složité soubory a jejich přesné vymezení není vždy důležité. Proto u posloupností zkoumáme, zda je jejich limita zahrnuta v nějaké větší a jednodušší monádě. Pro výpočty limit používáme pro monády a neurčité výrazy symbol $:=$ ve smyslu podmíněné inkluze. Zápis $A := B$ znamená, že pokud B je monáda, je A také monáda a $A \subseteq B$. Pro monádu A je tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n := A \quad \text{právě když} \quad (\forall p \in \mathbb{N}^\infty)(a_p \in A)$$

Je-li limita posloupnosti zahrnuta ve vlastní monádě $a^\bullet$, píšeme zde přímo rovnost, tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \quad \text{právě když} \quad (\forall p \in \mathbb{N}^\infty)(a_p \approx a)$$

Ihned z definice plyne $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ale také $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} := 0^+$. Dále $\lim\limits_{n\to\infty} n := +\infty$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} n := \pm\infty$. Limita posloupnosti nemusí existovat. Například pro posloupnost $a_n = (-1)^n$ je $a_p = 1$ pro $p \in \mathbb{N}^\infty$ sudé a $a_p = -1$ pro $p \in \mathbb{N}^\infty$ liché, takže soubor $\{a_p : p \in \mathbb{N}^\infty\} = \{-1, 1\}$ není monáda.

Limita posloupnosti se nezmění, změní-li se pouze konečný počet jejích členů. Nechť $n_1, \ldots, n_k$ je konečný seznam všech indexů, kde se posloupnost $(a_n)_{n\geq 0}$ liší od $(b_n)_{n\geq 0}$. Pro každé přirozené $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$n \neq n_1 \;\&\; \cdots \;\&\; n \neq n_k \quad \Rightarrow \quad a_n = b_n$$

Podle principu expanze platí tato implikace také v nestandardním světě. Speciálně každé $p \in \mathbb{N}^\infty$ je různé od každého n_k, takže $a_p = b_p$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. To znamená, že posloupnost nemusí být pro konečný počet členů vůbec definována, a přesto má smysl mluvit o její limitě. Například $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, přesto že tato posloupnost není definována pro $n = 0$.

Tvrzení 8 *Nechť $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ jsou reálné posloupnosti. Pak*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) := \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) := \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) := \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} := \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} := \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$

Důkaz plyne z definice aritmentických operací na monádách. Jestliže existují $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, i jejich součet, pak pro každé $p \in \mathbb{N}^\infty$ do tohoto součtu náleží $a_p + b_p$. Podobně pro další aritmetické operace. □

Podmíněná rovnost zde znamená, že pokud existují obě limity na pravé straně a pokud existuje také jejich součet (rozdíl, součin, podíl), existuje také limita na levé straně a je zahrnuta do součtu (rozdílu, součinu, podílu) limit na pravé straně. Je tedy například

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (n^2 - n) &= \lim_{n\to\infty} n(n-1) := \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty} (n-1) \\ &:= +\infty \cdot +\infty := +\infty\end{aligned}$$

Tento postup však nevede vždy automaticky k cíli. Počítáme-li

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 - n) := \lim_{n\to\infty} n^2 - \lim_{n\to\infty} n := +\infty - \infty$$

dostáváme neurčitý výraz. Výpočet je sice správný, nevede však k výsledku. Z výpočtu neplyne, že by limita neexistovala.
Obecně je pro každý mnohočlen stupně $k > 0$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k) &= \lim_{n\to\infty} n^k \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_0}{n^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n} + a_k \right) \\ &:= +\infty \cdot a_k := +\infty \cdot \mathrm{sgn}(a_k)\end{aligned}$$

Při výpočtu limit racionálních lomených funkcí čitatele i jmenovatele dělíme vhodnou mocninou n. Například

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} := \frac{2-0^\bullet+0^\bullet}{1+0^\bullet} := 2^\bullet$$

takže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-n+1}{n^2+1} = 2$. Jsou-li stupně čitatele a jmenovatele různé, dělíme je nejvyšší mocninou jmenovatele. Například

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2-1} := \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{1-\frac{1}{n^2}} := \frac{0^\bullet}{1-0^\bullet} := 0^\bullet$$

Příklad 9 *Pro* $R(n) = \dfrac{a_0+\cdots+a^kn^k}{b_0+\cdots+b_ln^l}$, *kde* $a_k \neq 0 \neq b_l$ *je*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} R(n) := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0n^{-k}+\cdots+a_k}{b_0n^{-k}+\cdots+b_ln^{l-k}} := \dfrac{a_k}{+\infty\cdot\operatorname{sgn}(b_l)} := 0^\bullet$ *pro* $l > k$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} R(n) := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0n^{-l}+\cdots+a_kn^{k-l}}{b_0n^{-l}+\cdots+b_l} := +\infty\cdot\operatorname{sgn}(a_k)$ *pro* $l < k$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} R(n) := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0n^{-k}+\cdots+a_k}{b_0n^{-k}+\cdots+b_k} := \left(\dfrac{a_k}{b_k}\right)^\bullet$ *pro* $l = k$

Limita racionální lomené funkce tedy závisí pouze na členech s nejvyšší mocninou. Tento princip lze uplatnit i na odmocniny z racionálních funkcí, například

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^3-n+1}}{n^2+1} := \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}} := \frac{\sqrt{2^\bullet}}{+\infty} := 0^+$$

Při počítání limit je třeba daný výraz algebraicky upravit, abychom nedostali neurčitý výraz. Často používaný postup je převedení rozdílu odmocnin na podíl:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) := \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} := \frac{2}{+\infty} := 0^+$$

Limity posloupností lze někdy určit srovnáním s jednoduššími posloupnostmi.

Tvrzení 10 *Nechť* $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ *jsou reálné posloupnosti.*

1. Je-li $a_n \le b_n$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n := +\infty$, *je* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n := +\infty$.

2. Je-li $a_n \le b_n$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n := -\infty$, *je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n := -\infty$.

3. Je-li $a_n \le b_n \le c_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = b$, *je* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Důkaz: Podle principu expanze platí příslušné nerovnosti i pro každé $p \in \mathbb{N}^\infty$. □

Příklad 11 (Geometrická posloupnost) *Nechť* $r \in \mathbb{R}$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n := +\infty$ *pro* $r > 1$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 1$ *pro* $r = 1$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ *pro* $|r| < 1$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ *neexistuje* *pro* $r = -1$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n := \pm\infty$ *pro* $r < -1$.

Důkaz: 1. Je-li $r > 1$ je $a = r - 1 > 0$ a podle binomické věty $r^n = (1+a)^n > 1+an$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty}(1+an) := +\infty$, je $\lim\limits_{n\to\infty} r^n := +\infty$.
2. Jedná se o konstantní posloupnost.
3. Je-li $r = 0$, je zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$. Je-li $r \neq 0$, je

$$\lim_{n\to\infty} |r|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{|r|^n}} := 1/\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|r|^n} := \frac{1}{+\infty} := 0^\bullet$$

podle 1. Protože také $\lim\limits_{n\to\infty} -|r|^n := 0$ a $-|r|^n \le r^n \le |r|^n$, je i $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$.

Případ 4 je zřejmý a 5 plyne z 1. □

Příklad 12

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{r^n} = 0$ *pro* $k \in \mathbb{N},\ r > 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{n!} = 0$ *pro každé* $r \in \mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{r} = 1$ *pro každé* $r > 0$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} := +\infty$

Důkaz: 1. Položme opět $a = r - 1 > 0$. Pro $n > k$ je

$$\frac{n^k}{r^n} = \frac{n^k}{1 + na + \binom{n}{2}a^2 + \cdots + a^n} \le \frac{n^k}{\binom{n}{k+1}a^{k+1}} \le \frac{n^k(k+1)!}{(n-k)^{k+1}a^{k+1}}$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k(k+1)!}{(n-k)^{k+1}a^{k+1}} = 0$, je i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{r^n} = 0$.
2. Zvolme $m \in \mathbb{N}$ pro které $|r| < m$. Pak pro každé $n > m$ je

$$\left|\frac{r^n}{n!}\right| = \left|\frac{r^m}{m!} \cdot \frac{r}{m+1} \cdots \frac{r}{n}\right| \le \left|\frac{r^m}{m!}\right| \cdot \left|\frac{r}{m}\right|^{n-m}$$

Na pravé straně je geometrická posloupnost, která konverguje k nule.
3. Je-li $r > 1$, položme $a_n = \sqrt[n]{r} - 1 > 0$. Pak $r = (1 + a_n)^n > na_n$, takže $0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n} = 0$. Pro $0 < r < 1$ je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{r} := 1/\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{r}} = 1$.
4. Položme $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Pak $n = (1 + a_n)^n > \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$, takže $0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$.
5. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0$, takže pro každé $p \in \mathbb{N}^\infty$ platí $k^p < p!$ a tedy $k < \sqrt[p]{p!}$. To znamená $\sqrt[p]{p!} \in \mathbb{R}^\infty$. □

2.1.1 Konvergentní posloupnosti

Nová reálná čísla často sestrojujeme jako limity posloupností. K tomu potřebujeme vědět, zda sestrojená posloupnost k nějakém číslo konverguje, i když toto číslo neznáme. Proto hledáme kriteria na to, kdy má posloupnost limitu a kdy je tato limita konečná.

Definice 13 *Nechť $(a_n)_n$ je reálná poloupnost*

1. *Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, říkáme, že $(a_n)_n$ je konvergentní.*
2. *Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n := \pm\infty$, říkáme, že $(a_n)_n$ je divergentní.*
3. *Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, říkáme, že $(a_n)_n$ je oscilující.*

Definice 14

1. *Je-li $(\forall n)(a_n < a_{n+1})$, říkáme, že $(a_n)_n$ je rostoucí.*
2. *Je-li $(\forall n)(a_n > a_{n+1})$, říkáme, že $(a_n)_n$ je klesající.*
3. *Je-li $(\forall n)(a_n \leq a_{n+1})$, říkáme, že $(a_n)_n$ je neklesající.*
4. *Je-li $(\forall n)(a_n \geq a_{n+1})$, říkáme, že $(a_n)_n$ je nerostoucí.*
5. *Je-li $(\forall n)(|a_n| < r)$ pro nějaké $r > 0$, říkáme, že $(a_n)_n$ je omezená.*

Souhrně neklesající a nerostoucí posloupnosti nazýváme monotónní. Posloupnosti rostoucí a klesající nazýváme ryze monotónní.

Tvrzení 15 *Každá monotónní posloupnost má limitu. Tato limita je vlastní právě když je posloupnost omezená.*

Důkaz provedeme pro posloupnost neklesající. Není-li posloupnost $(a_n)_n$ omezená, je $\lim_{n\to\infty} a_n := +\infty$. Kdyby totiž a_p nenáleželo do $+\infty$ pro nějaké $p \in \mathbb{N}^\infty$, existovalo by $a \in \mathbb{R}$ pro které $a_p < a$, takže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ by bylo $a_0 \leq a_n \leq a_p < a$ a posloupnost a_n by byla omezená. Předpokládejme nyní, že posloupnost a_n je omezená. Pak $a_p \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^\infty$ je konečně velké pro každé $p \in \mathbb{N}^\infty$. Předpokládejme sporem, že existují $p < q$, $p, q \in \mathbb{N}^\infty$, pro které $\mathfrak{P}(a_p) < \mathfrak{P}(a_q)$, takže existuje $a \in \mathbb{R}$, pro které $a_p < a < a_q$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \leq a_p < a$, a podle principu expaze také $a_q < a$ a to je spor. □

Definice 16 *Říkáme, že posloupnost* $(a_n)_n$ *je cauchyovská, jestliže pro každé* $p, q \in \mathbb{N}^\infty$ *je* $a_p \approx a_q$.

Věta 17 (Bolzano-Cauchyova věta) *Posloupnost* $(a_n)_n$ *je je konvergentní právě když je cauchyovská.*

Důkaz: Je-li posloupnost $(a_n)_n$ konvergentní, má vlastní limitu $a \in \mathbb{R}$ a pro každé $p, q \in \mathbb{N}^\infty$ platí $a_p \approx a \approx a_q$, takže $(a_n)_n$ je cauchyovská. Naopak je-li $(a_n)_n$ cauchyovská, má zřejmě limitu. Ukážeme, že tato limita je vlastní. Ukažme nejprve, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m \geq n$ je $|a_m - a_n| < 1$. Pokud by to neplatilo, existovala by posloupnost $(m_i)_i$ taková, že pro každé i by bylo $|a_{m_i} - a_i| \geq 1$ a $m_i > i$. Pro nekonečné $i \in \mathbb{N}^\infty$ a $q = m_i \in \mathbb{N}^\infty$ by pak bylo $|a_p - a_q| \geq 1$ a to je spor. V nestandardním světě platí tedy pro všechna $p \in \mathbb{N}^\infty$ $|a_p - a_n| < 1$, takže každé a_p je konečně velké. □

Například každý desetinný rozvoj $0.x_1x_2\ldots$, kde $x_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, určuje posloupnost $a_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k 10^{-k}$, která je cauchyovská. Pro $p, q \in \mathbb{N}^\infty$, $p < q$ je totiž

$$|a_q - a_p| \leq \left| \sum_{k=p+1}^{q} x_k 10^{-k} \right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} 9 \cdot 10^{-k} \leq 10^{-p} \approx 0$$

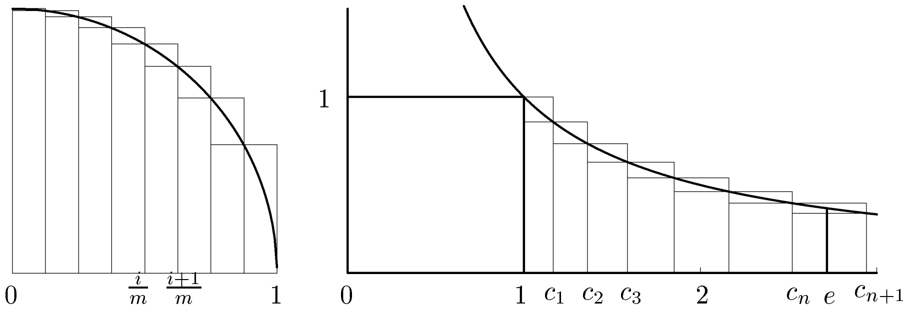
2.1.2 Ludolfovo a Eulerovo číslo

Ludolfovo číslo $\pi = 3.14159265\ldots$ představuje polovinu délky obvodu kruhu s jednotkovým poloměrem a také jeho plošný obsah. Můžeme ho odhadnout zdola, jestliže umístíme do kruhu geometrický útvar, jehož plošnou velikost známe. Horní odhad získáme, překryjeme-li kruh útvarem známé velikosti (obr. 2.1 vlevo). Jednotkový poloměr čtvrtkruhu rozdělíme na m dílů. Nad i-tým intervalem $\langle \frac{i}{m}, \frac{i+1}{m} \rangle$, kde $i = 0, 1, \ldots, m-1$, sestrojíme obdélník s obsahem $\frac{1}{m}\sqrt{1 - (\frac{i+1}{m})^2}$, který celý leží uvnitř čvrtkruhu a obdélník s obsahem $\frac{1}{m}\sqrt{1 - (\frac{i}{m})^2}$, který ho přesahuje. Index i je zde v mezích $0 \leq i < n$. Pro obsah $P/4$ čtvrtkruhu pak platí

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m}\sqrt{1 - \left(\frac{i+1}{m}\right)^2} < \frac{P}{4} < \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m}\sqrt{1 - \left(\frac{i}{m}\right)^2}$$

Poslední člen pro $i = m - 1$ v součtu na levé straně je nulový, takže rozdíl pravé a levé strany je $\frac{1}{m}$. To je přesnost přiblížení při daném m. Na první pohled však není zcela zřejmé, zda se tyto odhady zlepšují v tom smyslu, že každý následující $(m+1)$-tý dolní odhad je větší než m-tý dolní odhad. Této nejasnosti se vyhneme, dělíme-li v každém kroku každý interval na dva. Pak m je vždy mocnina dvou. Dosadíme $m = 2^n$ a v dolním odhadu píšeme $i - 1$ místo i.

$$a_n = 4\sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{1}{2^n}\sqrt{1 - \left(\frac{i}{2^n}\right)^2} < P < 4\sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n}\sqrt{1 - \left(\frac{i}{2^n}\right)^2} = b_n$$



Obrázek 2.1: Čísla π a e

Pak je $a_n < a_{n+1} < P < b_{n+1} < b_n$, protože při přechodu od n k $n+1$ má každý vepsaný obdélník nad intervalem $\langle \frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \rangle$ menší plošný obsah než součet vepsaných obdélníků nad intervaly, které vzniknou jeho rozpůlením. Obě posloupnosti $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ jsou tedy monotonní a mají stejnou limitu, kterou definujeme číslo π.

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 4 \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \sqrt{1 - \left(\frac{i}{2^n}\right)^2}$$

Eulerovo číslo $e = 2.7182818284\ldots$, které je základem přirozených logaritmů, je další důležitá konstanta infinitesimálního počtu. Zatímco Ludolfovo číslo π je svázáno s kružnicí, Eulerovo číslo e je svázáno s hyperbolou. Uvažujme rovinný útvar rozprostřený mezi hyperbolou s rovnicí $y = \frac{1}{x}$ a jejími asymptotami, tj. kladnými poloosami x a y. Na první pohled není zřejmé, zda tato plocha je konečná či nekonečná. Pokusíme se ji změřit, tj. rozdělit na rovinné útvary stejného obsahu. Vyjdeme z jednotkového čtverce, který se hyperboly dotýká jedním svým vrcholem v bodě se souřadnicemi $[1,1]$. Kde je třeba vést druhý svislý řez napravo od bodu 1, aby plocha získaného útvaru byla jednotková? Vzdálenost tohoto bodu od počátku souřadnic právě definuje číslo e (obr.2.1 vpravo).

Pro výpočet čísla e dělíme osu x v geometrické posloupnosti. Pro pevné přirozené číslo n položme $c_k = (1 + \frac{1}{n})^k$ a uvažujeme obdélníky nad intervaly $[c_k, c_{k+1}]$. Obdélník, který leží celý uvnitř pásu má svislou stranu $\frac{1}{c_{k+1}}$ a obsah $\frac{c_{k+1}-c_k}{c_{k+1}} = 1 - \frac{c_k}{c_{k+1}} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Větší obdélník, který pás přesahuje, má svislou stranu $\frac{1}{c_k}$ a obsah $\frac{c_{k+1}-c_k}{c_k} = \frac{c_{k+1}}{c_k} - 1 = \frac{1}{n}$. Označme P_m obsah pásu mezi osou x a grafem hyperboly nad intervalem $[1, c_m]$. Pak

$$\frac{m}{n+1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_{k+1} - c_k}{c_{k+1}} < P_m < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_{k+1} - c_k}{c_k} = \frac{m}{n}$$

Dosadíme-li zde $m = n$ a $m = n+1$, dostáváme

$$\frac{n}{n+1} < P_n < 1 < P_{n+1} < \frac{n+1}{n}$$

a tedy $c_n = (1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1} = c_{n+1}$. Posloupnost c_k jsme definovali při pevném n, nyní nás však zajímá jen její n-tý a $(n+1)$-tý člen. Tak dostáváme dvě posloupnosti a_n a b_n, mezi kterými je číslo e sevřeno.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$$

Poznamenejme ještě, že další úseky mezipásu jednotkového obsahu končí v bodech e^2, e^3, atd. Těchto úseků je nekonečně mnoho, takže obsah celého mezipásu je nekonečný. Uvažujme totiž rovinnou transformaci, která bodu se souřadnicemi $[x,y]$ přiřazuje bod $[ex, \frac{y}{e}]$. Tato transformace zkracuje svislé úsečky ve stejném poměru e v jakém prodlužuje vodorovné úsečky, obsah rovinných obrazců se tedy při ní nemění. Úsek mezipásu nad intervalem $[1,e]$ přitom přechází na následující úsek nad intervalem $[e,e^2]$. Ukážeme si, že platí

$$a_n < a_{n+1} < e < b_{n+1} < b_n, \quad b_n - a_n < \frac{4}{n}$$

Nerovnost $b_n > b_{n+1}$ upravujeme ekvivalentními úpravami

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} &> \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \\
\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} &> \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} \\
\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} &> 1+\frac{1}{n} \\
\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} &> 1+\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost získáme z binomického rozvoje $(1+\frac{1}{n(n+2)})^{n+2}$, který sestává z kladných členů, takže je větší než jeho první dva členy $1+\frac{1}{n}$. Dále ukážeme $a_n < a_{n+1}$. Podle binomického vzorce

$$\begin{aligned}
a_n &= 1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2!\cdot n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!\cdot n^3}+\cdots+\frac{n!}{n!\cdot n^n} \\
&= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots \\
&\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Zde je každý člen $(1-\frac{k}{n})$ menší než odpovídající člen $(1-\frac{k}{n+1})$ ve výrazu pro a_{n+1}, který však obsahuje ještě navíc poslední kladný člen. Je tedy

$$a_n < 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=a_{n+1}$$

takže $a_n < a_{n+1}$. Nerovnost $a_n < b_n$ je okamžitě zřejmá a $b_n - a_n = a_n/n < b_1/n = 4/n$. Obě posloupnosti $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ mají tedy stejnou limitu, kterou je definováno číslo e.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Číslo e také vyjadřuje úrokovou míru při spojitém úrokování. Vložíme-li do banky vklad A, pak při roční úrokové míře p budeme mít po roce zůstatek $A(1+p)$ a po dvou letech zůstatek $A(1+p)^2$. Přičítají-li se však úroky pololetně s úrokovou mírou $p/2$, je zůstatek po půl roce $A(1+p/2)$ a po roce $A(1+p/2)^2 = A(1+p+p^2/4)$, kde se ještě počítají úroky z úroků. Je-li úrokovací období $\frac{1}{n}$ roku, je zůstatek na konci roku $A(1+p/n)^n$. Eulerovo číslo e je limitní zůstatek při jednotkovém počátečním vkladu, jednotkovém úroku a nekonečně krátkém úrokovacím období.

Cvičení. Určete

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-4}{2n+5}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^2+n+2}{n^3-n^2+2}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{n+5}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} n-\sqrt{n}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+2\sqrt{n}}{4-\sqrt{n}}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+n}{3^n-n}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{2^n}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+n^3}{n!+2^n}$
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+2^n}{(n+1)!}$

2.2 Řady

Pro posloupnost $(a_n)_{n\geq 0}$ označme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ její n- tý částečný součet. Součet řady $(a_n)_{n\geq 0}$ definujeme jako limitu posloupnosti těchto částečných součtů, tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k$$

Stejně jako u posloupností mluvíme i o řadách konvergentních, divergentních a oscilujících. Formálně nepřináší pojem řady nic nového. Pro každou posloupnost

$(s_n)_{n\geq 0}$ můžeme definovat posloupnost $(a_n)_{n\geq 0}$ předpisem $a_0 = s_0$, $s_n = a_n - a_{n-1}$ pro $n > 0$, jejíž je s_n posloupnost částečných součtů. Mnoho zajímavých posloupností je však vytvořeno řadami s jednoduchým vzorcem. Není-li posloupnost a_n definována pro $0, 1, \dots m-1$, uvažujeme řadu $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ s dolní mezí m místo 0. Při změně konečně mnoha členů řady se mění její součet, nemění se však typ konvergence (konvergentní, divergentní nebo oscilující) Můžeme tedy říci, že nějaká řada $\sum a_k$ konverguje, aniž bychom uváděli dolní mez.

Příklad 18 (Geometrická řada)

1. $\sum_{k=0}^{\infty} r^k := +\infty \qquad \textit{pro} \quad r \geq 1$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \qquad \textit{pro} \quad |r| < 1.$

3. $\sum_{k=0}^{\infty} r^k \quad \textit{neexistuje} \qquad \textit{pro} \quad r = -1.$

3. $\sum_{k=0}^{\infty} r^k := \pm\infty \qquad \textit{pro} \quad r < -1.$

Důkaz: Z identity $s_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Příklad 19

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ *konverguje.*

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} := +\infty$ *(harmonická řada)*

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ *konverguje* *(alternující harmonická řada)*

5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$

Důkaz: 1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ a limita této posloupnosti je 1.

2. Pro $k > 1$ je $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$, takže $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = 2$. Protože řada $\sum \frac{1}{k^2}$ sestává z kladných členů, je její posloupnost částečných součtů rostoucí, takže podle tvrzení 15 má limitu. Protože je omezená, je tato limita konečná.
3. Pro harmonickou řadu $\sum \frac{1}{k}$ je

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}\right) + \cdots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^k}{2^{k+1}} + \cdots := +\infty$$

4. Pro posloupnost částečných součtů $1, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \ldots$ platí

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_{2n-2} &= \frac{-1}{2n} + \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n(2n-1)} > 0 \\ s_{2n+1} - s_{2n-1} &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0 \end{aligned}$$

Odtud $s_{2n-2} < s_{2n} < s_{2n+1} < s_{2n-1}$, takže obě posloupnosti $(s_{2n})_n$ i $(s_{2n+1})_n$ jsou konvergentní. Protože $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, jejich limity jsou stejné.
5. Pro číslo e platí $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = b_n$. Podle binomické věty

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Pro $n > k$ je tedy

$$2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$< \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Dosadíme-li zde za n $q \in \mathbb{N}^\infty$, je levá strana nerovnosti nekonečně blízká $2 + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{k!}$. Z toho plyne

$$2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} < \left(1 + \frac{1}{q}\right)^q < \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{j!}$$

Odtud pro každé $q \in \mathbb{N}^\infty$ je $\sum\limits_{j=0}^{q} \frac{1}{j!} \approx \left(1 + \frac{1}{q}\right)^q \approx e$. □

Podle Bolzano-Cauchyovy věty je řada $\sum a_n$ je konvergentní právě tehdy, když pro každá $p, q \in \mathbb{N}^\infty$, $p < q$ je $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k = s_q - s_p$ nekonečně malé. Pro $q = p + 1$ odtud dostáváme $a_q \approx 0$. Je-li tedy $\sum a_k$ konvergentní, je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Všimeme si, že tato podmínka není postačující. Protipříklad je harmonická řada, pro kterou $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

2.2.1 Absolutně konvergentní řady

Definice 20 *Říkáme, že řada $\sum a_k$ konverguje absolutně, konverguje-li řada jejích absolutních hodnot $\sum |a_k|$.*

Řada kladných členů je konvergentní právě když je absolutně konvergentní. Alternující harmonická řada $\sum(-1)^k/(k+1)$ je příklad řady která je konvergentní ale ne absolutně konvergentní.

Tvrzení 21 *Nechť $|a_k| \leq b_k$ a nechť řada $\sum b_k$ konverguje. Pak konverguje i řada $\sum a_k$. Speciálně každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

Důkaz: Podle Bolzano-Cauchyovy věty řada $\sum a_k$ konverguje právě když pro každá dvě $p, q \in \mathbb{N}^\infty$, $p \leq q$ je $\sum_{k=p+1}^{q} a_k$ nekonečně malé. Použijeme toto kritérium jak na řadu $\sum b_k$ tak na řadu jejích absolutních členů $\sum |a_k|$. Je-li řada $\sum b_k$ konvergentní, je pro každé $p < q \in \mathbb{N}^\infty$

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} a_k\right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |a_k| \leq \sum_{k=p+1}^{q} b_k \in \mathbb{R}^0$$

Pro řady které konvergují ale nekonvergují absolutně, neplatí komutativní zákon. Změnou pořadí členů řady lze dosáhnout jakéhokoliv součtu. Například alternující harmonickou řadu lze přerovnat na divergentní řadu

$$1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{15} - \frac{1}{6}\right)$$
$$+ \cdots + \left(\frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1} - 1} - \frac{1}{2n}\right) + \cdots$$

V n-té závorce je 2^{n-1} kladných členů větších než 2^{-n-1}, takže součet n-té závorky je větší než $\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}$. Součet řady je tedy $+\infty$. Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ lze přerovnáním řady dosáhnout toho, aby její součet byl a. Vezmeme nejprve tolik kladných členů aby jejich součet přesáhl a, potom tolik záporných členů aby částečný součet klesl pod a, potom opět kladné členy aby částečný součet přesáhl a, atd. Protože n-tý člen konverguje k nule, konverguje takto sestrojená posloupnost k a. Pro absolutně konvergentní řady se však při přerovnání řady její součet nezmění.

Tvrzení 22 *Nechť řada* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ *je absolutně konvergentní a nechť* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny přirozených čísel na sebe. Pak* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{h(k)} = a$.

Důkaz: Podle principu vnoření obraz h je vzájemně jednoznačné zobrazení $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$. Zvolme $q \in \mathbb{N}^{\infty}$, nechť $p \in \mathbb{N}^*$ je nejmenší číslo, které se nevyskytuje v seznamu $h(0), \dots, h(q)$ a nechť r je největší číslo v tomto seznamu. Protože se zde vyskytují všechna konečná přirozená čísla, je $p \in \mathbb{N}^{\infty}$ a $p \le r$. Položme $A = \{h(0), \dots, h(q)\} \setminus \{0, \dots, p-1\}$. Pak

$$\left| a - \sum_{k=0}^{q} a_{h(k)} \right| = \left| a - \sum_{k=0}^{p-1} a_k - \sum_{k \in A} a_k \right| \le \left| a - \sum_{k=0}^{p-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=p}^{r} a_k \right| \approx 0$$

Absolutně konvergentní řady také můžeme násobit. Součin absolutně konvergentních řad $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k)$ rozepíšeme do nekonečné matice

$$\begin{array}{c} a_0b_0 + a_0b_1 + a_0b_2 + \cdots \\ a_1b_0 + a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots \\ a_2b_0 + a_2b_1 + a_2b_2 + \cdots \\ \vdots \end{array}$$

Uspořádáme-li a_ib_j podle $\max\{i, j\}$, dostáváme řadu

$$\begin{array}{l} a_0b_0 + \\ a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0 + \\ a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0 + \cdots + \\ a_0b_k + \cdots + a_{k-1}b_k + a_kb_k + a_kb_{k-1} + \cdots + a_kb_0 + \cdots \end{array}$$

n^2-tý součet absolutních hodnot této řady je $\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k| \right)$. Řada je tedy absolutně konvergentní a její součet se nezmění při žádném přerovnání. Nejčastěji ji sčítáme po diagonálách pro konstantní $i + j$.

Tvrzení 23 *Nechť* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$ *jsou absolutně konvergentní řady a položme*

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0.$$

Pak také řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *je absolutně konvergentní a její součet je* ab.

2.2.2 Kritéria konvergence řad

Otázku, zda daná řada konverguje či ne, lze často řešit srovnáním s řadou geometrickou. Na tomto principu jsou založena následující kritéria konvergence.

Tvrzení 24 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

1. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$*, pak řada* $\sum a_k$ *konverguje absolutně.*

2. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$*, pak řada* $\sum a_k$ *nekonverguje.*

Důkaz: 1. Zvolme r, pro které $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < r < 1$. Pak pro každé $q \in \mathbb{N}^\infty$ platí $\sqrt[q]{|a_q|} < r$ a tedy $|a_q| \le r^q$. Pro každá nekonečná $p < q$ je

$$\sum_{k=p}^{q} |a_k| \le \sum_{k=p}^{q} r^k = r^p \cdot \frac{1-r^{q-p}}{1-r} \approx 0$$

takže řada konverguje podle Bolzano-Cauchyovy věty.
2. Jestliže naopak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > r > 1$, pak pro každé $p \in \mathbb{N}^\infty$ je $|a_p| > r^p := +\infty$, takže řada $\sum a_k$ nekonverguje. □

Tvrzení 25 (D'Alembertovo podílové kriterium)

Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$*, pak řada* $\sum a_k$ *konverguje absolutně.*

Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$*, pak řada* $\sum a_k$ *nekonverguje.*

Důkaz. 1. Zvolme opět r, pro které $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r < 1$, takže existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > m$ platí $a_{n+1} < ra_n$ a tedy

$$|a_n| \le |a_{n-1}|r \le |a_{n-2}|r^2 \le \cdots \le |a_m|r^{n-m}$$

Odtud

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \le \sum_{k=0}^{m-1} |a_k| + \sum_{k=m}^{\infty} |a_m|r^{n-m} = \sum_{k=0}^{m-1} |a_k| + \frac{|a_m|r^{n-m}}{1-r} < +\infty$$

2. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r > 1$, pak existuje $m \in \mathbb{N}$, tak že pro všechna $n > m$ platí $|a_{n+1}| > r|a_n|$ a tedy

$$|a_n| \ge |a_{n-1}|r \ge |a_{n-2}|r^2 \ge \cdots \ge |a_m|r^{n-m}$$

Odtud $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, takže řada $\sum a_n$ nekonverguje. □

Pro řadu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ počítáme podle podílového kritéria

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} := \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}n!}{(n+1)!2^n} := \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

takže řada konverguje. Stejně efektivně lze použít odmocninové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n!}} := \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

Pro mnoho příkladů řad však nelze použít ani jednoho z těchto kritérií, jestliže příslušné limity neexistují nebo jsou-li rovny jedné. Na příklad pro řadu $\sum \frac{1}{k^3}$ je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} := \lim_{k\to\infty} \frac{k^3}{(k+1)^3} = 1, \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^3} = 1$$

Konvergenci této řady zjistíme ze srovnání $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k(k+1)}$, kterou umíme sečíst přesně (příklad 19).

Tvrzení 26 (Alternující kritérium) *Nechť (a_k) je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel a $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Pak*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots$$

je konvergentní řada.

Důkaz: Protože $s_{2n+1} - s_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0$, $s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$, je $s_{2n-1} \leq s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_{2n-2}$. Existuje tedy jak limita sudých částečných součtů tak limita lichých částečných součtů a protože $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} - s_{2n+1} = 0$, jsou tyto dvě limity stejné.

Cvičení. Určete zda následující řady konvergují, případně jejich součet.

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$
4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$
5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k^3+1}$
6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}$
7. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k-k}{3^k+k}$
8. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$

2.3 Limita funkce

Reálná funkce $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ je objekt standardního světa. V nestandardním světě se rozšiřuje na funkci $f : \mathcal{D}(f)^* \to \mathbb{R}^*$, která je definována stejnými vztahy a stejným předpisem. Je-li definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ interval $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1\rangle$, je její definiční obor v nestandardním světě interval $\langle -1, 1\rangle^* = \{x \in \mathbb{R}^* : -1 \le x \le 1\}$. Chování funkcí na monádách vyjadřuje pojem limity.

Definice 27 *Limita funkce f na monádě $A \subseteq \mathcal{D}(f)^*$ je soubor*

$$\lim_{x\to A} f(x) = \{f(x) : \ x \in A\}$$

pokud tento soubor je monáda. Není-li tento soubor monáda, nebo není-li $A \subseteq \mathcal{D}(f)^*$, říkáme, že limita funkce f na monádě A neexistuje (nebo že je to neurčitý výraz)

Například $\lim\limits_{x\to 0^\bullet} \frac{1}{x}$ neexistuje, protože funkce $1/x$ není definována v nule, zatímco

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Také při výpočtech limit funkcí používáme pro monády a neurčité výrazy symbol $:=$ ve smyslu podmíněné inkluze. Pro monády A, B je tedy

$$\lim_{x\to A} f(x) := B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in A)(f(x) \in B)$$

Pro stručnost vyjadřování píšeme též v limitách místo monád čísla. Zápis $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ znamená totéž co $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x)$ a zápis $\lim\limits_{x\to A} f(x) = b$ znamená totéž co $\lim\limits_{x\to A} f(x) := b^\bullet$. Pro $a, b \in \mathbb{R}$ a monády A, B je tedy

$$\lim_{x\to a} f(x) := B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*)(a \approx x \neq a \quad \Rightarrow \quad f(x) \in B)$$

$$\lim_{x\to A} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in A)(f(x) \approx b)$$

Tvrzení 28 *Nechť f, g jsou reálná funkce a A, B monády.*

1. $\lim\limits_{x\to A}(f(x) + g(x)) := \lim\limits_{x\to A} f(x) + \lim\limits_{x\to A} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to A}(f(x) - g(x)) := \lim\limits_{x\to A} f(x) - \lim\limits_{x\to A} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to A}(f(x) \cdot g(x)) := \lim\limits_{x\to A} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to A} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to A} \dfrac{f(x)}{g(x)} := \lim\limits_{x\to A} f(x) / \lim\limits_{x\to A} g(x)$
5. *Je-li* $\lim\limits_{x\to A} g(x) := B$, *je* $\lim\limits_{x\to A} f(g(x)) := \lim\limits_{y\to B} f(y)$.

Důkaz plyne z definice aritmetických operací na monádách.

Ve větě 28 mohou mít monády na levých stranách striktně menší rozsah než monády na pravých stranách. Náleží-li y do součtu limit, je $y = f(x_1) + g(x_2)$ pro nějaké $x_1, x_2 \in A$, tato x_1, x_2 ale mohou být různá, takže pro žádné $x \in A$ nemusí být y rovno $f(x) + g(x)$. Při výpočtu limit je tedy třeba volit aritmetická pravidla ve vhodném pořadí, aby se rozsah monád zbytečně nezvětšoval. Například pro funkci $f(x) = x - x^2$ je

$$\lim_{x\to 0^+}(x - x^2) := \lim_{x\to 0^+} x - \lim_{x\to 0^+} x^2 := 0^+ - 0^+ := 0^\bullet$$

můžeme však počítat úsporněji

$$\lim_{x\to 0^+} x(1-x) := \lim_{x\to 0^+} x \cdot \lim_{x\to 0^+}(1-x) := 0^+(1-0^+) := 0^+$$

Limity mnohočlenů a racionálních lomených funkcí počítáme stejně jako v případě posloupností. U funkcí pouze navíc ještě uvažujeme limity v $-\infty$.

Příklad 29 *Nechť $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$, kde $c_n \neq 0$, je mnohočlen stupně $n \geq 1$. Pak*

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) := \pm\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) := +\infty \cdot \mathrm{sgn}(c_n)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) := +\infty \cdot \mathrm{sgn}(c_n) \cdot (-1)^n$

Důkaz je stejný jako v případě posloupností. Pro limitu v $-\infty$, je $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty \cdot (-1)^n$. Z toho již plyne, že limita mnohočlenu v $\pm\infty$ je $\pm\infty$. Například

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - x) := -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}(x^3 - x) := +\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty}(x^4 - 2x) := +\infty.$$

(viz obr. 1.5). Podobně postupujeme pro racionální lomenou funkci.

Příklad 30 *Nechť $f(x) = (c_0 + \cdots c_n x^n)/(d_0 + \cdots d_m x^m)$, kde $c_n \neq 0$, $d_m \neq 0$, je racionální lomená funkce.*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) := +\infty \cdot \mathrm{sgn}(c_n/d_m)$ *pro* $n > m$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) := +\infty \cdot \mathrm{sgn}(c_n/d_m) \cdot (-1)^{n-m}$ *pro* $n > m$
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) := \pm\infty$ *pro* $n > m$
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = c_n/d_m$ *pro* $n = m$.
5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ *pro* $n < m$.

Důkaz: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-m}\dfrac{c_0x^{-n}+\cdots+c_n}{d_0x^{-m}+\cdots+d_m} := \left(\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-m}\right)(c_n/d_m)^\bullet$ a z toho plynou všechny případy. □

Například $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1}{4x} := +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1+x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{x^2+1} = 3$. Vzorce příkladu 30 jsou obecné, v konkrétních případech je lze ještě někdy zlepšit, například

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x^2} := \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-x} := \frac{1}{-\infty} := 0^-$$

U racionálních lomených funkcí určíme dále limity v bodech, kde jmenovatel je nulový. Nechť $f(x) = P(x)/Q(x)$ je racionální lomená funkce, jejíž jmenovatel má kořen c násobnosti n. Pak $Q(x) = (x-c)^nQ_1(x)$, pro nějaký mnohočlen Q_1 a $Q_1(c)\neq 0$. Můžeme předpokládat že je také $P(c)\neq 0$, protože jinak by bylo možné ve zlomku $P(x)/Q(x)$ člen $(x-c)$ zkrátit.

Příklad 31 *Nechť $f(x) = \frac{P(x)}{(x-c)^nQ_1(x)}$ je racionální lomená funkce, $n>0$ a $P(c)\neq 0\neq Q_1(c)$. Pak*

1. $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) := +\infty\cdot\operatorname{sgn}\dfrac{P(c)}{Q_1(c)}$

2. $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) := +\infty\cdot(-1)^n\cdot\operatorname{sgn}\dfrac{P(c)}{Q_1(c)}$

3. $\lim\limits_{x\to c} f(x) := \pm\infty$

Dále je $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x) = 1$, zatímco $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ neexistuje. Další způsob určení limit je srovnáním s limitami již známými.

Tvrzení 32 *Nechť A je monáda, f,g,h jsou reálné funkce se stejným definičním oborem a nechť pro každé x platí $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$.*

1. Jestliže $\lim\limits_{x\to A} f(x) = b$ a $\lim\limits_{x\to A} h(x) = b$, pak $\lim\limits_{x\to A} g(x) = b$.

2. Jestliže $\lim\limits_{x\to A} f(x) := +\infty$, pak $\lim\limits_{x\to A} g(x) := +\infty$.

3. Jesliže $\lim\limits_{x\to A} h(x) := -\infty$, pak $\lim\limits_{x\to A} g(x) := -\infty$.

Důkaz: Je-li $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$, pro každé $x\in\mathcal{D}(f)$, pak podle principu expanze také pro každé $x\in\mathcal{D}(f^*)$ platí $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$. Je-li $f(x)\approx b\approx h(x)$, je tedy také $g(x)\approx b$. Podobně pro 2,3. □

Víme-li již že limity existují, plynou z nerovností mezi funkcemi nerovnosti mezi jejich limitami

Tvrzení 33 *Nechť f,g jsou reálné funkce se stejným definičním oborem, které mají na monádě A vlastní limity $\lim\limits_{x\to A} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to A} g(x) = b$. Jestliže pro každé x ze společného definičního oboru platí $f(x)\leq g(x)$, je $a\leq b$.*

Důkaz: Je-li $x \in A$, je $a \approx f(x) \leq g(x) \approx b$, takže $a \leq b$. □

Cvičení. Určete limity

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4}{x-2}$
3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-4}{x-2}$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+4}{x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-2}{x^3+x^2+x+1}$
8. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$

Bolzano-Cauchyovu větu zobecňujeme i pro konvergenci funkcí. Říkáme, že funkce f konverguje na monádě A, má-li na ní konečnou limitu.

Věta 34 (Bolzano-Cauchyova věta) *Reálná funkce f konverguje na monádě A právě když pro každé $x, y \in A$ platí $f(x) \approx f(y)$.*

Důkaz: Jestliže f konverguje na A k $a \in \mathbb{R}$, pak pro každé $x, y \in A$ platí $f(x) \approx a \approx f(y)$. Předpokládejme naopak, že pro každá $x, y \in A$ platí $f(x) \approx f(y)$ a zřejmě tedy limita existuje. Ukážeme, že tato limita je vlastní. Předpokládejem nejprve, že A je vlastní monáda, tj. $A = X^* \cap a^\bullet$, kde $a \in \mathbb{R}$ a $X \subseteq \mathbb{R}$. Pak existuje standardní $r > 0$ takové, že

$$(\forall x, y \in (a-r, a+r) \cap X)(|f(x) - f(y)| < 1)$$

Kdyby to totiž neplatilo, pak by pro každé $n \in \mathbb{N}$ existovala $x_n, y_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \cap X$ pro která $|f(x_n) - f(y_n)| \geq 1$ a pro $p \in \mathbb{N}^\infty$ bychom dostali $x_p, y_p \in a^\bullet \cap X^* = A$ a $|f(x_p) - f(x_q)| \geq 1$, takže $f(x_p) \not\approx f(x_q)$ a to je spor. Zvolme pevné $b \in (a-r, a+r) \cap X$. Pak pro všechna $x \in (a-r, a+r) \cap X$ platí $f(b) - 1 < f(x) < f(b) + 1$, takže to platí také pro každé $x \in (a-r, a+r)^* \cap X^*$ a speciálně pro každé $x \in A$. Z toho plyne, že $\lim\limits_{x\to A} f(x)$ je vlastní monáda. Zbývá případ, že $A = X^* \cap \mathbb{R}^\infty$. V tomto případě existuje standardní $r > 0$ takové, že

$$(\forall x, y \in X)(|x| > r \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < 1)$$

(Kdyby to neplatilo, existovaly by posloupnosti $x_n, y_n \in X$ pro které $|x_n| > n$, $|y_n| > n$ a $f(x_n, y_n) \geq 1$ a to vede na spor.) Je-li $b \in X$ a $|b| > r$, pak pro každé $x \in A$ je $f(b) - 1 < f(x) < f(b) + 1$, takže $\lim\limits_{x\to A} f(x)$ je vlastní monáda. □

2.4 Spojité funkce

Funkce je spojitá, jestliže při nekonečně malé změně nezávislé proměnné se také nekonečně málo změní závislá proměnná.

Definice 35 *Reálná funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathcal{D}(f)$, jestliže*

$$(\forall x \in \mathcal{D}(f)^*)(a \approx x \quad \Rightarrow \quad f(x) \approx f(a))$$

Reálná funkce je spojitá, je-li spojitá v každém bodě $a \in \mathcal{D}(f)$.

Jednostranná spojitost v bodě a je definovaná podmínkami

$$(\forall x \in \mathcal{D}(f)^*)(a \approx x < a \quad \Rightarrow \quad f(x) \approx f(a)) \quad \text{spojitost zleva}$$
$$(\forall x \in \mathcal{D}(f)^*)(a \approx x > a \quad \Rightarrow \quad f(x) \approx f(a)) \quad \text{spojitost zprava}$$

Konstantní a identická funkce je zřejmě spojitá (v každém bodě). Funkce $\mathrm{sgn}(x)$ je nespojitá v nule, ve všech ostatních bodech je spojitá. Její hodnota v nule je $\mathrm{sgn}(0) = 0$, ale v každém infinitesimálním nenulovém α má hodnotu 1 nebo -1. Funkce $\lfloor x \rfloor$ a $x \bmod 1$ jsou nespojité v každém celém čísle. Jsou v nich však pouze nespojité zleva, zprava jsou spojité v každém bodě.

Tvrzení 36 *Je-li a vnitřní bod definičního oboru funkce f, pak f je spojitá v a právě když $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Důkaz plyne z definice.

Funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, jejíž definiční obor je kompaktní interval $\langle a, b\rangle$, je spojitá v a právě když $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, tj. právě když je v a spojitá zprava. Oboustranná limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ v tomto případě neexistuje, protože monáda $a^\pm$ není obsažena v $\mathcal{D}(f)^*$. Funkce f je spojitá v b právě když $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$, tj. právě když je v b spojitá zleva.

Je-li f spojitá v bodě a a je-li $f(a) > 0$, existuje $r > 0$ takové, že $f(x) > 0$ pro každé $x \in (a - r, a + r)$. Pokud by to toitž neplatilo, pak by pro každé $r = \frac{1}{n}$ existovalo $x_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ pro které by bylo $f(x_n) \le 0$ a pro nekonečné $p \in \mathbb{N}^\infty$ by bylo $x_p \approx a$ a $f(x_p) \not\approx f(a)$.

Tvrzení 37 *Nechť funkce f, g jsou spojité (případně spojité zleva nebo spojité zprava) v bodě a. Pak také funkce $f + g$, $f - g$, fg jsou spojité v a (případně spojité zleva nebo spojité zprava). Je-li $g(a) \neq 0$, je také $\frac{f}{g}$ spojitá v a. Jsou-li funkce f, g spojité (v každém bodě), jsou spojité také funkce $f + g$, $f - g$, fg a $\frac{f}{g}$.*

Důkaz plyne z tvrzení 5, které říká, že relace $\approx$ se zachovává při aritmentických operacích. Jsou-li f a g spojité v a, pak pro každé $x \in \mathcal{D}(f + g)$ pro které $x \approx a$ platí $f(x) \approx f(a)$ a $g(x) \approx g(a)$, a tedy $f(x) + g(x) \approx f(a) + g(a)$. Podobně pro další aritmetické operace. □

Tvrzení 38 *Je-li funkce f spojitá v bodě a, a funkce g je spojitá v bodě $f(a)$, je složená funkce $h = g \circ f$ spojitá v bodě a. Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.*

Důkaz: Je-li $x \approx a$, je $f(x) \approx f(a)$ a tedy $g(f(x)) \approx g(f(a))$. □

Mnohočleny a racionální lomené funkce vzniknou aritmetickými operacemi z konstantní a identické funkce, takže jsou všechny spojité. Podle tvrzení 5 je také druhá odmocnina spojitá funkce.

Tvrzení 39 *Je-li* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *a je-li* f *funkce spojitá v* a, *je*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$

Důkaz: Pro každé $p \in \mathbb{N}$ je $a_p \approx a$ a tedy $f(a_p) \approx f(a)$.

2.5 Inverzní funkce

Jestliže závisle proměnná y funkce f jednoznačně určuje nezávisle proměnnou x, říkáme že f je prostá. Tento vztah závislosti definuje inverzní funkci $x = f^{-1}(y)$.

Definice 40 *Reálná funkce* f *je prostá, jestliže pro každé* $x, y \in \mathcal{D}(f)$, *pro které* $x \neq y$, *platí* $f(x) \neq f(y)$. *Je-li* f *prostá reálná funkce, existuje její inverzní funkce* f^{-1} *definovaná předpisem*

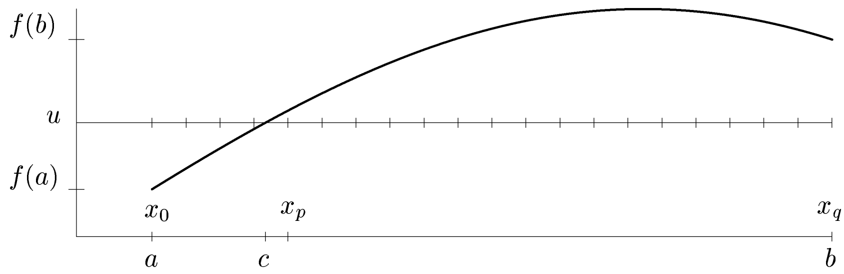
$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y.$$

Definiční obor inverzní funkce je $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$, a její obor hodnot je $\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$. Dále pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $f^{-1}(f(x)) = x$, a pro každé $y \in \mathcal{R}(f)$ platí $f(f^{-1}(y)) = y$. To znamená, že složení $f^{-1} \circ f$ je identická funkce na $\mathcal{D}(f)$ a $f \circ f^{-1}$ je identická funkce na $\mathcal{R}(f)$.

Například funkce x^3 je prostá, její definiční obor i obor hodnot je celá reálná přímka. Inverzní funkce třetí odmocniny $\sqrt[3]{y}$ je definována na celém $\mathbb{R}$ vztahem $x = \sqrt[3]{y}$ právě když $y = x^3$. To znamená, že $\sqrt[3]{x^3} = x$ a $(\sqrt[3]{y})^3 = y$. Funkce $f(x) = x^3 - x$ prostá není protože $f(-1) = f(0) = f(1)$ (viz obr. 1.5). Také funkce x^2 není prostá, protože pro každé a je $a^2 = (-a)^2$. Funkce x^2 je však prostá na intervalu $\langle 0, +\infty)$ a zde má inverzní funkci druhé odmocniny $x = \sqrt{y}$.

Určit hodnotu inverzní funkce v bodě y znamená řešit pro toto y rovnici $f(x) = y$. Řešení rovnic je jeden z hlavních typů matematických úloh. Známe vzorce pro rovnice lineární a kvadratické, složitější vzorce jsou i pro rovnice třetího a čtvrtého stupně. Pro rovnice vyššího než čtvrtého stupně však takový vzorec neexistuje. Tím méně lze najít nějaký obecný vzorec na řešení rovnic, ve kterých se vyskytují obecné funkce. Pro všechny spojité funkce však máme interpolační metodu, kterou se lze k řešení postupně přibližovat. Ta je založena na následující větě.

Věta 41 (Bolzanova věta o mezihodnotě) *Nechť* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá reálná funkce a* $f(a) < u < f(b)$. *Pak existuje* $c \in (a, b)$ *pro které* $f(c) = u$.



Obrázek 2.2: Věta o mezihodnotě

Důkaz: Zvolme $q \in \mathbb{N}^\infty$ a uvažujme body $x_i = a + \frac{i}{q}(b-a)$ pro $0 \le i \le q$. V nestandardním geometrickém světě je to konečný soubor. Nechť p je nejmenší číslo pro které $f(x_p) > u$. Zřejmě $p > 0$ a $f(x_{p-1}) \le u$ (viz obr. 2.2). Položme $c = \mathfrak{P}(x_p)$. Protože f je spojitá, a $x_{p-1} \approx c \approx x_p$, je

$$0 \approx f(x_{p-1}) - f(c) \le u - f(c) < f(x_p) - f(c) \approx 0$$

$u - f(c)$ je tedy infinitesimální a protože je standardní, je nulové. □

Předpoklad spojitosti je zde podstatný. Rovnice $\operatorname{sgn}(x) - \frac{1}{2} = 0$ nemá žádné řešení, přestože tato funkce je záporná pro -1 a kladná pro 1. Bolzanova věta umožňuje řešit rovnice tvaru $f(x) = 0$ se spojitými funkcemi f interpolací. Nechť pro $a_0 < b_0$ je $f(a_0) < f(b_0)$. Sestrojíme posloupnosti $(a_n)_n$ a $(b_n)_n$ rekurentním předpisem

$$\begin{array}{lll} a_{n+1} = a_n, & b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & \text{pokud } f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, & b_{n+1} = b_n & \text{pokud } f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0 \end{array}$$

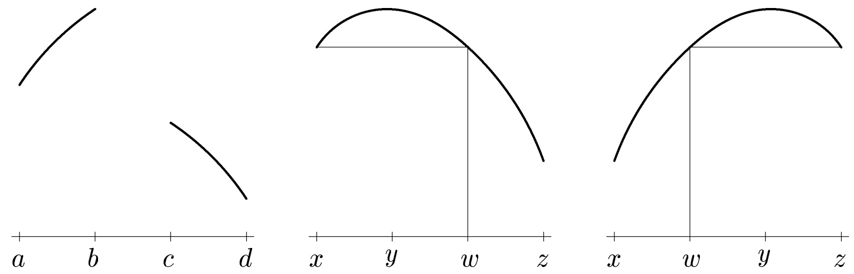
Jestliže pro nějaké n je $f(\frac{a_n+b_n}{2}) = 0$, našli jsme kořen rovnice po konečně mnoha krocích. V opačném případě jsou obě posloupnosti nekonečné a jejich společná limita je kořenem rovnice.

Definice 42 *Funkce rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající definujeme podmínkami*

$$\begin{array}{ll} (\forall x, y \in \mathcal{D}(f))(x < y \Rightarrow f(x) < f(y)) & \textit{rostoucí funkce} \\ (\forall x, y \in \mathcal{D}(f))(x < y \Rightarrow f(x) > f(y)) & \textit{klesající funkce} \\ (\forall x, y \in \mathcal{D}(f))(x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)) & \textit{neklesající funkce} \\ (\forall x, y \in \mathcal{D}(f))(x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y)) & \textit{nerostoucí funkce} \end{array}$$

Souhrně tyto funkce nazýváme monotónní. Funkce rostoucí a klesající nazýváme ryze monotónní.

Každá ryze monotónní funkce je prostá. Obrácené tvrzení obecně neplatí. Například funkce na obr. 2.3 vlevo s definičním oborem $(a,b) \cup (c,d)$ je prostá ale nikoliv monotónní. U spojitých funkcí, jejichž definiční obor je interval, se to však stát nemůže.



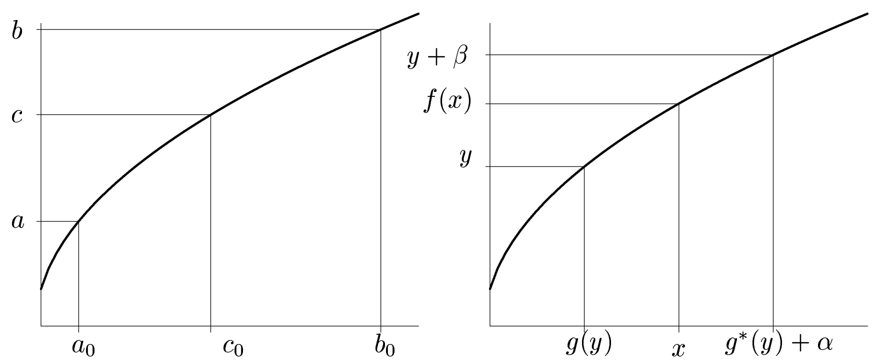
Obrázek 2.3: Monotonie

Věta 43 *Každá prostá spojitá funkce na intervalu je ryze monotónní.*

Důkaz: Předpokládejme sporem, že f není ani rostoucí ani klesající a že její definiční obor je interval. Protože f není klesající, existují $a < b$ pro která $f(a) \leq f(b)$ a protože f je prostá, je $f(a) < f(b)$. Protože f není rostoucí, existují $c < d$ pro která $f(c) > f(d)$ (obr. 2.3 vlevo). V závislosti na vzájemné poloze bodů a, b, c, d a bodů $f(a), f(b), f(c), f(d)$ lze vždy z bodů a, b, c, d vybrat tři body $x < y < z$ tak že buď

$$f(x) < f(y) > f(z) \quad \text{nebo} \quad f(x) > f(y) < f(z).$$

Předpokládejme, že $f(x) < f(y) > f(z)$. Je-li $f(x) > f(z)$ (obr. 2.3 uprostřed), pak podle věty 41 o mezihodnotě v intervalu (y, z) existuje w pro které $f(w) = f(x)$ a zřejmě $w \neq x$. To je spor s předpokladem, že f je prostá funkce. Je-li $f(x) < f(z)$ (obr 2.3 vpravo), pak v intervalu (x, y) existuje w pro které $f(w) = f(z)$. Podobně v případě $f(x) > f(y) < f(z)$. □



Obrázek 2.4: Spojitost inverzní funkce

Následující věta je založena na charakterizaci intervalů jako konvexních množin reálných čísel. Rovinný útvar je konvexní, jestliže s každými svými dvěma body obsahuje celou úsečku, která je spojuje. Množina reálných čísel je konvexní právě když je interval.

Tvrzení 44 *Množina $A \subseteq \mathbb{R}$ je interval právě když platí*

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x < y < z \ \& \ x, z \in A \ \Rightarrow \ y \in A)$$

Důkaz: Zřejmě každý interval podmínku splňuje. Předpokládejme, že A splňuje podmínku. Je-li A prázdná nebo jednobodová, je A interval. Předpokládejme tedy, že A obsahuje alespoň dva prvky $a_0 < b_0$. Zvolme pevné $q \in \mathbb{N}^{\infty}$. Pak existuje $p_0 \in \mathbb{Z}^*$, pro které $a_0 < \frac{p_0}{q} < b_0$ (volíme například jediné p_0, které splňuje $p_0 \leq \frac{(a_0+b_0)q}{2} < p_0 + 1$). Jestliže pro všechna $p < p_0$ je $\frac{p}{q} \in A$, položme $a = -\infty$. Jestliže tato podmínka pro všechna p neplatí, nechť $p \leq p_0$ je největší číslo pro které $\frac{p}{q} \notin A^*$, takže $\frac{p+1}{q} \in A^*$. Položme $a = \mathfrak{P}(\frac{p}{q})$. V obou případech je a dolní mez množiny A, tj. platí

$$x \in A \ \Rightarrow \ x \geq a, \ \ x < a \ \Rightarrow \ x \notin A$$

Samotné a do množiny A patřit může ale nemusí. Podobně položme $b = +\infty$, jestliže $\frac{p}{q} \in A^*$ pro všechna $p > p_0$ a $b = \mathfrak{P}(\frac{p}{q})$, jestliže $p > p_0$ je nejmenší číslo, pro které $\frac{p}{q} \notin A^*$, takže b je dolní mez. Množina A je tedy jedním z intervalů (a, b), $(a, b\rangle$, $\langle a, b)$, $\langle a, b\rangle$. □

Věta 45 (Věta o inverzní funkci) *Nechť f je prostá spojitá funkce na intervalu. Pak její obor hodnot je také interval, a inverzní funkce $g = f^{-1}$ je spojitá.*

Důkaz: Podle věty 43 je f ryze monotonní, tedy buď rostoucí nebo klesající. Předpokládejme, že f je rostoucí. Nechť $a < c < b$, $a, b \in \mathcal{R}(f)$. Ukážeme, že také c náleží do $\mathcal{R}(f)$. Podle předpokladu existují a_0, b_0 pro které $f(a_0) = a$, $f(b_0) = b$, a protože f je rostoucí, je $a_0 < b_0$. Podle věty o mezihodnotě existuje $c_0 \in (a_0, b_0)$ pro které $c = f(c_0) \in \mathcal{R}(f)$ (obr. 2.4 vlevo). Podle tvrzení 44 je tedy obor hodnot funkce f interval. Nyní ukážeme, že $g = f^{-1}$ je spojitá. Nechť $y \in \mathcal{D}(g)$, $\beta > 0$ je nekonečně malé a $y + \beta \in \mathcal{D}(g)^*$ (obr.2.4 vpravo). Předpokládejme sporem, že $\alpha = g(y + \beta) - g(y) > 0$ není nekonečně malé. Pak existuje standardní $x \in \mathcal{D}(f)$, pro které $g(y) < x < g(y + \beta)$ a tedy $y < f(x) < y + \beta$. Odtud plyne, že β není nekonečně malé a to je spor. Ostatní případy ($\beta < 0$, f klesající) se dokazují obdobně.

2.6 Elementární funkce

Věta 45 o inverzní funkci umožňuje definovat širokou třídu dalších spojitých funkcí. Jsou to zejména odmocniny, racionální mocniny, obecné mocniny (mocniny s reálným exponentem), exponenciální a logaritmické funkce. Geometrickou motivaci pak mají goniometrické a cyklometrické funkce.

2.6.1 Obecná mocnina

Je-li n liché přirozené číslo, je funkce x^n rostoucí na $\mathbb{R}$. Protože $(-\infty)^n = -\infty$ a $(+\infty)^n = +\infty$, je její obor hodnot také $\mathbb{R}$. Podle věty 45 je inverzní funkce $\sqrt[n]{x}$:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá. Je-li $n > 0$ sudé, x^n prostá není. Je klesající na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 0, +\infty)$. Dostáváme tedy dvě inverzní funkce. Konvenčně se odmocnina se sudým n definuje s kladným znaménkem $\sqrt[n]{x} : \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$. Mocnina se záporným exponentem je definována pro $x \neq 0$ předpisem $x^{-n} = 1/x^n$. Pro racionální exponent a kladné x definujeme $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$. To je složení m-té odmocniny s n-tou mocninou (nebo naopak; v tomto případě na pořadí skládání nezáleží). Podle věty 38 je funkce $x^{\frac{n}{m}}$ spojitá. Racionální mocnina nezávisí na reprezentaci exponentu. Pro $x > 0$, $n, m, p \in \mathbb{Z}$ a $mp \neq 0$ platí

$$y = x^{\frac{n}{m}} \quad \Leftrightarrow \quad y^m = x^n \quad \Leftrightarrow \quad y^{mp} = x^{np} \quad \Leftrightarrow \quad y = x^{\frac{np}{mp}}$$

Pro $\frac{n}{m} > 0$ je funkce $x^{\frac{n}{m}}$ rostoucí, pro $\frac{n}{m} = 0$ je $x^0 = 1$ konstantní a pro $\frac{n}{m} < 0$ je $x^{\frac{n}{m}}$ klesající. Pro reálný exponent a položíme $x^a = \mathfrak{P}(x^{p/q})$, kde $\frac{p}{q}$ je racionální nestandardní, které je nekonečně blízké a. Nejprve však ukážeme, že tato definice nezávisí na výběru racionálního exponentu $\frac{p}{q}$.

Tvrzení 46 *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ reálné kladné a konečně velká racionální nestandardní $a, b \in \mathbb{Q}^*$, $a \approx b$, je $x^a \approx x^b$.*

Důkaz: Nejprve ukážeme, že pro $n > 0$ přirozené a $x > 0$ reálné platí

$$x > 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < \sqrt[n]{x} < 1 + \frac{x}{n}$$
$$0 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{nx} < \sqrt[n]{x} < 1$$

Nerovnost $1 < \sqrt[n]{x}$ plyne z $1 < x$ odmocněním obou stran. Z binomického rozvoje plyne $(1 + \frac{x}{n})^n > 1 + x$ a odmocněním $1 + \frac{x}{n} > \sqrt[n]{x}$. Pro $0 < x < 1$ použijeme tuto nerovnost na $\frac{1}{x} > 1$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x}} < 1 + \frac{1}{nx} < \frac{nx}{nx - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{nx}}$$

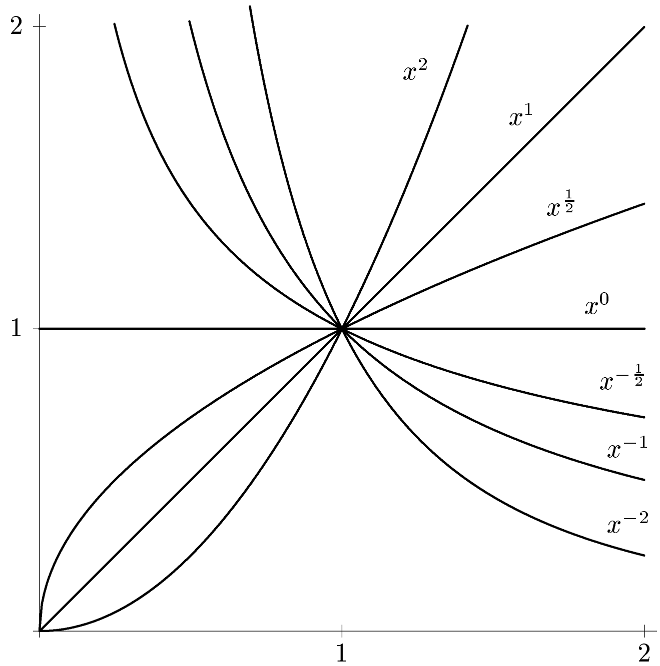
takže $1 - \frac{1}{nx} < \sqrt[n]{x}$. Protože $\frac{1}{\sqrt[n]{x}} > 1$, je $\sqrt[n]{x} < 1$. Nyní ukážeme, že pro racionální infinitesimální β je $x^\beta \approx 1$. Je-li $x > 1$, $\beta > 0$, zvolme $q \in \mathbb{N}^\infty$ pro které $\beta < \frac{1}{q}$. Pak $1 = x^0 < x^\beta < \sqrt[q]{x} < 1 + \frac{x}{q} \approx 1$. Je-li $\beta < 0$, zvolme $q \in \mathbb{N}^\infty$ pro které $-\beta < \frac{1}{q}$. Pak $1 \approx x^{-\frac{1}{q}} < x^\beta < x^0 = 1$. Obdobně v případě $x < 1$. Jsou-li nyní $a \approx b$, racionální konečně velká a $x > 0$, je $x^a - x^b = x^a(1 - x^{b-a}) \approx 0$. $\square$

Pro $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ položme $x^y = \mathfrak{P}(x^{\frac{p}{q}})$, kde $y \approx \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$. Pro $y > 0$ položme $0^y = 0$.

Pro pevné reálné $a \in \mathbb{R}$ je obecná mocnina x^a reálná funkce s definičním oborem $\mathcal{D}(x^a) = (0, +\infty)$.

Příklad 47 *Obecná mocnina splňuje identity*

$$(xy)^a = x^a y^a, \quad (\tfrac{x}{y})^a = \tfrac{x^a}{y^a} \quad x^{a+b} = x^a x^b, \quad (x^a)^b = x^{a \cdot b}$$



Obrázek 2.5: Obecná mocnina

Platnost těchto identit se ukáže nejprve z definice pro racionální exponent. Podle tvrzení 46 pak platí i pro obecnou mocninu. V následujícím odstavci v příkladu 49 si ukážeme, že obecná mocnina je spojitá. Její limity jsou

Příklad 48

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a := 0^+,\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x^a := +\infty\quad$ *pro* $\quad a > 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 1,\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 1\quad$ *pro* $\quad a = 0$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a := +\infty,\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x^a := 0^+\quad$ *pro* $\quad a < 0$

Důkaz: Je-li $a > 0$, existuje $n \in \mathbb{N}$ pro které $a > \frac{1}{n}$ a $x^a > \sqrt[n]{x}$. Protože $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} := +\infty$, je $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a := +\infty$ podle tvrzení 32. Je-li $a < m \in \mathbb{N}$, je $x^a < x^m$ a pro každé $\alpha \in 0^+$ je $0 \le \alpha^a \le \alpha^m \approx 0$, takže $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a := 0^+$. Pro $a = 0$ je $x^0 = 1$ konstantní funkce. Pro $a < 0$ je $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a := 1/\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-a} := \frac{1}{0^+} := +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a := 1/\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-a} := \frac{1}{+\infty} := 0^+$. $\square$

Limity výrazů, ve kterých se vyskytují odmocniny nebo obecné mocniny, počítáme podobně jako limity racionálních lomených funkcí tak, že určíme mocninu s nejvyšším exponentem. Například

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x}+1} &:= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2/3}}{x^{1/2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{1+x^{-2}}}{1+x^{-1/2}}\\ &:= \lim_{x\to+\infty}x^{1/6}\cdot\frac{\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+x^{-2}}}{\lim_{x\to+\infty}(1+x^{-1/2})} := +\infty\end{aligned}$$

Jindy je třeba před výpočtem limity daný výraz algebraicky upravit.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} := \lim_{x\to0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} := \lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 2$$

Cvičení. Určete limity

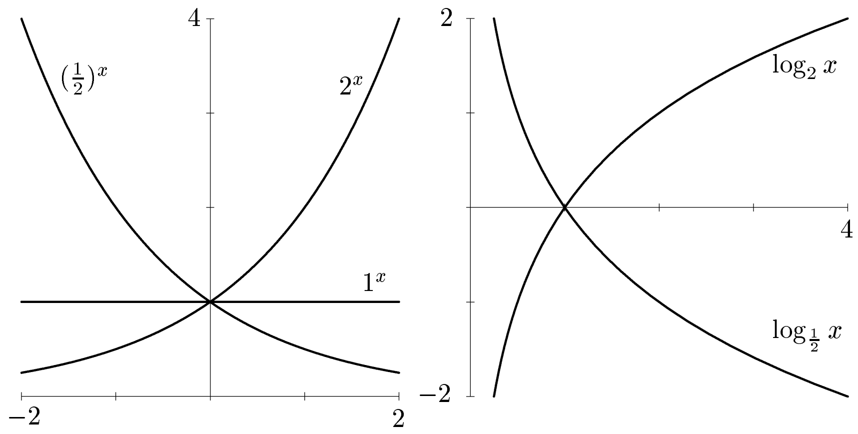
1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+x}}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-x+1}}{\sqrt{x^4+1}}$
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^4-1}}$
5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$
6. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$
7. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$
8. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

2.6.2 Exponenciála a logaritmus

Exponenciální funkce $f(x)=a^x$, kde $a>0$, je definována pro všechna x. Pro $a>1$ je a^x rostoucí funkce, $1^x=1$ je konstantní funkce a pro $0<a<1$ je a^x klesající funkce.

Příklad 49 *Exponenciální funkce a^x a obecná mocnina x^a jsou spojité.*

Důkaz: Pro každé infinitesimální β existuje racionální infinitesimální α pro které $|\beta|<\alpha$ a $1\approx a^{-\alpha}<a^\beta<a^\alpha\approx1$, takže také $a^\beta\approx1$. Pro každé $x\in\mathbb{R}$ a β infinitesimální je $a^{x+\beta}-a^x=a^x(a^\beta-1)\in\mathbb{R}^0$ protože $a^x\in\mathbb{R}^*\setminus\mathbb{R}^\infty$ a $a^\beta-1\in\mathbb{R}^0$, takže exponenciální funkce je spojitá. Je-li $a\neq1$, je exponenciální funkce a^x ryze monotónní (rostoucí pro $a>1$, klesající pro $a<1$) a má tedy spojitou inverzní funkci $\log_a x$ s definičním oborem $\mathcal{D}(\log_a x)=(0,+\infty)$. Obecná mocnina $x^a=(a^{\log_a x})^a=a^{a\log_a x}$ je složení exponenciální funkce a^x s funkcí $a\log_a x$. Obě tyto funkce jsou spojité. $\square$



Obrázek 2.6: Exponenciála a logaritmus

Příklad 50

1. $\lim_{x\to-\infty} a^x := 0^+, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x := +\infty$ *pro* $a > 1$
2. $\lim_{x\to-\infty} a^x = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 1$ *pro* $a = 1$
3. $\lim_{x\to-\infty} a^x := +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x := 0^+$ *pro* $0 < a < 1$

Důkaz: Nechť $a > 1$. Je-li $x > p \in \mathbb{N}^\infty$, je $a^x > a^p = (1 + (a-1))^p > 1 + p(a-1) \in \mathbb{R}^\infty$, takže $\lim_{x\to+\infty} a^x := +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x := 1/\lim_{x\to+\infty} a^x := 1/+\infty := 0^+$. Pro $0 < a < 1$ je $\lim_{x\to+\infty} a^x := 1/\lim_{x\to+\infty}(1/a)^x := 1/\infty := 0^+$, $\lim_{x\to-\infty} a^x := 1/\lim_{x\to\infty} a^x := 1/0^+ := +\infty$. □

Příklad 51 *Pro* $m \in \mathbb{N}$, $a > 1$ *je* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{a^x} = 0$.

Důkaz: pro $a > 1$, $n \le x < n + 1$ je podle binomické věty

$$a^x \quad > \quad (1 + (a-1))^n > \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 > \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(a-1)^2$$

a tedy $0 \le \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^x} \le \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{(x-1)(x-2)(a-1)^2} = 0$. Odtud

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{a^x} := \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^{\frac{x}{m}}}\right)^m = 0$$

Příklad 52

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Důkaz: Pro kladné $\alpha \in \mathbb{R}^0$ je $0 < e^\alpha - 1 \approx 0$. Existuje tedy $p \in \mathbb{N}^\infty$ pro které $\frac{1}{p+1} \leq e^\alpha - 1 < \frac{1}{p}$, takže $p < \frac{1}{e^\alpha - 1} \leq p + 1$, a $1 + \frac{1}{p+1} \leq e^\alpha < 1 + \frac{1}{p}$. Odtud

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^p < e^{\frac{\alpha}{e^\alpha - 1}} < \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1} \approx e \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{e^\alpha - 1} \approx 1.$$

Exponenciálu s e základem e budeme také značit $\exp x = e^x$. Logaritmickou funkci se základem e budeme značit $\ln x = \log_e x$. Pro obecnou exponenciální funkci je

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} := \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a} - 1}{x \ln a} \cdot \ln a := \ln a$$

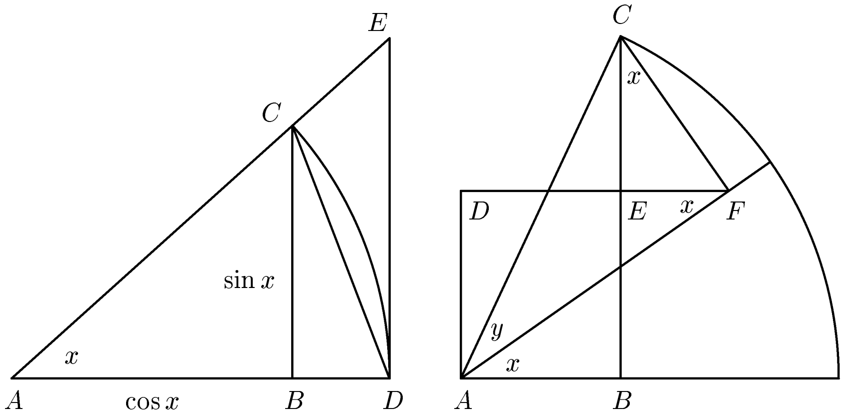
Cvičení. Určete limity

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - \ln(x+1))$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{e^x + x} - \sqrt{e^x - x})$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + x}{e^x - 1}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + x^2 + x}{e^x - 1}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + x^2 + x}{e^x + 1}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 4}{e^x - 2}$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 + x}{e^x - 1}$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{e^x - 1}$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{e^x + 1}$

2.6.3 Goniometrické funkce

Velikost úhlu se měří v radiánech, tj. délkou oblouku, který úhel vytíná na jednotkové kružnici. Délka křivky však není bezprostředně názorná veličina. Není zcela zřejmé, jak spolu délky křivek srovnávat. U plošných obsahů rovinných útvarů je to jednodušší. Je-li nějaký rovinný útvar částí jiného, má jistě menší plošný obsah. Proto měříme velikost úhlu spíše velikostí plošného obsahu odpovídající kruhové výseče. Abychom dostali radiány, definujeme velikost úhlu jako dvojnásobný obsah kruhové výseče s jednotkovým poloměrem. Protože plocha jednotkového kruhu je π, je velikost plného úhlu 2π (360°).

Goniometrické funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou definovány na obr. 2.7 vlevo. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s jednotkovou přeponou $AC = 1$ a úhlem $\angle DAC = x$, je $\cos x = AB$ délka přilehlé odvěsny a $\sin x = BC$ délka protilehlé odvěsny. Je-li $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, je bod B nalevo od bodu A a $\cos x$ je záporný. Je-li $\pi < x < 2\pi$, je bod C pod osou x a $\sin x$ je záporný. Je-li x větší než plný úhel 2π, ztotožňujeme ho s úhlem $x - 2\pi$, takže $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Říkáme, že funkce $\sin x$



Obrázek 2.7: Sinus a kosinus

a $\cos x$ jsou periodické s periodou 2π. Sinus je lichá funkce, tj. $\sin(-x) = -\sin x$. Kosinus je sudá funkce, tj. $\cos(-x) = \cos x$. Sinus má nulové body $k\pi$, kosinus má nulové body $(k + \frac{1}{2})\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Také goniometrické funkce převádí sčítání na násobení, ale složitějším způsobem než exponenciála (obr. 2.7 vpravo).

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= BC = AD + EC = AF\sin x + FC\cos x \\
&= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= AB = DF - EF = AF\cos x - FC\sin x \\
&= \cos x \cos y - \sin x \sin y
\end{aligned}$$

Z Pythagorovy věty plyne $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

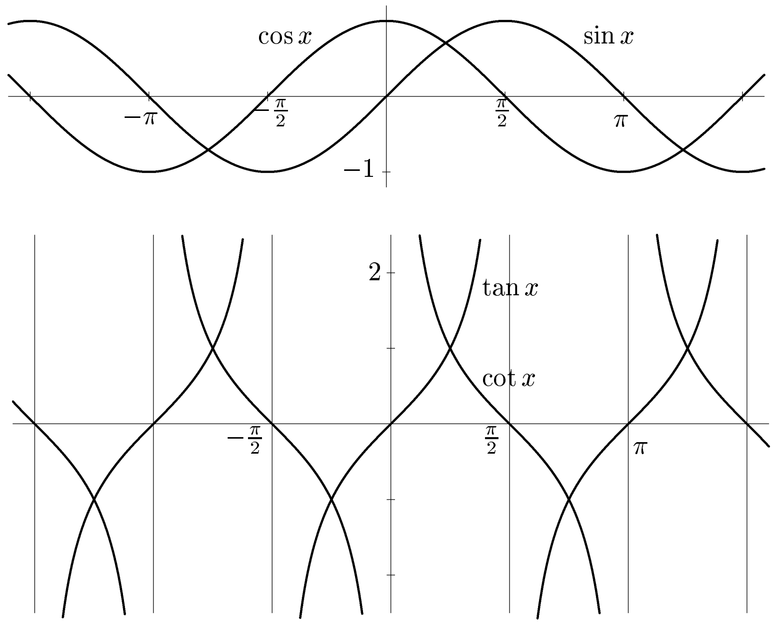
Příklad 53 *Goniometrické fukce* $\sin x$ *a* $\cos x$ *jsou spojité.*

Důkaz: Pro kladný úhel $x < \frac{\pi}{2}$ je obsah $\frac{1}{2}\sin x$ rovnoramenného trojúhelníka ADC menší než obsah $\frac{x}{2}$ kruhové výseče ADC, takže $\sin x < x$ (obr. 2.7 vlevo). Protože sinus je lichá funkce, je také $-x < \sin(-x)$. Pro infinitesimální nenulové α je tedy $-|\alpha| < \sin\alpha < |\alpha|$, takže $\sin\alpha$ je infinitesimální. Dále $0 < 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha^2}{2}$ takže také $1 - \cos\alpha$ je infinitesimální. Podle součtových vzorců

$$\sin(x+\alpha) - \sin x = \sin x(\cos\alpha - 1) + \cos x \sin\alpha \approx 0$$
$$\cos(x+\alpha) - \cos x = \cos x(\cos\alpha - 1) - \sin x \sin\alpha \approx 0$$

Příklad 54

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Obrázek 2.8: Goniometrické funkce

Důkaz: Pro kladný úhel $x < \frac{\pi}{2}$ je obsah $\frac{1}{2}\sin x$ rovnoramenného trojúhelníka ADC menší než obsah $\frac{x}{2}$ kruhové výseče ADC a ten je menší než obsah $\frac{\sin x}{2\cos x}$ pravoúhlého trojúheníka ADE (obr 2.7 vlevo). Násobíme-li tyto nerovnosti dvěma, dostáváme $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$ a tedy

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

pro $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Protože $\sin(-x) = -\sin x$ a $\cos(-x) = \cos x$, platí tato nerovnost i pro $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Pro infinitesimální nenulové α je $\cos\alpha \approx 1$, takže $\frac{\sin\alpha}{\alpha} \approx 1$. $\square$

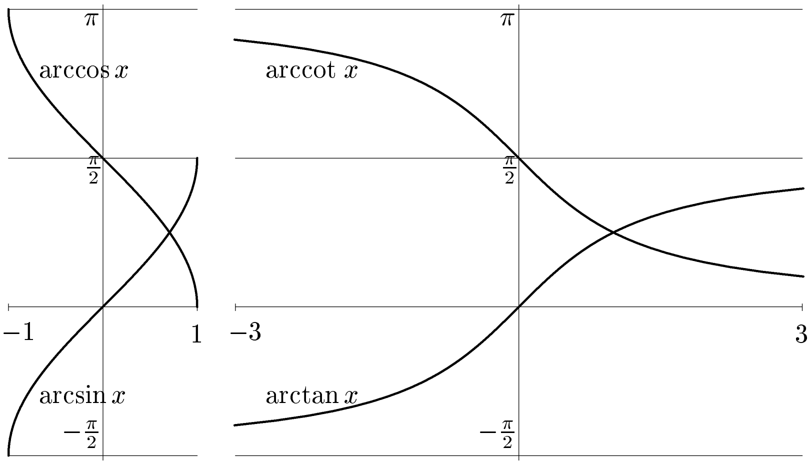
Další goniometrické funkce jsou

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Tangens je definován na intervalech $(k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi)$, na kterých je rostoucí, kotangens je definován na intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, na kterých je klesající. Obě tyto funkce jsou spojité.

Inverzní funkce k funkcím goniometrickým se nazývají cyklometrické. Protože goniometrické funkce nejsou prosté, musíme se omezit na nějaký interval, kde prosté jsou. Konvenčně se bere $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ pro $\sin x$ a $\tan x$, kde jsou obě rostoucí, a $(0, \pi)$ pro $\cos x$ a $\cot x$, kde jsou obě klesající.

$$\begin{array}{ll} \operatorname{arcsin} : \langle -1, 1\rangle \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle & \operatorname{arctan} : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \operatorname{arccos} : \langle -1, 1\rangle \to \langle 0, \pi\rangle & \operatorname{arccot} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi) \end{array}$$



Obrázek 2.9: Cyklometrické funkce

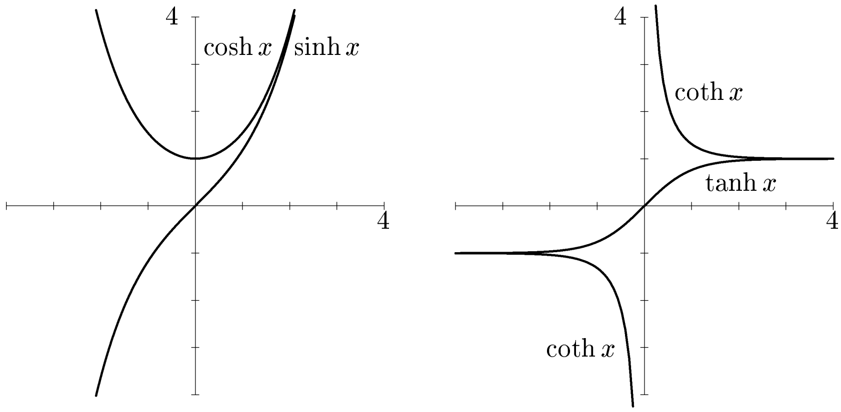
Cvičení. Určete limity

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + x}{\tan x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 2e^x + 1}{1 - \cos x}$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{e^x + 1}$
9. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\cos x}{e^x + 1}$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{e^x}$

2.6.4 Hyperbolické funkce

Hyperbolické funkce jsou odvozeny z exponenciály a mají formálně analogické vlastnosti jako funkce goniometrické. Tak jako goniometrické funkce se vztahují ke kružnici s rovnicí $x^2+y^2=1$ a generují ji parametrickou rovnicí $x=\cos t$, $y=\sin t$, hyperbolické funkce se vztahují k hyperbole s rovnicí $x^2-y^2=1$ a generují jí parametrickou rovnicí $x=\cosh t$, $y=\sinh t$. Jsou definovány vzorci

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

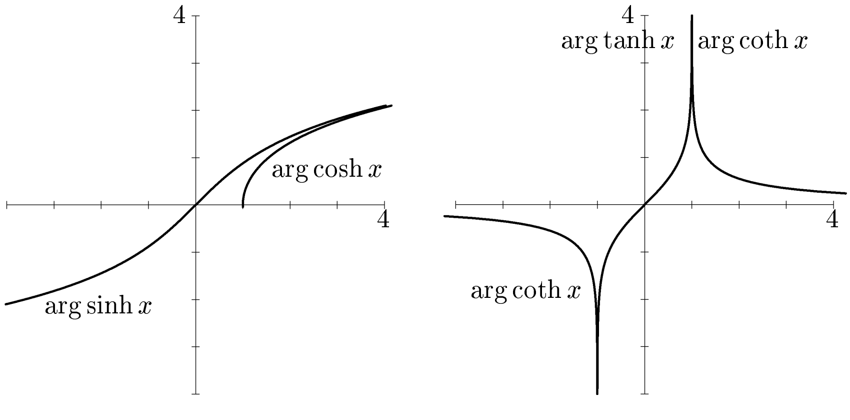


Obrázek 2.10: Hyperbolické funkce

Z vlastností exponenciály odvodíme součtové vzorce

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\end{aligned}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$



Obrázek 2.11: Hyperbolometrické funkce

Funkce inverzní k funkcím hyperbolickým se nazývají hyperbolometrické.

$$\begin{aligned}
\operatorname{arg\,sinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}), && x \in (-\infty, +\infty) \\
\operatorname{arg\,cosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}), && x \in \langle 1, +\infty) \\
\operatorname{arg\,tanh} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, && x \in (-1, 1) \\
\operatorname{arg\,coth} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, && x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)
\end{aligned}$$

2.7 Kompaktní intervaly

Spojité funkce na kompaktních intervalech $\langle a, b\rangle$ mají speciální vlastnosti.

Definice 55
Funkce f má v $c \in \mathcal{D}(f)$ maximum, je-li $(\forall x \in \mathcal{D}(f))(f(x) \le f(c))$.
Funkce f má v $c \in \mathcal{D}(f)$ minimum, je-li $(\forall x \in \mathcal{D}(f))(f(x) \ge f(c))$.
Funkce f je omezená, jestliže $(\exists r \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathcal{D}(f))(|f(x)| \le r)$.

Věta 56 (Weierstrassova věta o maximu) *Spojitá funkce na kompaktním intervalu má minimum i maximum.*

Důkaz: Zvolme libovolné $q \in \mathbb{N}^\infty$ a uvažujme body $x_i = a + \frac{i}{q}(b-a)$ pro $0 \le i \le q$. Nechť $f(x_r)$ je největší z čísel $f(x_i)$ a položme $c = \mathfrak{P}(x_r)$. Kdyby pro nějaké $x \in \langle a, b\rangle$ bylo $f(x) > f(c)$, pak by existovalo p pro které $x_p < x \le x_{p+1}$. Protože $x_p \approx x \approx x_{p+1}$ a f je spojitá, je i $f(x_p) \approx f(x) > f(c) \approx f(x_r)$ a tedy $f(x_p) > f(x_r)$ a to je spor. Obdobně pro minimum. □.

Bezprostřední důsledek Weierstrassovy věty o maximu je, že každá spojitá funkce na kompaktním intervalu je omezená. Předpoklad kompaktnosti definičního oboru je zde podstatný. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ definovaná na intervalu $(0, +\infty)$ nemá ani maximum ani minimum.

Definice 57 *Reálná funkce f je stejnoměrně spojitá, jestliže pro každé $x, y \in \mathcal{D}(f)^*$ pro které $x \approx y$ je i $f(x) \approx f(y)$.*

Funkce je tedy stejnoměrně spojitá, je-li spojitá v každém i nestandardním bodě. Naproti tomu spojité funkce jsme definovali jako funkce, které jsou spojité v každém standardním bodě. Každá stejnoměrně spojitá funkce je tedy spojitá, ne každá spojitá funkce ale musí být stejnoměrně spojitá. Příkladem je opět funkce $f(x) = \frac{1}{x}$, na intervalu $(0, 1)$, která není spojitá v žádném infinitesimálním $\alpha > 0$. Je totiž $\alpha \approx \alpha^2$, ale $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \in \mathbb{R}^\infty$. Na kompaktním intervalu však tato situace nastat nemůže.

Věta 58 *Každá spojitá funkce na kompaktním intervalu je stejnoměrně spojitá.*

Důkaz: Je-li $x, y \in \mathcal{D}(f)^*$ a $x \approx y$, pak $\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(y) \in \mathcal{D}(f)$. Podle předpokladu je f spojitá v $\mathfrak{P}(x)$, takže $f(x) \approx f(\mathfrak{P}(x)) \approx f(y)$. □