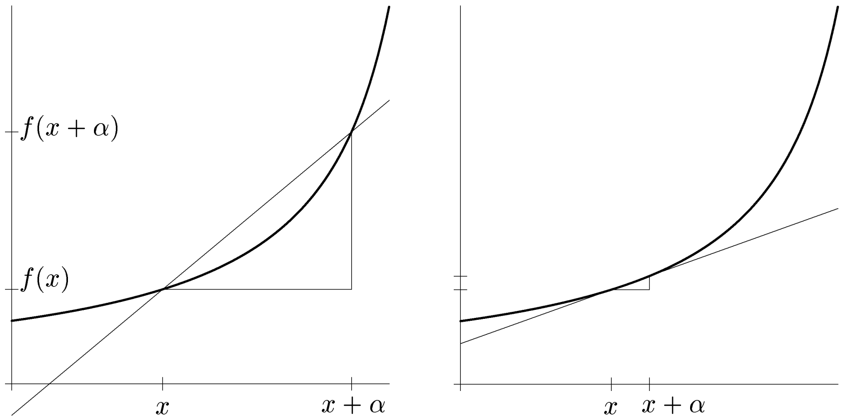
Kapitola 3

DERIVACE

3.1 Derivace

Pojem derivace je motivován snahou studovat složité nelineární závislosti pomocí jednodušších závislostí lineárních. Derivace funkce je poměr rychlosti růstu její závisle proměnné ku rychlosti růstu její nezávislé proměnné. Geometricky derivace vyjadřuje sklon tečny grafu funkce, tj. tangens úhlu, který tečna svírá s osou x. Tato tečna je graf lineární funkce, která v blízkosti uvažovaného bodu danou funkci nejlépe aproximuje. Tečnu v bodě x sestrojíme jako spojnici bodu grafu $[x, f(x)]$ s nekonečně blízkým bodem $[x+\alpha, f(x+\alpha)]$ (obr. 3.1).



Obrázek 3.1: Derivace

Definice 59 *Derivace reálné funkce f v bodě $x \in \mathcal{D}(f)$ je*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{a\to 0} \frac{f(x+a)-f(x)}{a} && \textit{derivace}\\
f'^{-}(x) &= \lim_{a\to 0^-} \frac{f(x+a)-f(x)}{a} && \textit{derivace zleva}\\
f'^{+}(x) &= \lim_{a\to 0^+} \frac{f(x+a)-f(x)}{a} && \textit{derivace zprava}
\end{aligned}$$

Derivace $f'(x)$ existuje, existuje-li příslušná limita a je-li tato limita vlastní. Existuje-li derivace $f'(x)$, je x vnitřní bod definičního oboru f. Ekvivalentně $f'(x)$ je derivace f v x jestliže pro každé nenulové infinitesimální α je $x+\alpha \in \mathcal{D}(f)^*$ a

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}.$$

Předpis, který bodu x přiřazuje derivaci $f'(x)$, je opět reálná funkce, která se nazývá první derivace funkce $f(x)$. Její definiční obor je podmnožina definičního oboru f. Podobně druhá derivace $f''(x)$ je první derivace funkce $f'(x)$. k-tou derivaci značíme $f^{(k)}(x)$.

Derivace konstantní funkce $f(x)=c$ je v každém bodě nula: $c' := \lim\limits_{a\to 0} \frac{c-c}{0} = 0$. Pro identickou funkci $f(x)=x$ je $x' := \lim\limits_{a\to 0} \frac{x+a-x}{a} = 1$. Pro mocninu s kladným celočíselným exponentem $f(x)=x^n$ je

$$\begin{aligned}
(x^n)' &:= \lim_{a\to 0} \frac{(x+a)^n - x^n}{a} := \lim_{a\to 0}\left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}\right)\\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

Pro $n=0$ a $n=1$ dává tento vzorec derivaci konstantní a identické funkce. Derivaci exponenciální funkce odvodíme z příkladu 52. Je totiž

$$(e^x)' := \lim_{a\to 0} \frac{e^{x+a}-e^x}{a} := e^x \cdot \lim_{a\to 0} \frac{e^a - 1}{a} = e^x$$

Derivace exponenciální funkce je přímo její hodnota. Ze součtových vzorců pro goniometrické funkce a z příkladu 54 odvodíme

$$\begin{aligned}
\sin' x &:= \lim_{a\to 0} \frac{\sin(x+a) - \sin x}{a} := \lim_{a\to 0} \frac{\sin x(\cos a - 1) + \cos x \sin a}{a}\\
&:= \sin x \cdot \lim_{a\to 0} \frac{\cos a - 1}{a} + \cos x \cdot \lim_{a\to 0} \frac{\sin a}{a} := \cos x,
\end{aligned}$$

protože $\lim\limits_{a\to 0} \frac{\cos a - 1}{a} := \lim\limits_{a\to 0} \frac{-\sin^2 a}{a(1+\cos a)} = 0$. Obdobně

$$\begin{aligned}
\cos' x &:= \lim_{a\to 0} \frac{\cos(x+a) - \cos x}{a} := \cos x \cdot \lim_{a\to 0} \frac{\cos a - 1}{a} - \sin x \cdot \lim_{a\to 0} \frac{\sin a}{a}\\
&:= -\sin x
\end{aligned}$$

Funkce absolutní hodnoty $|x|$ má derivaci $|x|' = 1$ pro $x > 0$, $|x|' = -1$ pro $x < 0$. V nule má jednostranné derivace $|0|'^{+} = \lim_{a\to 0^+} \frac{|a|}{a} = 1$, $|0|'^{-} = \lim_{a\to 0^-} \frac{|-a|}{-a} = -1$, takže oboustranná derivace $|0|'$ neexistuje. Funkce $\mathrm{sgn}(x)$ má v každém $x \neq 0$ nulovou derivaci $\mathrm{sgn}'(x) = 0$. V nule je $\lim_{a\to 0^+} \frac{\mathrm{sgn}(a)}{a} = \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a} = +\infty$ a $\lim_{a\to 0^-} \frac{\mathrm{sgn}(a)}{a} = \lim_{a\to 0^-} \frac{-1}{a} = +\infty$, takže derivace $\mathrm{sgn}'(0)$ neexistuje. Funkce celé části $\lfloor x \rfloor$ má v nule (a v každém celém čísle) jednostranné derivace $\lfloor 0 \rfloor'^{+} = 0$, $\lfloor 0 \rfloor'^{-}$, neexistuje (limita je nevlastní).

Tvrzení 60 *Jestliže reálná funkce f má v bodě x derivaci, je v x spojitá.*

Důkaz: Pro každé nenulové infinitesimální α je

$$f(x+\alpha) - f(x) = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}\alpha \approx f'(x) \cdot \alpha \approx 0. \ \square$$

Z aritmetických pravidel pro limity dostáváme aritmetická pravidla pro derivace. Znak := zde chápeme jako podmíněnou rovnost. Existuje-li pravá strany, existuje také levá strana a rovná se pravé straně.

Tvrzení 61 *Nechť f, g jsou reálné funkce, $x \in \mathbb{R}$.*

1. $(f+g)'(x) := f'(x) + g'(x)$

2. $(cf)'(x) := cf'(x)$ *pro* $c \in \mathbb{R}$.

3. $(fg)'(x) := f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) := \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$

5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) := \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Důkaz: Podle tvrzení 28

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &:= \lim_{a\to 0} \frac{f(x+a) + g(x+a) - f(x) - g(x)}{a} \\ &:= \lim_{a\to 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a} + \lim_{a\to 0} \frac{g(x+a) - g(x)}{a} \\ &:= f'(x) + g'(x).\end{aligned}$$

$$(cf)'(x) := \lim_{a\to 0} \frac{cf(x+a) - cf(x)}{a} := cf'(x)$$

$$(fg)'(x) := \lim_{a\to 0} \frac{f(x+a)g(x+a) - f(x)g(x)}{a}$$

$$
\begin{aligned}
&:= \lim_{a\to 0} \frac{\Big(f(x+a)-f(x)\Big)g(x+a)+f(x)\Big(g(x+a)-g(x)\Big)}{a}\\
&:= \lim_{a\to 0} \frac{f(x+a)-f(x)}{a}\cdot \lim_{a\to 0} g(x+a) + f(x)\cdot \lim_{a\to 0}\frac{g(x+a)-g(x)}{a}\\
&:= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

Zde využíváme tvrzení 60, podle kterého $\lim\limits_{a\to 0} g(x+a) = g(x)$, protože g má v x derivaci.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &:= \lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{g(x+a)}-\frac{1}{g(x)}\right)\Big/ a\\
&:= \lim_{a\to 0}\frac{g(x)-g(x+a)}{a}\cdot \lim_{a\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+a)} := -\frac{g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &:= \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' := f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)}\\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \square
\end{aligned}
$$

Například derivace mnohočlenu $P(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ je

$$P'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \cdots + nc_nx^{n-1}$$

Také každá racionální funkce má derivaci v každém bodě, ve kterém je definována. Například

$$
\begin{aligned}
(x^{-n})' &:= \left(\frac{1}{x^n}\right)' := \frac{-n\cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1},\quad x\neq 0\\
\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' &:= \frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\\
\tan' x &:= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' := \frac{\sin' x\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos' x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},\quad x\neq (k+\tfrac{1}{2})\pi\\
\cot' x &:= := \frac{\cos' x\cdot\sin x - \cos x\sin' x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},\quad x\neq k\pi\\
\cosh' x &:= \frac{1}{2}\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)' := \frac{1}{2}\left(e^x-\frac{e^x}{e^{2x}}\right) = \sinh x\\
\sinh' x &= \cosh x
\end{aligned}
$$

Věta 62 *Nechť funkce g má derivaci v bodě x a funkce f má derivaci v bodě $g(x)$. Pak složená funkce $f\circ g$ má derivaci v bodě x*

$$(f\circ g)'(x) := f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Důkaz: Nechť α je nenulové infinitesimální. Je-li $g(x+\alpha) = g(x)$, je $g'(x) = 0$ a

$$\frac{f(g(x+\alpha)) - f(g(x))}{\alpha} = 0 = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Je-li $g(x+\alpha) \neq g(x)$, je $\beta = g(x+\alpha) - g(x)$ infinitesimální a

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x+\alpha)) - f(g(x))}{\alpha} &= \frac{f(g(x)+\beta) - f(g(x))}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \\ &\approx f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \square \end{aligned}$$

Speciálně pro $g(x) = f(ax+b)$ je $g'(x) = a \cdot f'(ax+b)$. Derivace obecné exponenciální funkce je

$$(a^x)' \quad := \quad (e^{x \ln a})' := e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \cdot \ln a$$

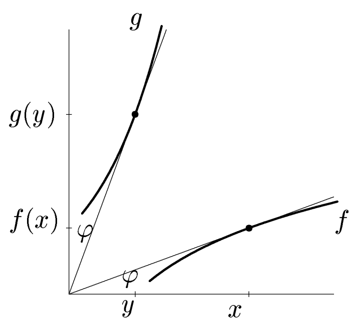
pro $x \in \mathbb{R}$. Zde vidíme význam Eulerova čísla e. Je to jediný základ a, při kterém se exponenciální funkce a^x derivací nemění.

Věta 63 *Nechť g je ryze monotónní funkce na otevřeném intervalu, která má v každém bodě nenulovou vlastní derivaci. Pak inverzní funkce $f = g^{-1} : \mathcal{R}(g) \to \mathcal{D}(g)$ má v každém bodě vlastní derivaci*

$$f'(x) := \frac{1}{g'(f(x))}, \quad x \in \mathcal{R}(f).$$

Důkaz: Pro každé nenulové infinitesimální α je podle principu expanze $\beta = f(x+\alpha) - f(x)$ také nenulové a infinitesimální. Odtud $f(x+\alpha) = f(x) + \beta$, takže $x + \alpha = g(f(x)+\beta)$ a tedy

$$\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} \quad = \quad \frac{\beta}{g(f(x)+\beta) - g(f(x))} \approx \frac{1}{g'(f(x))} \quad \square$$



Obrázek 3.2: Derivace inverzní funkce

Vzorec pro derivaci inverzní funkce lze získat ze vzorce pro derivaci složené funkce. Derivací obou stran rovnosti $g(f(x)) = x$ totiž dostaneme $g'(f(x))f'(x) = 1$.

Větu 62 zde však můžeme použít pouze když víme, že obě funkce f i g mají derivaci. Hlavní přínos věty 63 je právě to, že derivace inverzní funkce existuje. Graf inverzní funkce f je s grafem funkce g osově souměrný podle diagonály $y = x$ (obr. 3.2) a souměrné jsou tedy i jejich tečny. Pro úhel φ, který svírá tečna grafu f v bodě x tedy platí

$$f'(x) = \tan\varphi = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{1}{g'(y)}$$

Podle věty 63 určíme derivace dalších elementárních funkcí.

$$\begin{aligned}
\ln' x &:= \frac{1}{(e^{\ln x})'} := \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty). \\
\log_a' x &:= \frac{1}{(a^{\log_a x})'} := \frac{1}{a^{\log_a(x)} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \in (0, +\infty) \\
\arctan' x &:= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} := \cos^2(\arctan x) \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty) \\
\arcsin' x &:= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} := \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} := \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1)
\end{aligned}$$

Protože $x \in (-1, 1)$, je $\cos(\arcsin x) > 0$, takže při odmocňování musíme brát znaménko $+$.

$$\begin{aligned}
\arccos' x &:= \frac{1}{-\sin(\arccos x)} := \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} \\
&:= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1) \\
\arg\sinh' x &:= \frac{1}{\sinh'(\arg\sinh x)} := \frac{1}{\cosh(\arg\sinh x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\arg\sinh x)}} := \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \\
\arg\cosh' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}
\end{aligned}$$

Derivace n-té odmocniny je $(\sqrt[n]{x})' := \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} := \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, speciálně $(\sqrt{x})' := \frac{1}{2\sqrt{x}} := \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$. Třetí odmocnina, chápeme-li ji jako funkci na $(-\infty, +\infty)$ má derivaci v každém bodě různém od nuly. Racionální mocnina je složení mocniny s odmocninou, proto její derivace je $(x^{\frac{n}{m}})' := (\sqrt[m]{x^n})' := \frac{1}{m}(x^n)^{\frac{1}{m}-1} \cdot n \cdot x^{n-1} := \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}$ pro $x \in (0,+\infty)$. I pro obecnou mocninu platí stejný vzorec

$$(x^a)' := (e^{a \cdot \ln x})' := e^{a \cdot \ln x} \cdot (a \ln x)' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}, \quad x \in (0,+\infty).$$

$$(x^x)' := (e^{x \ln x})' := e^{x \ln x} \cdot (\ln x + \tfrac{x}{x}) = (\ln x + 1)x^x, \quad x \in (0,+\infty)$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{1-x^2})' &:= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) := -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (0,+\infty) \\ (e^{-x^2})' &:= e^{-x^2} \cdot (-2x) := -2xe^{-x^2} \quad x \in (-\infty,+\infty) \end{aligned}$$

Shrnujeme tedy

Příklad 64 (Derivace elementárních funkcí)

$$\begin{aligned}
(x^a)' &= ax^{a-1}, && x \in (0,+\infty), \ \ a \in \mathbb{R} \\
(a^x)' &= a^x \ln a, && x \in (-\infty,+\infty), \ \ a > 0 \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}, && x \in (0,+\infty), \ \ a > 0 \\
\sin' x &= \cos x, && x \in (-\infty,+\infty) \\
\cos' x &= -\sin x, && x \in (-\infty,+\infty) \\
\tan' x &= \frac{1}{\cos^2 x}, && x \in (\tfrac{2k-1}{2}\pi, \tfrac{2k+1}{2}\pi), \ \ k \in \mathbb{Z} \\
\cot' x &= \frac{-1}{\sin^2 x}, && x \in (k\pi, (k+1)\pi), \ \ k \in \mathbb{Z} \\
\arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, && x \in (-1,1) \\
\arccos' x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, && x \in (-1,1) \\
\arctan' x &= \frac{1}{1+x^2}, && x \in (-\infty,+\infty) \\
\mathrm{arccot}\,' x &= \frac{-1}{1+x^2}, && x \in (-\infty,+\infty) \\
\sinh' x &= \cosh x, && x \in (-\infty,+\infty) \\
\cosh' x &= \sinh x, && x \in (-\infty,+\infty)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tanh' x &= \frac{1}{\cosh^2 x}, && x \in (-\infty, +\infty) \\
\coth' x &= \frac{-1}{\sinh^2 x}, && x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\
\arg\sinh' x &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, && x \in (-\infty, +\infty) \\
\arg\cosh' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, && x \in (1, +\infty) \\
\arg\tanh' x &= \frac{1}{1-x^2}, && x \in (-1, 1) \\
\arg\coth' x &= \frac{1}{1-x^2}, && x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)
\end{aligned}$$

Cvičení. Určete derivace funkcí a jejich definiční obory:

1. $f(x) = (1-x)^3$
2. $f(x) = x^3 + x$
3. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$
5. $f(x) = e^x \sin x$
6. $f(x) = e^{-x} \cos x$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + 1}$
8. $f(x) = \dfrac{1-x}{\sin x}$
9. $f(x) = \sinh x$
10. $f(x) = \cosh x$
11. $f(x) = \tanh x$
12. $f(x) = \coth x$
13. $f(x) = (1-x)^8$
14. $f(x) = (e^{2x}+1)^3$
15. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^4}$
16. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$
17. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
18. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$
19. $f(x) = e^{-x^2}$
20. $f(x) = e^{\sin x}$
21. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
22. $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$
23. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$
24. $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$
25. $f(x) = x \ln x$
26. $f(x) = \ln \sqrt{x^2+1}$
27. $f(x) = \ln \cos x$
28. $f(x) = e^{\ln x + 1}$
29. $f(x) = x^{x^2}$
30. $f(x) = \sqrt[x]{x}$

3.2 Věty o přírůstku funkce

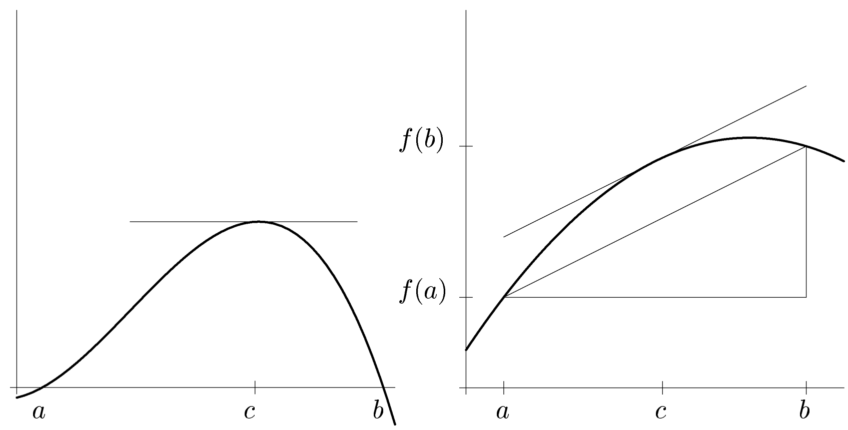
Věty o přírůstku funkce dávají do souvislosti rozdíl funkčních hodnot na intervalu konečné délky s derivacemi ve vnitřních bodech tohoto intervalu.

Věta 65 (Rolleova věta) *Nechť funkce f je spojitá na kompaktním intervalu $\langle a,b\rangle$, má derivaci v každém bodě $x\in(a,b)$ a splňuje $f(a)=f(b)=0$. Pak existuje $c\in(a,b)$ pro které $f'(c)=0$.*

Důkaz: Je-li $f(x)=0$ konstantní funkce, platí věta triviálně. Předpokládejme tedy, že f konstatní není. Podle věty 56 o maximu nabývá f na intervalu $\langle a,b\rangle$ maximum i minimum a alespoň jedno z nich je různé od nuly. Předpokládejme, že $f(c)>0$ je maximum f na $\langle a,b\rangle$, takže $c\in(a,b)$. Pro každé $x\in\langle a,b\rangle^*$ platí $f(x)\le f(c)$. Pro každé kladné infinitesimální α tedy

$$0\le\frac{f(c-\alpha)-f(c)}{-\alpha}\approx f'(c)\approx\frac{f(c+\alpha)-f(c)}{\alpha}\le 0$$

takže $f'(c)=0$ (obr.3.3 vlevo) □



Obrázek 3.3: Rolleova a Lagrangeova věta

Věta 66 (Lagrangeova věta o přírůstku funkce) *Nechť funkce f je spojitá na kompaktním intervalu $\langle a,b\rangle$ a má derivaci v každém bodě $x\in(a,b)$. Pak existuje $c\in(a,b)$ pro které*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Důkaz: Pro $x\in\langle a,b\rangle$ položme $h(x)=f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Od funkce f odčítáme lineární funkci procházející body $[a,f(a)]$ a $[b,f(b)]$. Pak $h(a)=h(b)=0$,

h je spojitá a má na (a,b) derivaci $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Podle Rolleovy věty existuje $c \in (a,b)$ pro které

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Věta 67 (Cauchyova věta o střední hodnotě) *Nechť f,g jsou spojité funkce na kompaktním intervalu $\langle a,b\rangle$, kter0 maj9 derivace na (a,b) a nechť pro každé $x \in (a,b)$ je $g'(x) \neq 0$. Pak $g(b) \neq g(a)$ a existuje $c \in (a,b)$ pro které*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Důkaz: Podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce existuje $d \in (a,b)$ tak, že $g(b) - g(a) = g'(d)(b-a) \neq 0$. Pro $x \in \langle a,b\rangle$ položme

$$h(x) = (f(x)-f(a)) \cdot (g(b)-g(a)) - (g(x)-g(a)) \cdot (f(b)-f(a))$$

Funkce h splňuje předpoklady Rolleovy věty, takže existuje $c \in (a,b)$ pro které

$$0 = h'(c) = f'(c) \cdot (g(b)-g(a)) - g'(c) \cdot (f(b)-f(a))$$

Vydělíme-li tuto rovnost nenulovým členem $g'(c)(g(b)-g(a))$, dostáváme již žádaný vzorec □

3.3 L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo je silný nástroj na výpočet limit neurčitých výrazů typu $\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$ a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Věta 68 (L'Hospitalovo pravidlo $\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$) *Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Pak*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} := \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

To znamená, že existuje-li limita vpravo, existuje i limita vlevo a rovnají se. Stejná věta platí i pro jednostranné limity.

Důkaz provedeme nejprve pro limity zprava. Změníme-li hodnoty funkcí f a g v bodě a, existence ani hodnota uvažovaných limit se nezmění. Můžeme tedy předpokládat $f(a) = g(a) = 0$, takže f i g jsou v a spojité zprava. Protože existuje $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, existuje $b > a$ tak že f i g mají derivaci v (a,b), jsou spojité v $\langle a,b\rangle$ a $g'(x)$ je v (a,b) nenulová. Nechť α je kladné infinitesimální. Podle principu expanze platí Cauchyova věta 67 i pro funkce f,g na intervalu $\langle a, a+\alpha\rangle$, takže existuje infinitesimální $\beta \in (0,\alpha)$, pro které

$$\frac{f(a+\alpha)}{g(a+\alpha)} = \frac{f(a+\alpha)-f(a)}{g(a+\alpha)-g(a)} = \frac{f'(a+\beta)}{g'(a+\beta)}$$

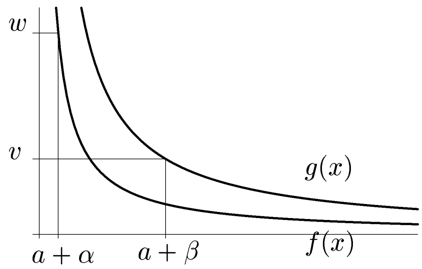
Z toho již plyne $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} := \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Důkaz pro limity zleva je obdobný, případ oboustranných limit vyplývá z případů jednostranných limit. $\square$

Ve výpočtech limit podle L'Hospitalova pravidla používáme opět podmíněnou rovnost $:=$. Limita podílu $f(x)/g(x)$ existuje, existuje-li limita podílu $f'(x)/g'(x)$. Vždy je však také třeba ověřit, že limity $f(x)$ i $g(x)$ jsou nulové. Například

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} := \lim\limits_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1.$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} := \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} := \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b.$



Obrázek 3.4: L'Hospitalovo pravidlo

Věta 69 (L'Hospitalovo pravidlo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$) *Nechť* $\lim\limits_{x\to a} f(x) := \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) := \pm\infty$. *Pak*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} := \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Limity podílu mohou být vlastní nebo nevlastní. Stejná věta platí i pro jednostranné limity.

Důkaz provedeme pro limity zprava. Existuje-li $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, jsou funkce f a g spojité na nějakém intervalu $(a, b\rangle$. Z toho plyne, že je-li $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) := \pm\infty$, je buď $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) := +\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) := -\infty$. Předpokládejme, že tato limita je pro obě funkce $+\infty$ (jinak přejdeme k funkcím $-f$ případně $-g$). Z předpokladů věty plyne, že existuje $b > a$ tak, že f i g mají derivaci a jsou spojité v $(a, b\rangle$ a $g'(x)$ je v (a, b) nenulová. Nechť α je kladné infinitesimální číslo (viz obr. 3.4). Položme $w = \min\{f(a+\alpha), g(a+\alpha)\}$, takže $w \in \mathbb{R}^\infty$, $w > 0$ a $v = \sqrt{w} \in \mathbb{R}^\infty$. Zvolme $q \in \mathbb{N}^\infty$ a uvažujme body $x_i = a + \frac{i}{q}(b-a)$ pro $0 < i \leq q$. Nechť p je první číslo pro které $\max\{f(x_p), g(x_p)\} < v$. Pak $\beta = x_p - a$ je infinitesimální. Kdyby totiž β infinitesimální nebylo, existovalo by standardní $a < c \approx x_p$, pro které $\max\{f(c), g(c)\} \approx v$ a to je spor neboť $\max\{f(c), g(c)\}$ je vlastní číslo. Máme tedy

$$f(a+\beta) \leq v, \quad g(a+\beta) \leq v, \quad w \leq f(a+\alpha), \quad w \leq f(a+\alpha)$$

takže

$$\frac{f(a+\beta)}{f(a+\alpha)} < \frac{v}{w} = \frac{1}{v} \approx 0; \quad \frac{g(a+\beta)}{g(a+\alpha)} < \frac{v}{w} = \frac{1}{v} \approx 0.$$

Podle věty 67 existuje infinitesimální $\gamma \in (\alpha, \beta)$, tak že

$$\frac{f'(a+\gamma)}{g'(a+\gamma)} = \frac{f(a+\alpha) - f(a+\beta)}{g(a+\alpha) - g(a+\beta)} = \frac{f(a+\alpha)}{g(a+\alpha)} \cdot \frac{1 - \frac{f(a+\beta)}{f(a+\alpha)}}{1 - \frac{g(a+\beta)}{g(a+\alpha)}}$$

Z toho plyne, že $\frac{f(a+\alpha)}{g(a+\alpha)}$ a $\frac{f'(a+\gamma)}{g'(a+\gamma)}$ náleží do stejné monády. Buď totiž $\frac{f(a+\alpha)}{g(a+\alpha)}$ náleží do $\mathbb{R}^\infty$ a po vynásobení číslem nekonečně blízkým jedné dostane opět číslo z $\mathbb{R}^\infty$, nebo $\frac{f(a+\alpha)}{g(a+\alpha)}$ náleží do $\mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}^\infty$ a po vynásobení číslem nekonečně blízkým jedné se změní jen o infinitesimální hodnotu. To znamená $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. □

Například

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x := \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} := \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} := \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x + \frac{1}{x}} := \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{1 - \frac{1}{x^2}} := \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 - x^2} := +\infty.$$

Tvrzení 70 (L'Hospitalovo pravidlo v $\pm\infty$) *Předpokládejme, že existují limity* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) := \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) := \pm\infty$. *Pak*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} := \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Věta platí i pro limity v $+\infty$, $-\infty$, i pro limity tvaru $\frac{0^\pm}{0^\pm}$.

Důkaz: Funkce $f_1(x) = f(\frac{1}{x})$ a $g_1(x) = g(\frac{1}{x})$ splňují předpoklady L'Hospitalova pravidla $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ v nule, takže

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} := \lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} := \lim_{x \to 0} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} := \lim_{x \to 0} \frac{f'(\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2}}{g'(\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2}} := \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Obdobně pro případ $\frac{0^\pm}{0^\pm}$. □

Například

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} := \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} := \lim_{x \to +\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} := \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Další neurčité výrazy $0^{\pm}\cdot(+\infty)$ a $+\infty-\infty$ převádíme na neurčité výrazy $\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$ a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ algebraickými úpravami. Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) := \pm\infty$, upravujeme

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) := \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) := \pm\infty$, použijeme některou z úprav

$$f(x)-g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right) = g(x)\cdot\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)$$

Vždy je však třeba ověřit, že limita na kterou používáme L'Hospitalovo pravidlo je typu $\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Například

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right) &:= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)} := \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} \\ &:= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{(1+x)}+\frac{1}{(1+x)^2}} := \lim_{x\to 0}\frac{-1}{x+1+1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Cvičení

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-e^{-x}})$
5. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin^2 x}{\ln x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\dfrac{a}{x})^x$
8. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$
9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\ \ ll$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$
14. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$
15. $\lim\limits_{x\to +\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$
16. $\lim\limits_{x\to -\infty}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
17. $\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\dfrac{1}{1-x}$
18. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

19. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$

20. $\lim_{x\to 1^-} \ln x \ln(1-x)$

21. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)$

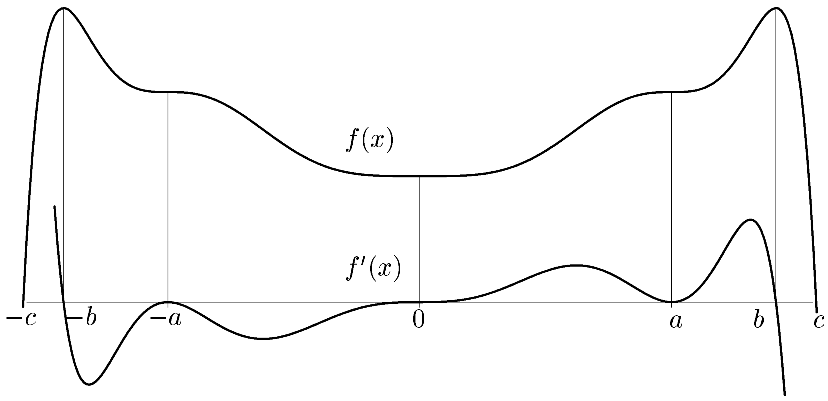
22. $\lim_{x\to +\infty} x^2 \ln \cos \frac{1}{x}$

23. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \tan x}$

24. $\lim_{x\to +\infty} x^2 \ln \cos \frac{1}{x}$

3.4 Průběh funkce

Derivace funkce podává obraz o jejím průběhu (obr 3.5). Tam kde je derivace kladná, je funkce rostoucí, tam kde je derivace záporná, je funkce klesající. Je-li $f'(x) = 0$, může být funkce v x jak rostoucí (v bodě a) tak klesající (v bodě $-a$), může zde však mít také tzv. lokální maximum (v bodech $-b$, b) nebo lokální minimum (v bodě 0). Naopak má-li f v x lokální minimum nebo maximum, a má-li zde derivaci, je tato derivace nulová. To je způsob jak se lokální extrémy funkce hledají. Monotónní a ryze monotónní funkce, jejich maxima a minima jsme uvažovali v odstavci 2.5. Zde potřebujeme ještě lokální varianty těchto pojmů:



Obrázek 3.5: Průběh funkce

Definice 71 *Reálná funkce f je rostoucí v bodě $c \in \mathcal{D}(f)$, jestliže*

$$(\forall x, y \in \mathcal{D}(f)^*)(c \approx x < c < y \approx c \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(c) < f(y)).$$

Obdobně definujeme funkce klesající, nerostoucí a neklesající v bodě c.

Funkce f je rostoucí v bodě $c \in \mathcal{D}(f)$ právě když platí

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x, y \in \mathcal{D}(f))(c - \varepsilon < x < c < y < c + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(c) < f(y))$$

Je-li tato podmínka splněna, platí také v nestandardním světě tedy pro každé $c \approx x < c < y \approx y$. Naopak pokud by podmínka neplatila, pak by pro každé $\varepsilon = \frac{1}{n}$ existovalo $x_n \in (c - \frac{1}{n}, c)$ pro které $f(x_n) \geq f(c)$. Pro $p \in \mathbb{N}^\infty$ by pak bylo $c \approx x_p < c$ a $f(x_p) \geq f(c)$ a to je spor.

Tvrzení 72 *Nechť f je funkce na otevřeném intervalu, která má v každém bodě derivaci.*

1. *Je-li $x \in \mathcal{D}(f)$ a $f'(x) > 0$, je f rostoucí v x.*
2. *Je-li f je neklesající v $x \in \mathcal{D}(f)$, pak $f'(x) \geq 0$.*
3. *Jestliže $(\forall x \in \mathcal{D}(f))(f'(x) > 0)$, pak f je rostoucí.*
4. *Funkce f je neklesající právě když $(\forall x \in \mathcal{D}(f))(f'(x) \geq 0)$.*

Důkaz: 1. Nechť $\alpha > 0$ je infinitesimální. Pak $(f(x+\alpha) - f(x))/\alpha \approx f'(x) > 0$, takže $f(x+\alpha) - f(x) > 0$. Podobně $f(x-\alpha) - f(x) < 0$, takže f je v x rostoucí.
2. Kdyby bylo $f'(x) < 0$, byla by funkce f v x klesající a nebyla by neklesající. Je tedy $f'(x) \geq 0$.
3. Předpokládejme sporem, že existují $a < b$ v $\mathcal{D}(f)$, pro která $f(a) \geq f(b)$. Podle věty 66 o přírůstku funkce existuje $c \in (a,b)$ pro které $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b-a) \leq 0$ a to je spor.
4. Je-li f neklesající, je neklesající v každém bodě x a tedy $f'(x) \geq 0$ podle bodu 2. Předpokládejme naopak, že f není neklesající v I. Pak existují $a, b \in \mathcal{D}(f)$, $a < b$ pro které $f(a) > f(b)$. Podle věty o přírůstku funkce existuje $c \in (a,b)$ pro které $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b-a) < 0$, takže neplatí $(\forall x \in \mathcal{D}(f))(f'(x) \geq 0)$. □

Na první pohled se může zdát, že podmínky tvrzení 72 lze v mnohém doplnit a zesílit. Zatímco bod 4 dává nutnou a postačující podmínku na to, aby funkce byla neklesající, v bodě 3 máme jen podmínku nutnou. Neplatí také, že každá rostoucí diferencovatelná funkce má všude kladnou derivaci? Podobně se v souvislosti s bodem 1 naskýtá otázka, zda funkce která je rostoucí v x musí již mít v x kladnou derivaci. Také bod 2 je jen jednostranná implikace. Plyne z podmínky $f'(x) \geq 0$, že f je neklesající v x? Odpověď na všechny tyto otázky je záporná. To ukazují příklady funkcí, pro které takové implikace neplatí.

Příklad 73

1. *Funkce $f(x) = x^3$ je v $x = 0$ rostoucí, má zde však nulovou derivaci.*
2. *Funkce $f(x) = x^2$ má v $x = 0$ nezápornou derivaci $f'(0) = 0$, není zde však neklesající.*
3. *Funkce $f(x) = x^3$ je rostoucí, nemá však všude kladnou derivaci.*

Definice 74 *Funkce f má v bodě c lokální maximum, je-li*

$$(\forall x \in \mathcal{D}(f)^*)(x \approx c \;\;\Rightarrow\;\; f(x) \leq f(c))$$

Funkce f má v bodě c ostré lokální maximum, je-li

$$(\forall x \in \mathcal{D}(f)^*)(c \neq x \approx c \;\;\Rightarrow\;\; f(x) < f(c))$$

Obdobně definujeme (ostré) lokální minimum. Souhrně mluvíme o (ostrých) lokálních extrémech.

Funkce f na obr. 3.5 má ostrá lokální maxima v bodech $-b$ a b, ostré lokální minimum v bodě 0 a v krajních bodech $-c$, c svého definičního oboru. V těchto bodech má také (globální) minima, zatímco v bodech $-b$, b má (globální) maxima. Připomeňme, že reálná funkce f má v bodě $c \in \mathcal{D}(f)$ maximum (globální), jestliže $(\forall x \in \mathcal{D}(f)((f(x) \leq f(c))$, a stejně pro další extrémy. Globální maximum je také lokální maximum (podle zákonu expanze) ale ne naopak. Je-li $\mathcal{D}(f) = \langle a, b \rangle$, pak f má lokální maximum v a právě když je f v a nerostoucí. Podobně pro další typy extrémů a pro pravé hraniční body. Pro vnitřní body definičního oboru je situace odlišná:

Tvrzení 75 *Nechť f je funkce, která má derivaci na otevřeném intervalu a $a \in \mathcal{D}(f)$.*

1. *Má-li f v bodě a lokální extrém, je $f'(a) = 0$.*
2. *Jestliže $f'(a) = 0$ a f' je rostoucí (případně klesající) v a, pak f má v a ostré lokální minimum (případně maximum).*
3. *Jestliže $f'(a) = 0$ a $f''(a) > 0$ (případně $f''(a) < 0$), pak f má v a ostré lokální minimum (případně maximum).*

Důkaz: 1. Kdyby $f'(a) > 0$ byla by f v a rostoucí a tedy by neměla lokální extrém. 2. Podle věty o přírůstku funkce pro každé kladné infinitesimální α existují $\beta_1, \beta_2 \in (0, \alpha)$ pro které

$$\begin{aligned} f(a+\alpha) - f(a) &= \alpha f'(a+\beta_1) < 0, \\ f(a-\alpha) - f(a) &= -\alpha f'(a-\beta_2) < 0 \end{aligned}$$

3. Jestliže $f''(a) < 0$, pak $f'(a)$ je klesající v a podle tvrzení 72.3. □

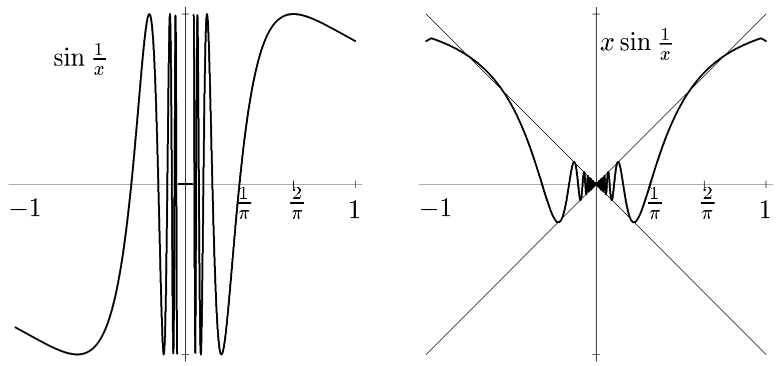
Lokální extrémy funkce tedy hledáme mezi krajními body jejího definičního oboru a mezi těmi body, kde má funkce nulovou derivaci. U každého z těchto bodů je však třeba ověřit, zda se vskutku jedná o lokální extrém a jakého je typu.

Také v tvrzení 75 jsou jednostranné implikace, které nelze obrátit. Funkce $f(x) = x^3$ má v nule nulovou derivci, nemá zde však lokální extrém, takže bod 1 nelze obrátit. Funkce $f(x) = x^4$ má v nule ostré lokální minimum, je zde však $f''(0) = 0$. To ukazuje, že bod 3 tvrzení 75 nelze obrátit. Protipříklad na obrácené tvrení k bodu 2 je složitější. Je odvozen z funkce $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, která má mnoho překvapivých vlastností a poskytuje protipříklady i na další tvrzení, která by nám mohla připadat intuitivně přijatelná.

Příklad 76 *Funkce*

$$\sin\tfrac{1}{x},\quad x\sin\tfrac{1}{x},\quad x^2\sin\tfrac{1}{x},\quad 2x^2\sin\tfrac{1}{x}+x,\quad x^2(\sin\tfrac{1}{x}+2)$$

Funkce $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ (obr. 3.6 vlevo) je definována všude kromě nuly. Protože neexistuje $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$, neexistuje ani limita $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$. V blízkosti nuly nabývá $\sin\frac{1}{x}$ libovolných hodnot v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Její derivace je $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$, takže $f(x)$ má lokální extrémy v bodech $\frac{2}{(2k+1)\pi}$. Její limita v nekonečnu je $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin\frac{1}{x} = 0$.



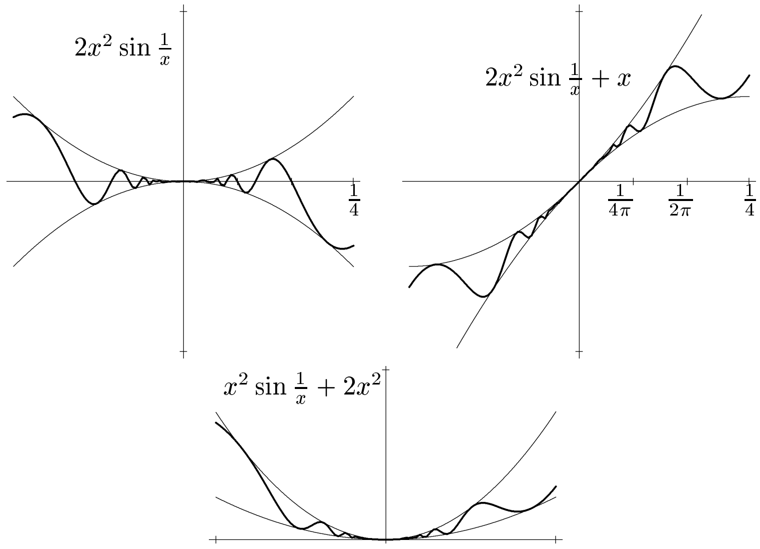
Obrázek 3.6: Sinus převrácené hodnoty

Funkce $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ (obr. 3.6 vpravo). Zde je $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ protože $|x\sin\frac{1}{x}| < |x|$. Funkce se pohybuje mezi přímkami $y = \pm x$. Definujeme-li $f(0) = 0$, je f spojitá. Její derivace je $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$. Funkce má extrémy v bodech x která splňují rovnici $\tan\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$. Tyto body jsou v blízkosti bodů $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ (pro velká k). Derivace v nule $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

Funkce $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ (obr. 3.7 nahoře vlevo). Položíme-li $f(0) = 0$, je f opět spojitá a pohybuje se mezi parabolami $y = \pm x^2$. Její derivace je $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$ a $f'(0) := \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} := \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$. Funkce f má tedy derivaci v každém bodě, její derivace ale není spojitá. To je další příklad, který ukazuje, že nelze obrátit tvrzení 72.2. Je sice $f'(0) \geq 0$, ale f v nule není ani neklesající ani nerostoucí.

Funkce $f(x) = 2x^2\sin\frac{1}{x} + x$, $f(0) = 0$ (obr. 3.7 nahoře vpravo). To je opět spojitá funkce, která má v každém bodě derivaci. Pohybuje se mezi parabolami $y = -2x^2 + x$ a $y = 2x^2 + x$. Pro $x \neq 0$ je $f'(x) = 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x} + 1$, $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x} + 1) = 1$. Tento příklad ukazuje, že není jednoduchý vztah mezi funkcemi rostoucími v bodě a funkcemi rostoucími na intervalu. Funkce f je totiž rostoucí v nule protože $f'(0) = 1 > 0$, není však rostoucí na žádném intervalu obsahujícím nulu. V každém takovém intervalu totiž existují body (dokonce intervaly) ve kterých $f'(x) < 0$.

Funkce $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x} + 2x^2$, $f(0) = 0$ (obr. 3.7 dole) se pohybuje mezi parabolami $y = x^2$ a $y = 3x^2$. Je $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + 4x$ pro $x \neq 0$, $f'(0) = 0$. Tato funkce má v nule lokální (i globální) minimum 0, její derivace však není v nule rostoucí. To ukazuje, že tvrzení 75.2 nelze obrátit.



Obrázek 3.7: Monotónní funkce a derivace

Rovinný útvar se nazývá konvexní, jestliže s každými dvěma svými body obsahuje i celou úsečku, která tyto dva body spojuje. Každý kruh, trojúhelník nebo obdélník jsou konvexní útvary, snadno ale najdeme čtyřúhelník, který konvexní není. O reálné funkci říkáme, že je konvexní v nějakém intervalu I, jestliže oblast roviny nad jejím grafem

$$\{[x,y]:\ x \in I,\ y \geq f(x)\}$$

je konvexní. Ekvivalentně, pro každé body $a < c$ z intervalu I, graf funkce mezi a, c je celý pod přímkou spojující body $[a, f(a)]$ a $[c, f(c)]$. To znamená, že pro každé tři body $a < b < c$ je sklon úsečky spojující body $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$ nejvýše roven sklonu úsečky spojující body $[b, f(b)]$, $[c, f(c)]$ (viz obr. 3.8). Mezi konvexitou funkce a její druhou derivací je podobný vztah jako mezi monotónií funkce a její první derivací.

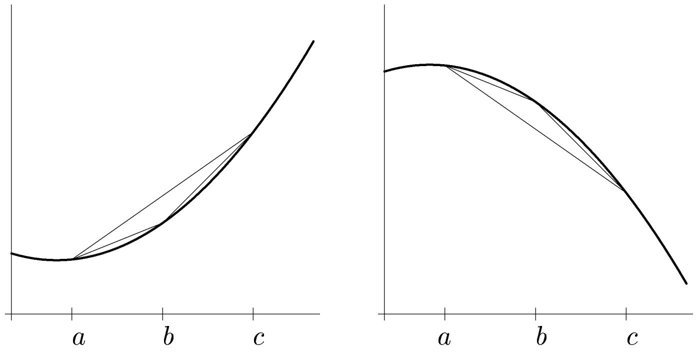
Definice 77 *Nechť f je funkce na intervalu.*
1. f je konvexní, jestliže

$$(\forall a, b, c \in \mathcal{D}(f)) \left(a < b < c \ \Rightarrow\ \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$$

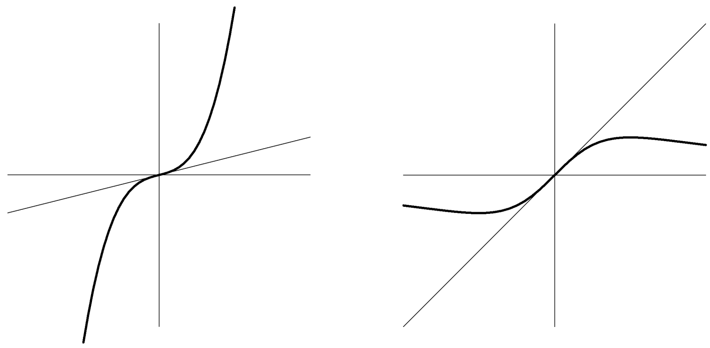
2. f je konkávní, jestliže

$$(\forall a, b, c \in \mathcal{D}(f)) \left(a < b < c \ \Rightarrow\ \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right).$$

Pomocí ostrých nerovností definujeme funkce ryze konvexní a ryze konkávní. Bod $a \in \mathcal{D}(f)$ je inflexní bod, jestliže existuje infinitesimální $\alpha > 0$ takové, že f je ryze konvexní v intervalu $(a - \alpha, a)$ a ryze konkávní v intervalu $(a, a + \alpha)$, nebo naopak že f je ryze konkávní v intervalu $(a - \alpha, a)$ a ryze konvexní v intervalu $(a, a + \alpha)$.



Obrázek 3.8: Konvexní a konkávní funkce



Obrázek 3.9: Inflexní body

Tvrzení 78 *Nechť f a f' mají derivace na otevřeném intervalu.*
1. Jestliže $(\forall x \in \mathcal{D}(f))(f''(x) > 0)$, pak f je ryze konvexní.
2. f je konvexní právě když $(\forall x \in \mathcal{D}(f))(f''(x) \geq 0)$.

Důkaz: 1. Nechť $a < b < c \in \mathcal{D}(f)$. Podle věty o přírůstku funkce existují $x \in (a, b)$, $y \in (b, c)$ a $z \in (x, y)$, pro které

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(y) - f'(x) = (y - x) \cdot f''(z) > 0,$$

takže f je ryze konvexní.
2. Jestliže $(\forall x \in I)(f''(x) \geq 0)$, pak

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = (y - x)f''(z) \geq 0,$$

takže f je konvexní. Nechť naopak f je konvexní a předpokládejme sporem, že existuje $b \in I$ pro které $f''(b) < 0$, takže f' je klesající v b. Jsou-li $a, c \in \mathbb{R}^*$ takové, že $b \approx a < b < c \approx b$, existují $x, y \in \mathbb{R}^*$ pro která $a < x < b < y < c$ a

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(y) - f'(x) < 0$$

protože f' je klesající v b. To je podle principu expanze ve sporu s konvexitou funkce f. □

Tvrzení 79

1. *Jestliže $f''(x) = 0$ a jestliže f'' je v x ryze monotónní, pak f má v x inflexní bod.*
2. *Jestliže $f''(x) = 0$ a $f'''(x) \neq 0$, pak f má v x inflexní bod.*

Důkaz: 1. Je-li f'' v x rostoucí, pak pro každé infinitesimální kladné $\alpha > 0$ je f'' záporná na $(a - \alpha, a)$, takže je tam konkávní a f'' je kladná na $(a, a + \alpha)$, takže je tam konvexní. Funkce f má tedy v x inflexní bod. Podobně je-li f'' v x klesající.
2. Jestliže $f'''(x) \neq 0$, je f'' v x ryze monotónní.

Funkce $f(x) = x^4$ je v 0 ryze konvexní, avšak $f''(x) = 12x^2$ není v nule monotónní. To ukazuje, že tvrzení 78.1 nelze obrátit.

O geometrických vlastnostech zkoumané funkce dávají dobrou představu její intervaly monotónie, intervaly konvexity a konkávnosti, lokální maxima a minima, inflexní body a limity v hraničních bodech definičního oboru. Další užitečnou představu o chování funkce dávají asymptoty. Říkáme že funkce $g(x)$ je asymptotou funkce $f(x)$ v $+\infty$, jestliže $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0$. Osa x je asymptotou hyperboly $f(x) = \frac{1}{x}$. Říkáme, že funkce f je sudá, je-li $f(-x) = f(x)$. Geometricky to znamená, že její graf je osově souměrný podle osy y. Říkáme, že funkce f je lichá, jestliže $f(-x) = -f(x)$. V tomto případě je graf funkce f středově souměrný podle počátku. Funkce může být souměrná také podle jiné osy nebo podle jiného bodu. Říkáme, že funkce f je periodická, existuje-li $T > 0$ (perioda), tak že $f(x + T) = f(x)$.

Funkce $f(x) = x^3 - x$ na obr. 1.5 má derivace $f'(x) = 3x^2 - 1$ a $f''(x) = 6x$. V bodech $x = \pm\sqrt{3}/3$ má nulové derivace. Protože $f''(-\sqrt{3}/3) < 0$, je zde ostré lokální maximum. Protože $f''(\sqrt{3}/3) > 0$, je zde ostré lokální minimum. Funkce má inflexní bod v nule, je konkávní v $(-\infty, 0)$ a konvexní v $(0, +\infty)$.

Funkce $f(x) = x^4 - 2x^2$ na obr. 1.5 má první derivaci $f'(x) = 4(x^3 - x)$ a druhou derivaci $f''(x) = 4(3x^2 - 1)$. Má ostré lokální maximum v nule, ostrá lokální minima v ± 1, inflexní body v $\pm\sqrt{3}/3$. Je konvexní v intervalech $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, a konkávní v intervalu $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

Funkce $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + \frac{1}{x})$ na obr. 1.6 má derivaci $f'(x) = \frac{1}{4}(2x - x^{-2})$, druhou derivaci $f''(x) = \frac{1}{2}(1 + x^{-3})$. Má ostré lokální minimum v bodě $1/\sqrt[3]{2}$, je klesající v intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, 1/\sqrt[3]{2})$ a rostoucí v intervalu $(1/\sqrt[3]{2}, +\infty)$. Má inflexní bod -1, je konvexní v intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, +\infty)$, konkávní v intervalu $(-1, 0)$. Pro $x \to \pm\infty$ se $f(x)$ asymptoticky přibližuje k parabole $y = x^2$.

Funkce $f(x) = 4x/(x^2 + 1)$ na obr. 1.6 je lichá. Její derivace je $f'(x) = 4(1 - x^2)/(x^2 + 1)^2$, její druhá derivace je $f''(x) = 8x(x^2 - 3)/(x^2 + 1)^3$. Funkce je tedy rostoucí v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, klesající v intervalech $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$, konkávní v intervalech $(-\infty, -\sqrt{3}\rangle$ a $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$, konvexní v intervalech $\langle -\sqrt{3}, 0\rangle$ a $\langle \sqrt{3}, +\infty)$.

Ostré lokální maximum má v bodě 1, ostré lokální minimum v bodě -1. Inflexní body jsou $\pm\sqrt{3}$. Protože $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ osa x je její asymptotou v $\pm\infty$.

Cvičení: Určete průběh funkcí

1. $f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x$
2. $f(x) = x^5 - x^3$
3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$
5. $f(x) = \dfrac{2x^3-1}{3x^2+1}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+x}$
7. $f(x) = x + \dfrac{|x|}{x}$
8. $f(x) = \dfrac{1+|x|}{|1-x|}$
9. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
10. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
11. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
12. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
13. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
14. $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$
15. $f(x) = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$
16. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
17. $f(x) = \ln(\ln x)$
18. $f(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$
19. $f(x) = e^{-x^2}$
20. $f(x) = x^2e^{-x}$
21. $f(x) = e^{-x}\sin x$
22. $f(x) = \ln(e^x+1)$
23. $f(x) = \ln(e^x+1)$
24. $f(x) = \ln|\sin x|$
25. $f(x) = \ln(1-\cos x)$
26. $f(x) = \ln(x^2+1)$
27. $f(x) = (1-x^2)e^{-x^2}$
28. $f(x) = lnx - \ln(1-x)$
29. $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (1-x)^{\frac{2}{3}}$
30. $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$

3.5 Diferencovatelné funkce

V krajních bodech definičního oboru funkce často nelze počítat jednostranné derivace pomocí vzorců. Můžeme je zde počítat buď přímo z definice nebo jako limity derivace.

Tvrzení 80

$$f'^{+}(a) := \lim_{x\to a^+} f'(x), \quad f'^{-}(b) := \lim_{x\to b^-} f'(x)$$

Důkaz: Jestliže existuje $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$, pak f' je definována na nějakém otevřeném intervalu (a, c_1), a f je na tomto intervalu spojitá. Je-li $a < c < c_1$, je f spojitá na intervalu $(a, c\rangle$. Pro každá infinitesimální $0 < \alpha < \beta$ existuje podle věty o přírůstku funkce infinitesimální $\gamma \in (\alpha, \beta)$, tak že platí $f(a+\beta) - f(a+\alpha) =$

$(\beta - \alpha)f'(a + \gamma) \approx 0$. Podle Bolzano-Cauchyovy věty je f konvergentní na a^+. Definujeme-li $f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$, je f spojitá na $\langle a, c\rangle$. Podle věty o přírůstku funkce pro každé kladné infinitesimální α existuje infinitesimální $\beta \in (0, \alpha)$ pro které

$$\frac{f(a+\alpha) - f(a)}{\alpha} = f'(\beta) \approx \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

takže $f'^+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$. □

Například pro funkci $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(0) = 1$ lze počítat derivaci dvěma způsoby:

$$\begin{aligned}
f'(0) &:= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} := \frac{\sin x - x}{x^2} := \frac{\cos x - 1}{2x} := \frac{-\sin x}{2} = 0 \\
f'(0) &:= \lim_{x\to 0} f'(x) := \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \\
&:= \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x} = 0
\end{aligned}$$

Existuje-li tedy $\lim_{x\to a} f'(x)$, existuje také $f'(a)$ a rovná se této limitě, takže funkce f' je v a spojitá. Naopak však z existence derivace $f'(a)$ neplyne existence limity $\lim_{x\to a} f'(x)$. Například funkce $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ z příkladu 76 má derivaci v každém bodě, tato derivace však není spojitá v nule. Spojitost derivace je nutný předpoklad mnoha vět infinitesimálního počtu.

Definice 81 *Funkce f je diferencovatelná v bodě x, jestliže x je vnitřní bod $\mathcal{D}(f')$ a f' je spojitá v x. Funkce f na intervalu je diferencovatelná, jestliže f' je spojitá na $\mathcal{D}(f)$. Přitom v krajních bodech definujeme f' jako jednostrannou derivaci.*

Například funkce $f(x) = x^2 \ln x$, $f(0) = 0$ je diferencovatelná na intervalu $\langle 0, +\infty)$. Její derivace na tomto intervalu je $f'(x) = 2x\ln x + x$, $f(0) = 0$. Funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ není diferencovatelná na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, protože její derivace v ± 1 jsou nekonečné. Je však diferencovatelná na intervalu $(-1, 1)$. Funkce $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ není diferencovatelná přesto že má v každém bodě derivaci. Naopak je diferencovatelná každá racionální lomená funkce, exponenciální i goniometrické funkce. Součet, rozdíl, součin, podíl a složení diferencovatelných funkcí je diferencovatelná funkce. To plyne ze vzorců, které pro tyto operace máme. Je-li však f diferencovatelná, její inverzní funkce být diferencovatelná být nemusí. To je případ $\sqrt[3]{x}$, která není diferencovatelná v nule, ale je inverzní k diferencovatelné funkci x^3. Pro diferencovatelné funkce máme lokální verzi věty o derivaci inverzní funkce.

Tvrzení 82 *Nechť funkce g je diferencovatelná v bodě b a $g'(b) \neq 0$. Pak existují otevřené intervaly $I \ni g(b) = a$ a $J \ni b$ takové, že*

$$(\forall x \in I)(\exists! y = f(x) \in J)(g(y) = x)$$

Funkce $f : I \to J$ je diferencovatelná a $f'(x) = \dfrac{1}{g'(f(x))}$

Důkaz: Existuje otevřený interval $J \ni b$, na kterém je g' nenulová funkce, takže g je zde ryze monotónní. Podle věty 45 je $I = g(J)$ také otevřený interval a podle tvrzení 63 má inverzní funkce f na I derivaci $f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$. Protože f i g' jsou spojité, je spojitá i f'. □

V tvrzení 82 je podstatný předpoklad spojitosti derivace v bodě b. Funkce $f(x) = 2x^2 \sin \frac{1}{x} + x$ z příkladu 76 má v nulovém bodě derivaci $f'(x) = 1$, na žádném intervalu obsahujícím nulu však f není ryze monotónní. Funkce f totiž není v nule diferencovatelná.

Diferencovatelnost uvažujeme i ve vyšších derivacích. Derivaci funkce f řádu k značíme $f^{(k)}$, abychom ji odlišili od k-té mocniny. Přitom $f^{(0)}(x) = f(x)$ (nultá derivace je funkce sama) a $f^{(1)}(x) = f'(x)$.

Definice 83 *Funkce f na je k-diferencovatelná (diferencovatelná do k-tého řádu) v bodě x jestliže x je vnitřní bod $\mathcal{D}(f^{(k)})$ a $f^{(k)}$ je spojitá v bodě x. Funkce f na intervalu je k-diferencovatelná, jestliže je diferencovatelná a funkce f' (se stejným definičním oborem) je $(k-1)$-diferencovatelná.*

Tvrzení 84 *Nechť funkce f je 2-diferencovatelná v bodě x. Pak pro každá nenulová infinitesimální α, β platí*

$$\frac{f(x+\alpha+\beta) - f(x+\alpha) - f(x+\beta) + f(x)}{\alpha\beta} \approx f''(x)$$

Speciálně pro $\beta = \alpha$ je

$$\frac{f(x+2\alpha) - 2f(x+\alpha) + f(x)}{\alpha^2} \approx f''(x)$$

Důkaz: Nechť I je otevřený interval, pro který $x \in I \subseteq \mathcal{D}(f'')$ a a, b jsou taková, že $x+a, x+b, x+a+b \in I$. Uvažujme funkci $g(y) = f(y+b) - f(y)$. Pak existují a_1, b_1 tak, že platí

$$\begin{aligned}
& f(x+a+b) - f(x+a) - f(x+b) + f(x) \\
= \quad & g(x+a) - g(x) = ag'(x+a_1) = a(f'(x+a_1+b) - f'(x+a_1)) \\
= \quad & abf''(x+a_1+b_1)
\end{aligned}$$

Podle principu expanze pro infinitesimální α, β existují infinitesimální α_1, β_1 tak že platí

$$\frac{f(x+\alpha+\beta) - f(x+\alpha) - f(x+\beta) + f(x)}{\alpha\beta} = f''(x+\alpha_1+\beta_1) \approx f''(x)$$

Podobně pro 3-diferencovatelné funkce je

$$\frac{f(x+3\alpha) - 3f(x+2\alpha) + 3f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha^3} \approx f'''(x)$$

a pro k-diferencovatelné funkce je

$$\frac{1}{\alpha^k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+j\alpha) \approx f^{(k)}(x)$$

3.6 Taylorův mnohočlen

Lineární funkce, která v okolí bodu c nejlépe aproximuje diferencovatelnou funkci f, je její tečna s rovnicí $P_1(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$. Pro infinitesimální $x - c = \alpha$ je totiž odchylka $f(x) - P_1(x)$ nekonečněkrát menší než $x - c$, tj.

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - P_1(x)}{x - c} := \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) = 0$$

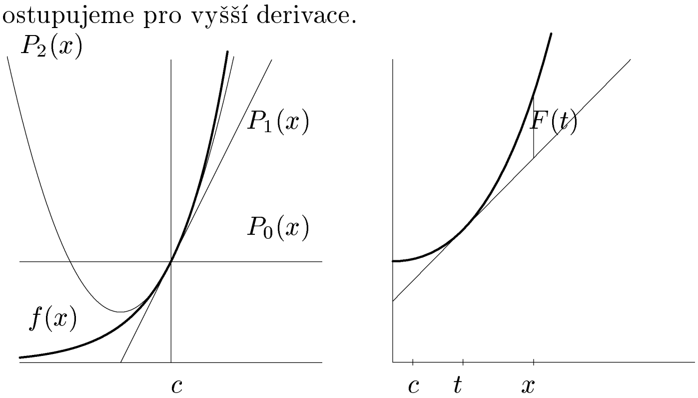
Funkce $P_1(x)$, $f(x)$ mají v bodě c stejnou hodnotu i derivaci, $P_1(c) = f(c)$, $P_1'(c) = f'(c)$. Potřebujeme-li přesnější aproximaci, hledáme kvadratickou funkci $P_2(x) = P_1(x) + c_2(x - c)^2$, která by měla v bodě c stejnou druhou derivaci jako f. Protože $P_2''(x) = 2c_2$, vychází z této podmínky funkce (obr. 3.10 vlevo)

$$P_2(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2}(x - c)^2.$$

Pro infinitesimální $x - c$ je nyní odchylka $f(x) - P_2(x)$ nekonečněkrát menší než $(x - c)^2$ (což je nekonečněkrát menší než $x - c$). Podle l'Hospitalova pravidla je totiž

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x - c)^2} &:= \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)}{(x - c)^2} - \frac{f''(c)}{2} \\ &:= \lim_{x\to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{2(x - c)} - \frac{f''(c)}{2} = 0 \end{aligned}$$

Podobně postupujeme pro vyšší derivace.



Obrázek 3.10: Taylorův mnohočlen

Definice 85 *Taylorův mnohočlen funkce f v bodě c stupně n je*

$$P_n(x) = f(c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k$$

Speciálně $P_0(x) = f(c)$ je konstantní funkce.

Tvrzení 86 *Nechť funkce f je n-diferencovatelná v bodě c. Mnohočlen $P(x)$ stupně n je jejím Taylorovým mnohočlenem právě když platí jedna ze dvou ekvivalentních podmínek*
1. $P^{(k)}(c) = f^{(k)}(c)$ *pro* $k = 0, 1, \ldots, n$
2. $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-c)^n} = 0$

Důkaz: 1. Mnohočlen P můžeme psát ve tvaru

$$P(x) = c_0 + c_1(x-c) + \cdots + c_n(x-c)^n$$

Indukcí lze ukázat, že jeho k-tá derivace je

$$P^{(k)}(x) = k!c_k + \frac{(k+1)!}{1}c_{k+1}(x-c) + \frac{(k+2)!}{2!}c_{k+2}(x-c)^2 + \cdots$$

Odtud $f^{(k)}(c) = P^{(k)}(c) = k!c_k$ právě když $P = P_n$.
2. Z L'Hospitalova pravidla plyne

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-c)^n} &:= \lim_{x\to c}\frac{f'(x)-P_n'(x)}{n(x-c)^{n-1}} := \cdots \\ &:= \lim_{x\to c}\frac{f^{(n)}(x)-P_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f^{(n)}(c)-P_n^{(n)}(c)}{n!} = 0\end{aligned}$$

Naopak předpokládejme, že pro $P(x)$ platí $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-P(x)}{(x-c)^n} = 0$. Pak pro každé $0 \leq k \leq n$ platí $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-P(x)}{(x-c)^k} = 0$. Z L'Hospitalova pravidla plyne

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-P(x)}{(x-c)^k} = \frac{f^{(k)}(c)-P^{(k)}(c)}{k!}$$

takže $f^{(k)}(c) = P^{(k)}(c)$. □

Při aproximaci funkce jejími Taylorovými mnohočleny nás zajímá jak přesná tato aproximace je. Jako Taylorův zbytek stupně n označujeme funkci

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$$

Větu o přírůstku funkce lze chápat jako odhad jejího Taylorova zbytku nultého stupně. Říká, že v intervalu $\langle c, x\rangle$ existuje vnitřní bod y, pro který $f(x) = f(c) + (x-c)f'(y)$, tj. $R_1(x) = (x-c)f'(y)$. Tento princip se zobecňuje i na vyšší derivace. Podobně jako ve větě 67 srovnáváme funkci f s nějakou testovací funkcí g, která k f nemusí mít žádný vztah. Věta říká, že v intervalu $\langle c, x\rangle$ existuje vnitřní bod y, pro který

$$R_1(x) = f(x) - f(c) = \frac{g(x)-g(c)}{g'(y)}f'(y)$$

Při různých volbách funkce g dostáváme lepší či horší odhady. Tento odhad zbytku $R_1(x)$ zobecňuje následující věta

Věta 87 (Taylorova věta) *Nechť $I = \langle c, x\rangle$ nebo $I = \langle x, c\rangle$ je kompaktní interval, nechť f je $(n+1)$-diferencovatelná a nechť g je funkce spojitá na I, která má v každém vnitřním bodě I derivaci různou od nuly. Nechť $P_n(x)$ je Taylorův mnohočlen stupně n v c a $R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$ Taylorův zbytek. Potom existuje vnitřní bod y intervalu I pro který*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-y)^n}{n!} \cdot \frac{g(x)-g(c)}{g'(y)} f^{(n+1)}(y)$$

Speciálně Lagrangeův tvar zbytku pro $g(t) = (x-t)^{n+1}$ je

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(y).$$

Cauchyův tvar zbytku pro $g(t) = t$ je

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-y)^n (x-c)}{n!} f^{(n+1)}(y).$$

Důkaz. Pro $t \in I$ uvažujme Taylorův mnohočlen f rozvinutý v bodě t (obr. 3.10 vpravo). Záporně vzatý zbytek tohoto mnohočlenu v bodě x je

$$F(t) = -f(x) + f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Platí $F(x) = 0$, $F(c) = -R_{n+1}(x)$, F je spojitá a má v každém vnitřním bodě I derivaci

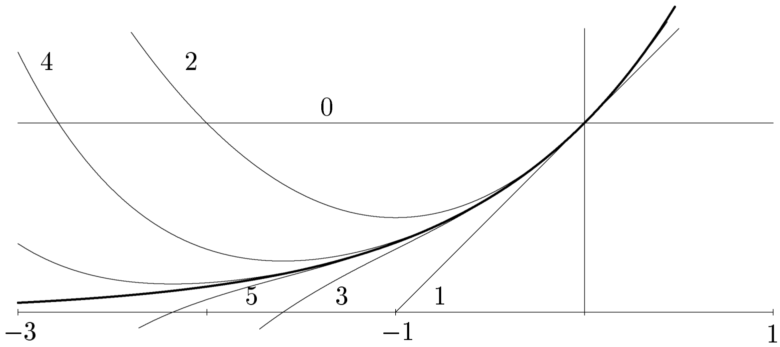
$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(t) - f'(t) + \frac{f''(t)}{1}(x-t) \\ &- \frac{f^{(2)}(t)}{1}(x-t) + \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots \\ &- \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \end{aligned}$$

Podle Cauchyovy věty o střední hodnotě, existuje vnitřní bod y intervalu I, pro který

$$\frac{R_{n+1}(x)}{g(x)-g(c)} = \frac{F(x)-F(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{F'(y)}{g'(y)} = \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot \frac{(x-y)^n}{g'(y)}$$

To je již požadovaný výsledek. □

Taylorova věta umožňuje numerický výpočet funkcí. Víme-li, že $R_{n+1}(x) < 10^{-k}$, určuje $P_n(x)$ hodnotu $f(x)$ na k desetinných míst. Jestliže pro pevné x je $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$, je $f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$. Při odhadech Taylorova zbytku je třeba mít na paměti, že y v $R_n(x)$ závisí na n.



Obrázek 3.11: Taylorův rozvoj exponenciály

3.6.1 Exponenciála

Derivace exponenciály je opět exponenciála, takže také k-tá derivace exponenciály v nule je jednotková. Taylorův mnohočlen exponenciály v nule (stupně n) je tedy

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Lagrangeův tvar zbytku je

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{y_n} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max(e^x, 1)$$

Číslo y, jehož existenci zaručuje Taylorova věta, závisí na n, proto ho v Taylorově zbytku píšeme s indexem y_n. Je-li $0 < y_n < x$, je $e^{y_n} < e^x$. Je-li $x < y_n < 0$ je $e^{y_n} < 1$ a tím dostáváme odhad, který již závisí pouze na x a n. Taylorovy mnohočleny exponenciály jsou na obr. 3.11. Čísla u grafů znamenají jejich stupně. Pro pevné x je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$, takže $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$. To zapisujeme nekonečnou řadou

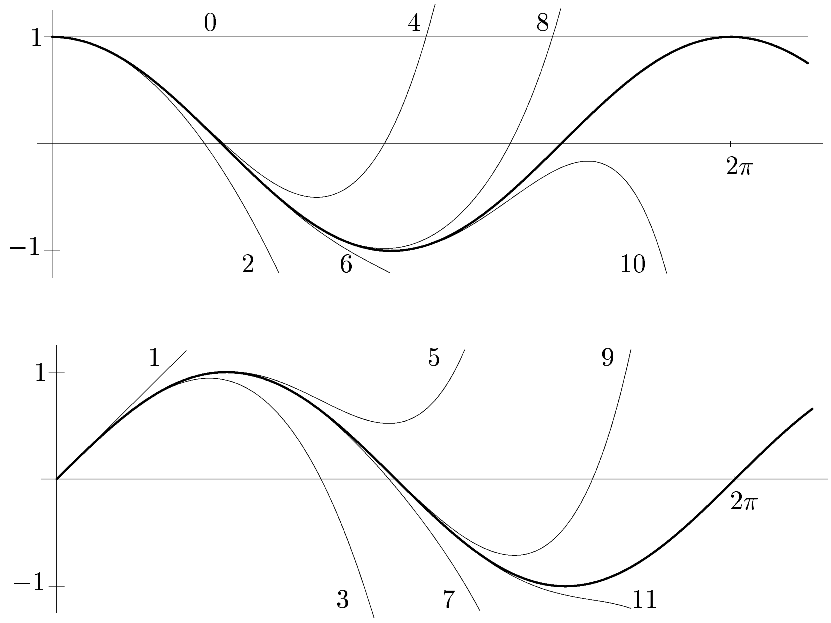
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Speciálně pro $x = 1$ je $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots$ jak jsme již ukázali v příkladě 19.

3.6.2 Goniometrické funkce

Pro $f(x) = \cos x$ je $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$, takže $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$. Pro $g(x) = \sin x$ je podobně $g^{(2k)}(0) = 0$, $g^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ Použijeme-li Lagrangeův tvar zbytku, v obou případech dostáváme

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(y_n)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$



Obrázek 3.12: Taylorův rozvoj sinu a kosinu

protože derivace $|f^{(n+1)}(y_n)|$ je vždy nejvýše 1. Pro každé x je tedy opět $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$, takže pro sinus a cosinus dostáváme nekonečné řady (obr. 3.12)

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\end{aligned}$$

3.6.3 Logaritmus

Funkci $f(x) = \ln x$ rozvineme v bodě $c = 1$. Je

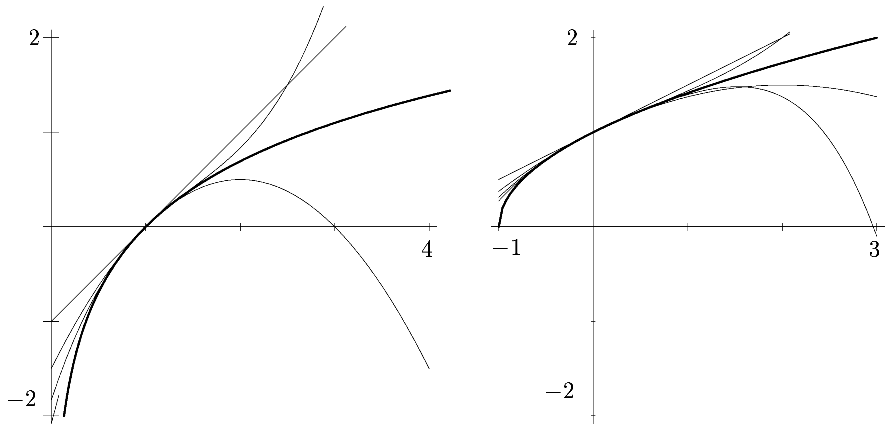
$$f'(x) = x^{-1},\ \ f''(x) = -x^{-2}, \ldots\ f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1}$$

Pro $1 < x$ použijeme Lagrangeův tvar zbytku. Protože $1 < y_n < x$, je

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot n! \cdot y_n^{-n-1} \leq \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

Pro $1 < x \leq 2$ výraz na pravé straně konverguje k nule. Pro $0 < x < 1$ použijeme Cauchyův tvar zbytku. Protože $x < y_n < 1$, je

$$|R_{n+1}(x)| = |(x-y_n)^n (x-1) y_n^{-n-1}| = \left(1 - \frac{x}{y_n}\right)^n \frac{1-x}{y_n} \leq \frac{(1-x)^{n+1}}{x}$$



Obrázek 3.13: Taylorův rozvoj logaritmu a odmocniny

Pro každé $x \in (0, 2\rangle$ je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$, takže

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \cdots$$

Taylorův rozvoj nyní nekonverguje na celém definičním oboru, ale pouze na intervalu $(0, 2\rangle$ (obr. 3.13 vlevo). Speciálně pro $x = 2$ dostáváme součet alternující harmonické řady

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Vzorec pro výpočet logaritmu v celém definičním oboru lze získat, použijeme-li získaný rozvoj na $x = 1 + y$ a $x = 1 - y$ a obě řady sečteme

$$\begin{aligned} \ln(1+y) &= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots \\ -\ln(1-y) &= y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \cdots \\ \ln\frac{1+y}{1-y} &= 2\left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \cdots\right) \end{aligned}$$

Vzorec platí pro $|y| < 1$. Položme $x = \frac{1+y}{1-y}$, takže $x \in (0, \infty)$ a $y = \frac{x-1}{x+1}$. Pak

$$\ln x = \frac{2}{1} \cdot \frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots$$

Vzorec platí pro každé $x > 0$.

3.6.4 Obecná mocnina

Obecnou mocninu $f(x) = (1+x)^a$ rozvineme v bodě $c = 0$. Její derivace jsou

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1}, \ldots \; f^{(n)}(x) = a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n}$$

takže $f^{(n)}(0) = a(a-1)\cdots(a-n+1)$ a Taylorův mnohočlen je

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n \\ P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k \end{aligned}$$

kde

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$$

jsou zobecněné binomické koeficienty. Cauchyův tvar Taylorova zbytku je

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{(x-y_n)^n x}{n!} \cdot a(a-1)\cdots(a-n)(1+y_n)^{a-n-1} \\ &= (1+y_n)^{a-1} x \left(\frac{x-y_n}{1+y_n}\right)^n \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!} \end{aligned}$$

Rozeznáváme dva případy

$$\begin{aligned} -1 < x < y_n < 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 < 1 + y_n < 1, \;\; 0 < \frac{y_n - x}{1 + y_n} < -x \\ 0 < y_n < x < 1 \quad &\Rightarrow \quad 1 < 1 + y_n < 1 + x, \;\; 0 < \frac{x - y_n}{1 + y_n} < x \end{aligned}$$

V obou případech je

$$|R_{n+1}(x)| \leq \max\{1, (1+x)^{a-1}\} \cdot |x|^{n+1} \cdot \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}$$

Pro posloupnost $a_n = |x|^{n+1} a(a-1)\cdots(a-n)/n!$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} := \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{a-n}{n} = -|x|.$$

Je-li $|x| < 1$, je $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$, takže Taylorův rozvoj konverguje

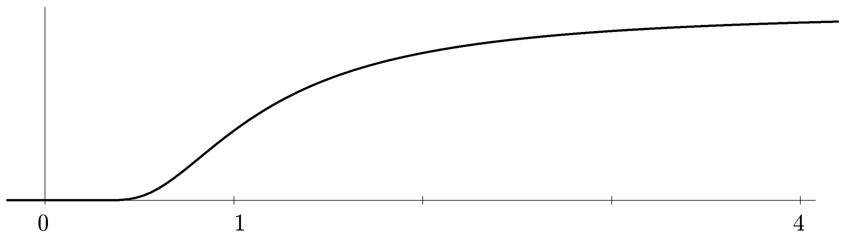
$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^k, \quad \text{pro} \quad |x| < 1$$

To je zobecnění binomické formule. Je-li $a > 0$ přirozené, je $\binom{a}{k} = 0$ pro $k > a$, takže součet je konečný. Speciální případy tohoto vzorce pro $a = -1$, $a = -2$, $a = -2$, $a = \frac{1}{2}$ a $a = -\frac{1}{2}$ jsou

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad \text{(geometrická řada)} \\ \frac{1}{(1+x)^2} &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}}{2!}\cdot x^2+\frac{\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{-5}{2}}{3!}\cdot x^3+\cdots\\
&= 1-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot x^4-\cdots\\
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{1}{2}\cdot x+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}}{2!}\cdot x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}}{3!}\cdot x^3+\cdots\\
&= 1+\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot x^2+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot x^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot x^4+\cdots
\end{aligned}$$

Taylorův rozvoj funkce $\sqrt{1+x}$ je na obr. 3.13 vpravo.



Obrázek 3.14: Funkce e^{-1/x^2}

Taylorův rozvoj k dané funkci nemusí vždy konvergovat. To ukazuje následující příklad (obr. 3.14).

Příklad 88 *Funkce $f(x)=e^{-1/x^2}$ pro $x\neq 0$, $f(0)=0$ má v nule všechny derivace nulové, ale nelze ji v okolí nuly rozvinout do mocninné řady.*

Důkaz: Funkce f je zřejmě spojitá, její derivace v nule je

$$f'(0) \quad := \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x} := \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{y^2}} := \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{2ye^{y^2}}=0$$

kde jsme použili substituci $x=\frac{1}{y}$ a L'Hospitalovo pravidlo. Pro $x\neq 0$ je $f'(x)=2x^{-3}e^{-1/x^2}$, takže f je diferencovatelná. Dále postupujeme indukcí. Ukážeme, že pro každé $n>0$ je

$$f^{(n)}(0)=0,\ \ f^{(n)}(x)=P_n(\tfrac{1}{x})e^{-1/x^2},\ \ x\neq 0$$

pro nějaký mnohočlen P_n. Pro $n=1$ (i $n=0$) jsme to již ukázali. Předpokládejme, že vzorec platí pro n a dokažme ho pro $n+1$. Je

$$f^{(n+1)}(0) := \lim_{x\to 0}\tfrac{1}{x}P_n(\tfrac{1}{x})e^{-1/x^2} := \lim_{y\to\infty}\frac{yP_n(y)}{e^{y^2}}=0$$

$$f^{(n+1)}(x)=\left(-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-1/x^2}=P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$$

pro nějaký mnohočlen P_{n+1}. Funkce f má v nule tedy všechny derivace nulové, a její Taylorova řada je nulová funkce. Pro každé $x \neq 0$ je však $f(x) \neq 0$, takže f se nerovná své Taylorově řadě na žádném intervalu obsahujícím nulu jako vnitřní bod.

Cvičení Určete Taylorovy mnohočleny funkcí v bodě 0

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
3. $f(x) = \cosh x$
4. $f(x) = \sinh x$

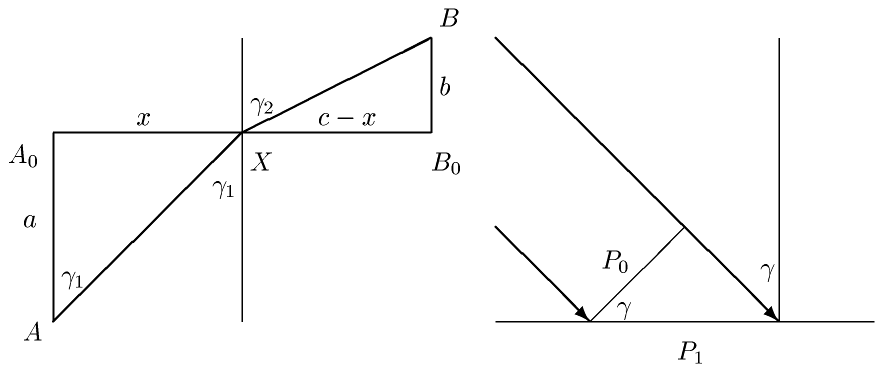
3.7 Optimalizační úlohy

Optimalizační úlohy hledají v dané množině možných řešení nějakého problému nejlepší možné. Často vedou na úlohu nalezení maxima nebo minima reálné funkce.

3.7.1 Lom světla

Rychlost světla je různá v různých prostředích, například ve vzduchu a ve vodě. Zákon lomu světla na rozhraní dvou prostředí lze odvodit z principu, že světlo se šíří mezi dvěma body po takové dráze, že čas potřebný k jejímu proběhnutí je nejmenší. Tento problém má také interpretaci tělocvičnou. Máme doběhnout k řece a přeplavat ji, tak abychom se dostali do určitého místa na protějším břehu v nejkratším možném čase (obr. 3.15 vlevo). Označme a, b vzdálenost bodů A, B od rozhraní dvou prostředí a c vzdálenost mezi body A_0 a B_0 na rozhraní, které jsou bodům A, B nejblíže. Nechť X je bod na rozhraní a x jeho vzdálenost od A_0. Je-li rychlost světla pod rozhraním c_1, a rychlost světla nad rozhraním c_2, je čas potřebný k proběhnutí dráhy AXB roven

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{c_2}$$



Obrázek 3.15: Lom světla a intenzita osvětlení

Derivace této funkce je

$$f'(x) = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{c_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = \frac{\sin\gamma_1}{c_1} - \frac{\sin\gamma_2}{c_2}$$

kde $\gamma_1 = \angle A_0AX$, $\gamma_2 = \angle B_0BX$ jsou úhly drah ke kolmicím k rozhraní. Podmínka lokálního extrému je tedy

$$\frac{\sin\gamma_1}{c_1} = \frac{\sin\gamma_2}{c_2}$$

Druhá derivace

$$f''(x) = \frac{1}{c_1}\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} + \frac{1}{c_2}\frac{b^2}{\sqrt{(b^2+(c-x)^2)^3}} > 0$$

je kladná, jedná se o lokální minimum. Je-li zde $c_1 = c_2$, je $\gamma_1 = \gamma_2$, světlo se neláme. Je-li $\frac{c_2}{c_1}\sin\gamma_1 > 1$, dostáváme $\sin\gamma_2 > 1$. Znamená to, že při úhlu dopadu $\gamma_1 > \arcsin\frac{c_1}{c_2}$ světlo již do druhého prostředí neprochází.

3.7.2 Osvětlování

Intenzita osvětlení bodovým zdrojem závisí na vzdálenosti od tohoto zdroje a na úhlu pod jakým paprsky dopadají. Uvažujeme-li kulový povrch se středem ve zdroji světla, pak na každý takový povrch dopadne stejné celkové množství světla. Povrch kulové plochy je úměrný druhé mocnině poloměru, to znamená, že intenzita osvětlení na ploše P_0, která je kolmá k paprskům, je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti od zdroje. Je-li osvětlovaná rovina nakloněna o úhel γ, osvětluje stejný kužel paprsků plochu $P_1 = P_0/\cos\gamma$ (obr.3.15 vpravo). Osvětlení je tedy úměrné $x^{-2}\cos\gamma$, kde x je vzdálenost od zdroje, a γ je úhel dopadu paprsků (odchylka od kolmice).

Uvažujme úlohu optimálního rozmístění dvou světelných zdrojů. Jak mají být od sebe vzdáleny, aby osvětlení bylo co nejrovnoměrnější? Předpokládejme, že jsou oba zdroje v jednotkové výšce a vzdálenost mezi nimi je $2a$. Zavedeme souřadnou soustavu tak, že jsou umístěny v bodech $[-a,1]$, $[a,1]$. Bod o souřadnicích $[x,0]$ je od prvního zdroje vzdálen $\sqrt{(x+a)^2+1}$ a paprsky v něm dopadají pod úhlem $\cos\gamma = 1/\sqrt{(x+a)^2+1}$. Podobně pro druhý zdroj, takže celkové osvětlení v bodě $[x,0]$ je

$$f(x) = ((x+a)^2+1)^{-\frac{3}{2}} + ((x-a)^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

Derivace této funkce jsou

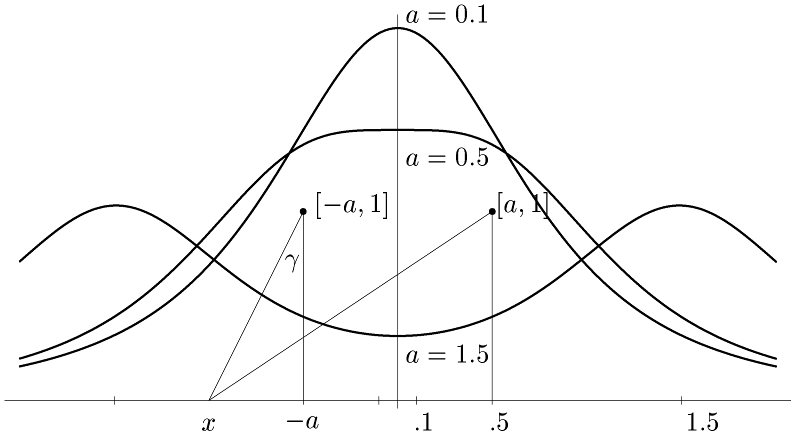
$$f'(x) = -3((x+a)^2+1)^{-\frac{5}{2}}(x+a) - 3((x-a)^2+1)^{-\frac{5}{2}}(x-a),$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 15((x+a)^2+1)^{-\frac{7}{2}}(x+a)^2 - 3((x+a)^2+1)^{-\frac{5}{2}} \\ &+ 15((x-a)^2+1)^{-\frac{7}{2}}(x-a)^2 - 3((x-a)^2+1)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

V bodě 0 je vždy $f'(0) = 0$. Jedná-li se o lokální minimum nebo maximum, zjistíme z druhé derivace

$$f''(0) = 30(a^2+1)^{-\frac{7}{2}}a^2 - 6(a^2+1)^{-\frac{5}{2}} = 6(a^2+1)^{-\frac{7}{2}}(4a^2-1)$$

Pro $a < \frac{1}{2}$ je tedy $f''(0) < 0$, takže f má v 0 lokální maximum, při $a > \frac{1}{2}$ je $f''(0) > 0$, takže f má v 0 lokální minimum. Optimální osvětlení je při $a = \frac{1}{2}$, kdy zdroje jsou od sebe stejně daleko jako od země.



Obrázek 3.16: Osvětlení ze dvou zdrojů

Další úloha v této problematice je, jak vysoko máme zavěsit lampu nad střed kruhového stolu, aby na okraji stolu bylo největší osvětlení. Je-li poloměr stolu jednotkový, a výška lampy nad stolem x, je vzdálenost lampy od okraje stolu $\sqrt{x^2+1}$ a kosinus úhlu jejich dopadu $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Osvětlení okraje stolu je tedy $f(x) = x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$. První derivace je

$$f'(x) = (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} + x(-\tfrac{3}{2})2x(x^2+1)^{-\frac{5}{2}} = (x^2+1)^{-\frac{5}{2}}(1-2x^2)$$

Pro $x < \sqrt{2}/2$ je tedy $f'(x) > 0$, pro $x > \sqrt{2}/2$ je $f'(x) < 0$. Optimální osvětlení je tedy při vzdálenosti $\sqrt{2}/2$ nad středem stolu.

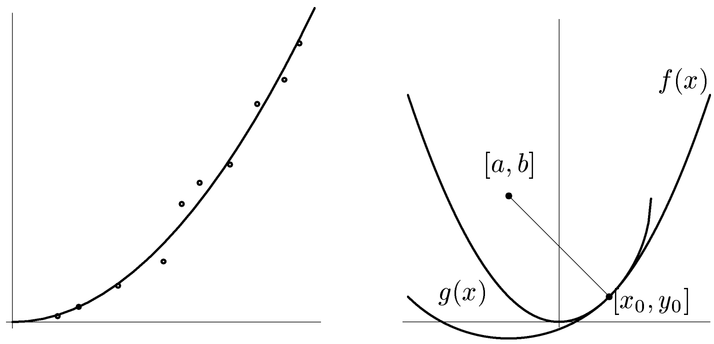
3.7.3 Lineární regrese

Lineární regrese je úloha najít funkci určitého tvaru s neznámými parametry, která nejlépe vystihuje naměřená data (obr. 3.17 vlevo). Předpokládejme například, že uvažovaná závislost je tvaru $y = af(x)$, kde $f(x)$ je známá funkce a a je neznámý parametr. Protože y závisí na a lineárně, mluvíme o lineární regresi. Závislost y na x lineární být nemusí. Naměřená data nechť jsou $[x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]$. Hledáme takový parametr a, při kterém se naměřené a vypočtené hodnoty co nejméně odlišují. Tato odchylka se konvenčně měří součtem čtverců jednotlivých odchylek

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} (af(x_i) - y_i)^2$$

Proměnná je zde ovšem a. Naměřená data x_i a y_i jsou konstanty. Derivace funkce $S(a)$ jsou

$$S'(a) = \sum_{k=1}^{n} 2(af(x_i) - y_i)f(x_i), \quad S''(x) = \sum_{k=1}^{n} 2f^2(x_i) \geq 0$$



Obrázek 3.17: Lineární regrese a oskulační kružnice

Rovnice $S'(a) = 0$ má jediné řešení

$$a = \sum_{k=1}^{n} f(x_i)y_i \Big/ \sum_{k=1}^{n} f^2(x_i)$$

Je- li $S''(a) > 0$, jedná se o lokální minimum. Například pro kvadratickou závislost tvaru $y = ax^2$ dostáváme $a = \sum_{k=1}^{n} x_i^2 y_i \Big/ \sum_{k=1}^{n} x_i^4$.

3.7.4 Oskulační kružnice

Taylorův mnohočlen druhého stupně je parabola, která se nejtěsněji přimyká ke grafu funkce. Podobně oskulační kružnice je taková kružnice, která se v daném bodě nejtěsněji přimyká ke grafu funkce. Převrácená hodnota poloměru oskulační kružnice se nazývá křivost grafu funkce. Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 druhou derivaci a hledejme funkci $g(x)$, jejíž graf je část kružnice a přitom $g(x_0) = f(x_0)$, $g'(x_0) = f'(x_0)$ a $g''(x_0) = f''(x_0)$ (obr. 3.17 vpravo)). Je-li $[a, b]$ střed a r poloměr oskulační kružnice, je $(x-a)^2 + (g(x) - b)^2 = r^2$ a derivací této rovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} 2(x-a) + 2(g(x) - b)g'(x) &= 0 \\ 1 + (g'(x))^2 + (g(x) - b)g''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Dosazením $x = x_0$ dostáváme tři rovnice pro neznámé a, b, r

$$\begin{aligned}(x_0-a)^2+(f(x_0)-b)^2 &= r^2\\ (x_0-a)+(f(x_0)-b)f'(x_0) &= 0\\ 1+(f'(x_0))^2+(f(x_0)-b)f''(x_0) &= 0\end{aligned}$$

Z druhé rovnice vypočítáme $(x_0 - a) = -(g(x_0) - b)f'(x_0)$ a po dosazení do první rovnice a s použitím třetí rovnice je

$$\begin{aligned} r &= |f(x_0)-b|\sqrt{1+(f'(x_0))^2} = \frac{(1+(f'(x_0))^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}\\ a &= x_0 - \frac{f'(x_0)(1+(f'(x_0))}{f''(x_0)},\\ b &= f(x_0)+\frac{(1+(f'(x_0))}{f''(x_0)}\end{aligned}$$

V inflexních bodech, kde je $f''(x_0) = 0$ je poloměr oskulační kružnice nekonečný.

Cvičení:

1. Jaký je válec největšího objemu vepsaný do dané koule?
2. Jaký je obdélník největšího obsahu vepsaný do dané elipsy?
3. Jaká je nejdelší sečna elipsy vedená z vrcholu menší poloosy?
4. Chodby šířky a a b se stýkají v pravém úhlu. Jakou nejdelší tyč jimi lze pronést?
5. Ze čtverce vyřízněte v rozích čtverce o stejné straně a složte krabici tak, aby měla největší objem.
6. Z kruhu vyřízněte kruhovou výseč a složte kornout tak, aby měl největší objem.

3.8 Iterační metody

Často máme zadánu posloupnost x_n reálných čísel rekurentním vztahem $x_{n+1} = f(x_n)$, kde f je reálná funkce. Například pro aritmetickou posloupnost $x_n = a + bn$ je $f(x) = x + b$ a pro geometrickou posloupnost $x_n = a \cdot q^n$ je $f(x) = q \cdot x$. Pro n-tý člen takové posloupnosti píšeme $x_n = f^{[n]}(x_0)$, kde $f^{[n]}$ je n-tá iterace funkce. Je to funkce f složená n-krát sama se sebou definovaná $f^{[0]}(x) = x$, $f^{[n+1]}(x) = f(f^{[n]}(x))$.

$$f^{[n]} = \overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{n}$$

Posloupnost zadanou rekurentním vztahem $x_{n+1} = f(x_n)$ chápeme jako dynamický systém, ve kterém stav x_n systému v čase n je jednoznačně určen stavem systému x_{n-1} v předchozím časovém okamžiku $n-1$. Pro určení posloupnosti x_n pak musíme znát kromě funkční závislosti f ještě počáteční podmínku x_0. Aby každá počáteční podmínka x_0 určila celou nekonečnou posloupnost (x_n), je nutné aby všechny iterace $f^{[n]}$ měly stejný definiční obor. To je splněno pokud $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathcal{D}(f)$.

3.8.1 Kvadratický dynamický systém

Nejjednodušší model růstu populace je rekurentní vztah $x_{n+1} = rx_n$, kde x_n je velikost populace v období n a r určuje populační přírůstek. To je geometrický růst $x_n = x_0 r^n$. Trochu složitější model bere v úvahu přemnožení. Je-li populace příliš velká, populační přírůstek se snižuje: $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n/K)$, kde K vyjadřuje kapacitu prostředí - největší možnou velikost populace. Při vhodné volbě jednotky, ve které velikost populace měříme, můžeme předpokládat $K = 1$, takže rekurentní funkce závisí pouze na parametru r a má tvar

$$f_r(x) = rx(1-x).$$

Zde je $\mathcal{D}(f) = \langle 0, 1\rangle$. Podmínka $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathcal{D}(f)$ pak dává rozmezí parametru $r \in \langle 0, 4\rangle$. Posloupnost iterací lze znázornit graficky na obr. 3.18. Z bodu $[x_0, 0]$ na ose x vedeme vertikálu k bodu $[x_0, x_1]$ na grafu funkce f. Bod x_1 pak přeneseme na osu x pomocí diagonály $y = x$. To znamená, že z bodu $[x_0, x_1]$ na grafu f vedeme horizontálu k bodu $[x_1, x_1]$ na diagonále. Odtud opět vedeme vertikálu k bodu $[x_1, x_2]$ na grafu f, atd.

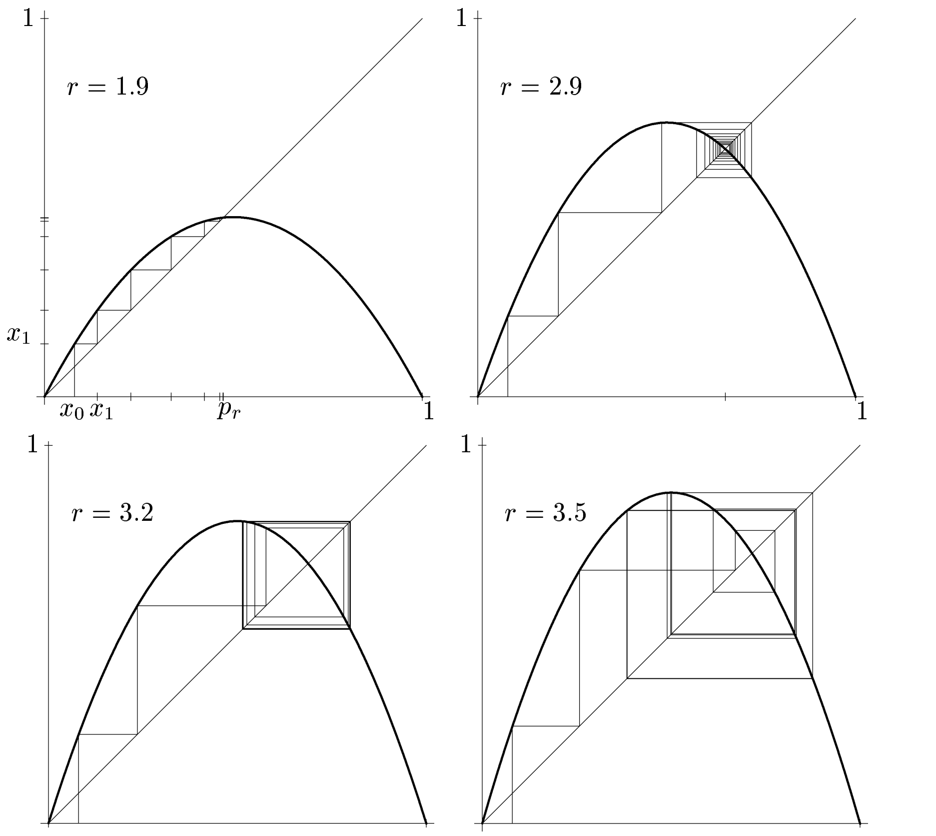
Vlastnosti posloupnosti x_n závisí podstatným způsobem na parametru r. Je-li r jen o málo větší než 1 a počáteční velikost populace x_0 je blízká nule, posloupnost x_n nejprve roste přibližně geometricky s kvocientem r. Později se její růst zpomalí a ustálí se na stabilní hodnotě (obr. 3.18 vlevo nahoře). Tato stabilní hodnota je tzv. pevný bod, který splňuje rovnici $f_r(x) = x$. Je-li pro nějaké n $x_n = x$, je již $x_m = x$ pro všechna $m \geq n$. Rovnice $f_r(x) = x$ má dvě řešení $x = 0$ a $x = p_r = 1 - \frac{1}{r}$. První odpovídá nulové populaci, druhé populaci v rovnovážném stavu, kdy je populační přírůstek nulový. Tyto dva pevné body se však liší svou stabilitou. Nulový bod je nestabilní. Je-li x_0 libovolně malé kladné, pak posloupnost x_n se od nuly vzdaluje. Naopak při libovolné počáteční podmínce $x_0 \in (0, 1)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p_r$. Stabilní a nestabilní body rozeznáme podle derivace f. V blízkosti pevného bodu x lze totiž posloupnost x_n aproximovat geometrickou posloupností s kvocientem $f'(p)$.

Definice 89 *Nechť f je reálná funkce a $x \in \mathcal{D}(f)$ její pevný bod, tj. $f(x) = x$. Říkáme, že x je stabilní, jestliže pro každé $y \in \mathcal{D}(f)^*$ pro které $y \approx x$ je $f^{[n]}(y) \approx x$ pro všechna $n \in \mathbb{N}^*$.*

Tvrzení 90 *Nechť f je diferencovatelná funkce a x její pevný bod. Je-li $|f'(x)| < 1$, pak x je stabilní. Je-li $|f'(x)| > 1$, není x stabilní.*

Důkaz: Je-li $|f'(x)| < 1$, pro každé $y \approx x$ platí $\frac{|f(y)-x|}{|y-x|} \approx |f'(x)| < 1$, tedy $|f(y) - x| < |y - x|$. Odtud $|f^{[n]}(y) - x| < |y - x|$ pro každé $n \in \mathbb{N}^*$. Je-li $|f'(x)| > 1$, zvolme s pro které $|f'(x)| > s > 1$. Pak pro každé $y \approx x$ platí $\frac{|f(y)-x|}{|y-x|} \approx |f'(x)| > s$, tedy $|f(y) - x| > s|y - x|$. Předpokládejme sporem, že $f^{[n]}(y) \approx x$ pro všechna $n \in \mathbb{N}^*$. Pak $|f^{[n]}(y) - x| > |y - x|s^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}^*$. Pro $n > -\ln|y - x|/\ln(q)$ je $|y - x|q^n > 1$ a to je spor. $\square$

Derivace funkce $f_r(x) = rx(1 - x)$ je $f_r'(x) = r - 2rx$. Pro pevný bod 0 je $f_r'(0) = r$. Nulový bod je tedy stabilní pro $0 \leq r < 1$ (to znamená, že populace v



Obrázek 3.18: První iterace

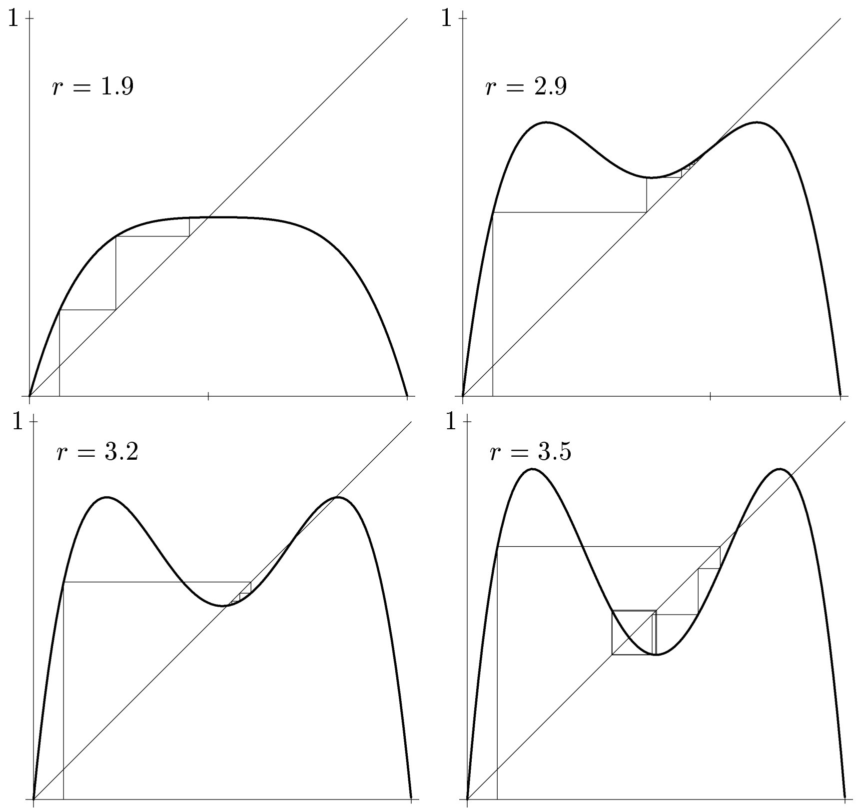
tomoto případě vždy vymírá), a nestabilní pro $r > 1$. Pokud $r > 1$, existuje druhý pevný bod $p_r = 1 - \frac{1}{r}$ (v případě $r < 1$ nenáleží p_r do intervalu $\langle 0, 1\rangle$). Derivace v tomto bodě je $f_r'(p_r) = 2 - r$. Bod p_r je tedy stabilní v rozmezí $1 < r < 3$. Na obr. 3.18 to nastává v případech $r = 1.9$ a $r = 2.9$. Pro $r > 3$ je p_r nestabilní. Je-li r jen o málo větší než 3, blíží se posloupnost $f^{[n]}(x)$ k dvojici bodů q_1, q_2 které na sebe f vzájemně převádí, tj. $f(q_1) = q_2$, $f(q_2) = q_1$ (obr.3.18 dole vlevo). To znamená že oba body q_1 i q_2 jsou pevnými body druhé iterace $f^{[2]}(q_1) = q_1$, $f^{[2]}(q_2) = q_2$ (obr. 3.19). Nalezneme je řešením rovnice $x = f_r^{[2]}(x) = rf_r(x)(1 - f_r(x))$, tedy

$$x = r^2 x(1 - x)(1 - rx(1 - x))$$

To je rovnice čtvrtého stupně. Známe však její dva kořeny, sice oba pevné body $x = 0$ a $x = 1 - \frac{1}{r}$. Tím se tato rovnice zjednoduší na kvadratickou rovnici s řešením

$$x = q_{1,2} = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r - 3)(r + 1)}}{2r}$$

Všimněme si, že výraz pod odmocninou je kladný právě pro $r > 3$, kdy pevný bod



Obrázek 3.19: Druhá iterace

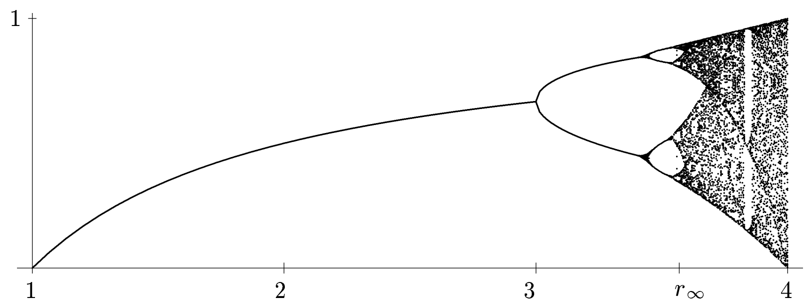
$1 - \frac{1}{r}$ ztrácí svou stabilitu. Pojem stability lze vztáhnout i na dvojici bodů q_1, q_2 a obecněji na každý bod periodický:

Definice 91 *Nechť f je reálná funkce. Říkáme, že x je periodický bod s periodou n jestliže $f^{[n]}(x) = x$ a $f^{[m]}(x) \neq x$ pro $0 < m < n$. Říkáme, že x je stabilní, je-li stabilní jako pevný bod funkce $f^{[n]}$.*

Stabilitu periodických bodů lze rozhodnout kriteriem $|(f^{[n]})'(x)| < 1$. Pro periodické body q_1, q_2 je

$$\begin{aligned}(f^{[2]})'(q_1) &= f'(f(q_1))f'(q_1) = f'(q_2)f'(q_1) = f'(q_2)f'(f(q_2)) \\ &= (f^{[2]})'(q_2)\end{aligned}$$

Derivace druhé iterace jsou v obou bodech q_1, q_2 stejné. Dosazením za q_1 a q_2 dostáváme $(f^{[2]})'(q_1) = (f^{[2]})'(q_2) = 1 - (r^2 - 2r - 3)$ a tento výraz se rovná -1 pro $r = \sqrt{6} + 1 = 3.4494\ldots$. Za tímto bodem tedy opět q_1, q_2 ztrácí svou stabilitu, a vzniká stabilní čtveřice periodických bodů s periodou 4 (obr. 3.18 dole vpravo).



Obrázek 3.20: Bifurkační diagram

Tento jev se nazývá bifurkace zdvojení periody a v kvadratickém systému se nekonečněkrát opakuje. Při rostoucím r postupně vznikají periodické orbity délek 2^n pro vzrůstající n. Přehledně si tuto situaci můžeme znázornit na bifurkačním diagramu (obr. 3.20), kde se proti hodnotě r vynášejí hodnoty stabilních pevných a periodických bodů. V intervalu $\langle 1,3\rangle$ to je hyperbola $p_r = 1-\frac{1}{r}$. V intervalu $\langle 3,\sqrt{6}+1\rangle$ jsou to větve paraboly $q_{1,2}(r)$. Všechny bifurkace zdvojení periody však proběhnou k jisté hodnotě $r_\infty = 3.56994\ldots$. Za touto hodnotou je chování systému ještě složitější. V této oblasti bifurkační diagram vyjadřuje frekvenci návštěv posloupnosti x_n v různých oblastech intervalu $\langle 0,1\rangle$. Bifurkační diagram získáme tak, že pro každou hodnotu r zvolíme náhodně počáteční x_0 a zobrazíme několik po sobě jdoucích členů posloupnosti x_n s dosti vysokým indexem n.

3.8.2 Newtonova iterační metoda

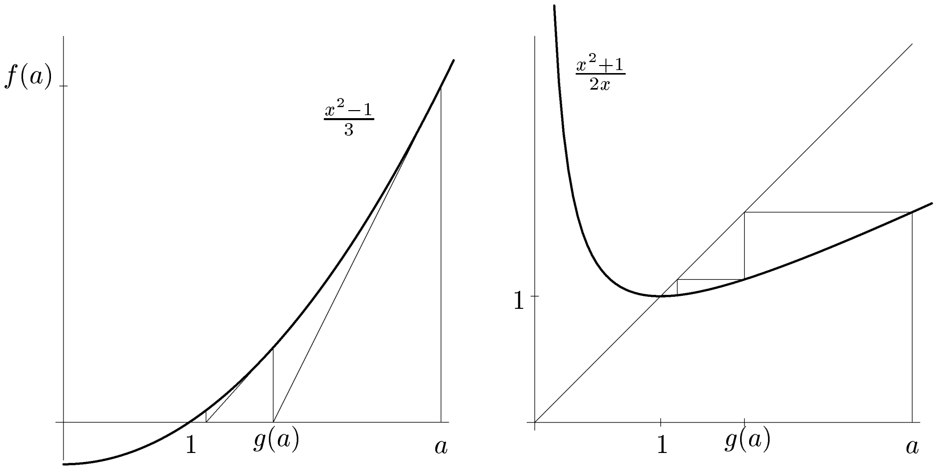
Hledání kořenu funkce f, tj. řešení rovnice $f(x) = 0$ můžeme také převést na iterační postup. Bod x je řešení rovnice $f(x) = 0$ právě když pro libovolnou konstantu a je pevným bodem funkce $g_a(x) = af(x) + x$. Iterační metodou lze najít stabilní pevné body. Nerovnost $|g_a'(x)| < 1$ znamená $-2 < af'(x) < 0$. Známe-li alespoň přibližně průběh funkce v okolí řešení x, lze vhodnou volbou konstanty a dosáhnout $|g_a'(x)| < 1$.

Newtonova iterační metoda řeší problém nalezení kořenu rovnice $f(x) = 0$ jiným způsobem. Přibližuje se k němu tak, že funkci f nahradí tečnou v daném bodě a řeší pak rovnici lineární. Tečna vedená bodem a k funkci f má rovnici $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Řešením rovnice $y = 0$ je $x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ (obr.3.21). Řešení rovnice $f(x) = x$ tedy hledáme tak, že iterujeme funkci

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Její derivace je

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)f'(x)} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)f'(x)}$$



Obrázek 3.21: Newtonova iterace

Je-li tedy x řešení rovnice $f(x) = 0$, je x pevný bod funkce g tj. $g(x) = x$, a $g'(x) = 0$. O takovém bodě říkáme že je superstabilní. Iterační posloupnost se k řešení blíží rychleji než jakákoliv geometrická posloupnost. Například pro funkci $f(x) = (x^2 - 1)/3$ s kořeny ± 1 je $g(x) = \frac{x^2+1}{2x}$ (obr. 3.21 vpravo). Je-li $x_0 > 0$, je $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 1$. Je-li $x_0 < 0$, je $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = -1$.