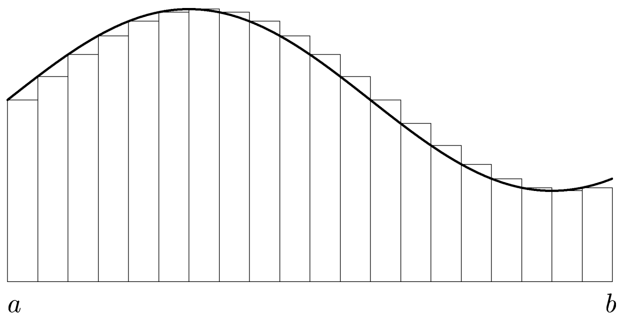
Kapitola 4

PRIMITIVNÍ FUNKCE

Výpočty objemů těles, ploch rovinných obrazců i délek křivek se dají převést na úlohu určit pro danou reálnou funkci plochu mezi intervalem $\langle a, b\rangle$ na ose x a grafem této funkce. Rozdělíme-li interval $\langle a, b\rangle$ na nekonečně mnoho nekonečně malých intervalů, můžeme tuto plochu počítat jako nekonečný součet nekonečně malých ploch obdélníků. To vede k pojmu určitého integrálu spojité funkce.



Obrázek 4.1: Integrace

4.1 Určitý integrál

Infinitesimálním dělením kompaktního intevalu $\langle a, b\rangle$ nazveme každou rostoucí posloupnost $(x_i)_{i=0}^p$ nestandardních čísel, kde $p \in \mathbb{N}^\infty$, $x_0 = a$, $x_p = b$ a $x_{i+1} - x_i$ jsou infinitesimální kladné pro $0 \leq i < p$. Nejjednodušší příklad je rovnoměrné infinitesimální dělení $x_i = a + \frac{i}{p}(b - a)$. Pro reálnou funkci f uvažujeme součty $\sum_{i=0}^{p-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$. Ukážeme, že pro spojitou funkci f jsou všechny tyto součty konečně velké a navzájem nekonečně blízké.

Tvrzení 92 *Nechť $(x_i)_{i=0}^p$ je infinitesimální dělení kompaktního intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $(m_i)_{i=0}^{p-1}$, $(M_i)_{i=0}^{p-1}$, jsou nestandardní reálná čísla taková, že $m_i \approx M_i$. Pak*

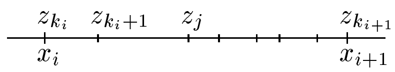
$$\sum_{i=0}^{p-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \approx \sum_{i=0}^{p-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

Důkaz: Položme $\alpha = \max\{|M_i - m_i| : \ 0 \le i < p\} \in \mathbb{R}^0$. Pak

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=0}^{p-1} M_i(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{p-1} m_i(x_{i+1} - x_i)\right| &\le \sum_{i=0}^{p-1} |M_i - m_i|(x_{i+1} - x_i) \\ &\le \sum_{i=0}^{p-1} \alpha(x_{i+1} - x_i) = \alpha(b - a) \approx 0 \end{aligned}$$

Tvrzení 93 *Nechť f je spojitá funkce na kompaktním intervalu $\langle a, b\rangle$, $(x_i)_{i=0}^p$ a $(y_i)_{i=0}^q$ dvě infinitesimální dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak*

$$\sum_{i=0}^{p-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \approx \sum_{i=0}^{q-1} f(y_i)(y_{i+1} - y_i)$$



Obrázek 4.2: Zjemnění infinitesimálního dělení

Důkaz: Sestrojíme infinitesimální dělení $(z_i)_{i=0}^r$, které zahrnuje všechny body x_i i všechny body y_i (obr. 4.2). Pro dělení $(x_i)_{i=0}^p$ to znamená, že existuje rostoucí posloupnost $(k_i)_{i=0}^p$ taková, že $k_0 = 0$, $k_p = r$ a $x_i = z_{k_i}$, takže

$$f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} f(x_i)(z_{j+1} - z_j)$$

Protože $x_{i+1} \approx x_i$, pro $k_i \le j < k_{i+1}$ je $z_j \approx x_i$. Podle věty 58 je spojitá funkce stejnoměrně spojitá, takže $f(z_j) \approx f(x_i)$. Podle tvrzení 92

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{p-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) &= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} f(x_i)(z_{j+1} - z_j) \approx \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} f(z_j)(z_{j+1} - z_j) \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} f(z_j)(z_{j+1} - z_j) \end{aligned}$$

Podobně pro dělení $(y_i)_{i=0}^q$

$$\sum_{i=0}^{q-1} f(y_i)(y_{i+1} - y_i) \approx \sum_{j=0}^{r-1} f(z_j)(z_{j+1} - z_j) \approx \sum_{i=0}^{p-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad \square$$

Podle Weierstrassovy věty 56 o extrémech má spojitá funkce f na $\langle a, b\rangle$ minimum m a maximum M. Je- li $(x_i)_{i=0}^p$ infinitesimální dělení $\langle a, b\rangle$, pro každé x_i platí $m \leq f(x_i) \leq M$. Sečtením těchto nerovností pro i od 0 do $p-1$ dostáváme

$$m(b-a) \leq \sum_{i=0}^{p-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i) \leq M(b-a)$$

Každý infinitesimální součet je tedy konečně velké číslo. Protože všechny infinitesimální součty jsou nekonečně blízko, můžeme definovat

Definice 94 *Nechť f je spojitá funkce na kompaktním intervalu $\langle a, b\rangle$. Určitý integrál funkce f od a do b je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathfrak{P}\left(\sum_{i=0}^{p-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)\right)$$

kde $(x_i)_{i=0}^p$ je libovolné infinitesimální dělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

Jednoduší integrály lze určit přímo podle definice. Pro rovnoměrné dělení $x_i = a + \frac{i}{p}(b-a)$ intervalu $\langle a, b\rangle$ označme $r = (b-a)/p$ délku infinitesimálního intervalu.

$$\begin{aligned}\int_a^b x\,dx &\approx \sum_{i=0}^{p-1}(a+ir)r = \left(ap + \frac{p(p-1)}{2}r\right)r \\ &= \left(a + \frac{(p-1)r}{2}\right)(b-a) \approx \frac{b^2-a^2}{2}\end{aligned}$$

Pro $a=0$ to je obsah $b^2/2$ rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnou b. Pro integraci funkce x^n v intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $0 < a < b$ dělíme tento interval v geometrické posloupnosti $x_i = ar^i$, kde $r = \sqrt[p]{b/a}$ a $0 \leq i \leq p$. Pak $r \approx 1$ a $x_{i+1} - x_i = x_i(r-1)$, takže

$$\begin{aligned}\int_a^b x^n\,dx &\approx \sum_{i=0}^{p-1} x_i^{n+1}(r-1) = a^{n+1}(r-1)\sum_{i=0}^{p-1} r^{(n+1)i} \\ &= a^{n+1}(r-1)\frac{r^{(n+1)p}-1}{r^{n+1}-1} = a^{n+1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} - 1\right)\frac{r-1}{r^{n+1}-1} \\ &= (b^{n+1}-a^{n+1})\frac{1}{1+\cdots+r^n} \approx \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

Tvrzení 95 *Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$, m její minimum a M její maximum. Pak*

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

Důkaz: Pro každé infinitesimální dělení $(x_i)_{i=0}^p$ intervalu $\langle a,b\rangle$ je

$$m(b-a) \leq \sum_{i=0}^{p-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i) \leq M(b-a) \quad \square$$

Z tvrzení 95 plyne, že pokud pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ platí $f(x) \leq g(x)$, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Tvrzení 96 *Je-li f spojitá na $\langle a,b\rangle$, pak*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Důkaz: Nechť $(x_i)_{i=0}^p$ je infinitesimální dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak

$$\left|\sum_{i=0}^{p-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)\right| \quad \leq \quad \sum_{i=0}^{p-1} |f(x_i)|(x_{i+1}-x_i)$$

Tvrzení 97 *Nechť f je spojitá funkce na intevalu $\langle a,b\rangle$ a nechť $a<c<b$. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Důkaz: Nechť $(x_i)_{i=0}^p$ je dělení intervalu $\langle a,c\rangle$ a $(y_j)_{j=0}^q$ je dělení intervalu $\langle c,b\rangle$. Sestrojme dělení $(z_k)_{k=0}^{p+q}$ předpisem $z_k = x_k$ pro $0 \leq k \leq p$, $z_k = y_{k-p}$ pro $p \leq k \leq p+q$. Pak

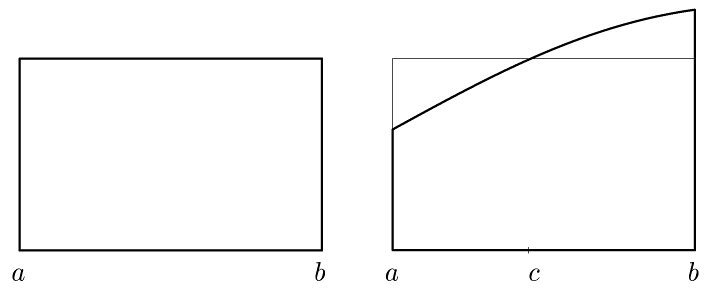
$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx \quad &\approx \quad \sum_{k=0}^{p+q-1} f(z_k)(z_{k+1}-z_k) \\
&= \quad \sum_{i=0}^{p-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \sum_{j=0}^{q-1} f(y_j)(y_{j+1}-y_j) \\
&\approx \quad \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Je-li f spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, položme

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Pak pro každou trojici bodů a,b,c pak platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



Obrázek 4.3: Věta o střední hodnotě

Věta 98 (Věta o střední hodnotě) *Nechť f je spojitá funkce na kompaktním intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak existuje $c \in (a,b)$, pro které*

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Věta platí i v případě $b < a$, kdy je $c \in (b,a)$.

Důkaz: Označme M maximum a m minimum funkce f na $\langle a,b\rangle$. Podle věty 56 o maximu existují body $a_1, b_1 \in \langle a,b\rangle$, pro které

$$f(a_1) = m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M = f(b_1).$$

Podle věty 41 o mezihodnotě existuje mezi body a_1, b_1 bod c pro který

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Plocha útvaru mezi intervalem $\langle a,b\rangle$ a grafem funkce f je tedy stejná jako plocha obdélníku o stranách $b-a$ a $f(c)$ (obr. 4.3).

Věta 99 (Základní věta analýzy) *Nechť f je spojitá funkce na kompaktním intervalu $\langle a,b\rangle$ a $c \in \langle a,b\rangle$. Pro $x \in \langle a,b\rangle$ položme*

$$F(x) = \int_c^x f(s)\,ds$$

Pak pro každé $x \in (a,b)$ je $F'(x) = f(x)$, $F'^{+}(a) = f(a)$, $F'^{-}(b) = f(b)$.

Důkaz: Funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu s krajními body c, x, takže určitý integrál $F(x) = \int_c^x f(s)\,ds$ existuje. Podle tvrzení 97 a věty 98 pro každé $x \in (a,b)$ a pro každé infinitesimální α existuje $\beta \in (0,\alpha)$ nebo $\beta \in (\alpha, 0)$, tak že platí

$$\begin{aligned} \frac{F(x+\alpha)-F(x)}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha}\left(\int_c^{x+\alpha} f(s)\,ds - \int_c^x f(s)\,ds\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha} f(s)\,ds = f(x+\beta) \approx f(x) \end{aligned}$$

4.2 Neurčitý integrál

Základní věta analýzy dává návod jak určitý integrál počítat. K dané spojité funkci f je třeba najít její primitivní funkci F a určit $F(b) - F(a)$. Tento rozdíl značíme $[F(x)]_a^b$. Primitivní funkce uvažujeme na obecných, ne nutně kompaktních intervalech.

Definice 100 *Nechť f je spojitá funkce na intervalu (libovolného typu). Říkáme, že funkce F se stejným definičním oborem je primitivní funkce k f, nebo že $F(x) = \int f(x)\,dx$ je neurčitý integrál f, jestliže F je spojitá a v každém vnitřním bodě $x \in \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(F)$ společného definičního oboru platí $F'(x) = f(x)$.*

Věta 101 *Každá spojitá funkce f na intervalu (ne nutně kompaktním) má primitivní funkci. Rozdíl každých dvou jejích primitivních funkcí je konstantní funkce. Je-li F primitivní funkce k f na kompaktním intervalu $\langle a, b\rangle$, je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Důkaz: Zvolme libovolný bod $c \in \mathcal{D}(f)$, a pro $x \in \mathcal{D}(f)$ položme

$$F(x) = \int_c^x f(s)\,ds$$

Podle základní věty analýzy $F'(x) = f(x)$ v každém vnitřním bodě. Pokud definiční obor má hraniční body, existují v nich jednostranné derivace, takže F je spojitá. Jsou-li F_1, F_2 dvě funkce primitivní k f, pak $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$ má nulovou derivaci $F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Kdyby existovala $x < y$, pro která by bylo $F(x) \neq F(y)$, pak by existovalo $c \in (x, y)$ pro které $F'(c) = \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \neq 0$ a to je spor. $F(x)$ je tedy konstantní funkce. Je-li $\mathcal{D}(f) = \langle a, b\rangle$, je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Pro každou jinou primitivní funkci F_1 existuje d tak že $F_1(x) = F(x) + d$ takže $F_1(b) - F_1(a) = F(b) - F(a)$. □

Vzorce pro derivaci dávají vzorce pro integraci. Například derivace obecné mocniny je $(x^{a+1})' = (a+1) \cdot x^a$. Je-li $a \neq -1$, můžeme zde dělit $a + 1$.

Příklad 102

$$\begin{aligned}
\int x^a\,dx &= \tfrac{x^{a+1}}{a+1}, && x \in (0, +\infty),\ \ a \neq -1 \\
\int \frac{dx}{x} &= \ln|x|, && x \in (0, +\infty)\ \ \textit{nebo}\ \ x \in (-\infty, 0) \\
\int e^x\,dx &= e^x, && x \in (-\infty, +\infty)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin x\,dx &= -\cos x, && x \in (-\infty, +\infty)\\
\int \cos x\,dx &= \sin x, && x \in (-\infty, +\infty)\\
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \operatorname{arctan} x, && x \in (-\infty, +\infty)\\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x, && x \in (-1, 1)\\
\int \sinh x\,dx &= \cosh x, && x \in (-\infty, +\infty)\\
\int \cosh x\,dx &= \sinh x, && x \in (-\infty, +\infty)\\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \operatorname{arg\,sinh} x, && x \in (-\infty, +\infty)\\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \operatorname{arg\,cosh} x, && x \in (-\infty, -1) \ \textit{nebo}\ \ x \in (1, +\infty)\\
\int \frac{dx}{1-x^2} &= \operatorname{arg\,tanh} x, && x \in (-1, 1)\\
\int \frac{dx}{1-x^2} &= \operatorname{arg\,coth} x, && x \in (-\infty, -1) \ \textit{nebo}\ \ x \in (1, +\infty)
\end{aligned}$$

Vzorec $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$ je souhrnný pro intervaly $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Pro $x < 0$ je $(\ln(-x))' = -1 \cdot \frac{1}{-x} = 1/x$.

Také v integrálním počtu máme pravidla pro výpočet složitějších integrálů z jednodušších, tato pravidla však nevedou vždy automaticky k cíli. Nejjednodušší situace je pro lineární kombinaci funkcí.

Tvrzení 103 *Nechť f, g jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $c, d \in \mathbb{R}$. Pak*

$$\begin{aligned}
\int (cf(x) + dg(x))\,dx &= c\int f(x)\,dx + d\int g(x)\,dx, \quad x \in \langle a, b\rangle\\
\int_a^b (cf(x) + dg(x))\,dx &= c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}$$

Důkaz: Jsou-li F a G primitivní funkce k f a g, je $(cF(x)+dG(x))' = cf(x)+dg(x)$.
$\square$

Integrál mnohočlenu je

$$\int (c_0 + c_1 x + \cdots c_n x^n)\,dx = c_{-1} + c_0 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$$

kde c_{-1} je libovolná konstanta.

4.2.1 Pravidlo per partes

Vzorec pro derivaci součinu funkcí nedává vzorec na integraci součinu, ale pravidlo o integraci po částech (per partes)

Tvrzení 104 *Nechť f, g jsou diferencovatelné na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak*

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx, \quad x\in\langle a,b\rangle \\ \int_a^b f(x)g'(x)\,dx &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \end{aligned}$$

Důkaz: Jsou-li f, g diferencovatelné, jsou f', g' spojité na na $\langle a,b\rangle$. V rovnosti $f(x)\cdot g'(x) = (f(x)\cdot g(x))' - f'(x)\cdot g(x)$ jsou všechny funkce spojité, takže ji můžeme integrovat. □

Pravidlo integrace po částech není obecný návod na integraci součinu. Takové pravidlo neexistuje. I integrál poměrně jednoduchých funkcí, například $\frac{\sin x}{x}$ nelze vyjádřit vzorcem sestaveným z elemetárních funkcí. Pravidlo per partes pouze někdy umožňuje převést daný integrál na integrál jednodušší. Danou funkci ale musíme vhodným způsobem rozložit na součin $f(x)g'(x)$. Například

$$\begin{aligned} \int xe^x\,dx &= \int x\cdot(e^x)'\,dx = xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x = (x-1)e^x \\ \int x\sin x\,dx &= \int x\cdot(-\cos x)'\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \sin x \\ \int_1^e \ln x\,dx &= \int_1^e \ln x\cdot x'\,dx = [\ln x\cdot x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot x\,dx \\ &= e - 0 - [x]_1^e = e - e + 1 = 1. \end{aligned}$$

Pravidlo per partes používáme i opakovaně

$$\begin{aligned} \int x^2\sin x\,dx &= \int x^2(-\cos x)'\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx \\ &= -x^2\cos x + \int 2x\sin' x\,dx \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x\,dx \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x \end{aligned}$$

$$\int e^x\sin x\,dx = \int e^x(-\cos x)'\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx$$

$$\begin{aligned} &= -e^x \cos x + \int e^x (\sin x)' \, dx \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \end{aligned}$$

Odtud převedením posledního členu na levou stranu a dělením dvěmi

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

4.2.2 Pravidlo substituce

Pravidlo substituce plyne z vzorce pro derivaci složené funkce. Uvažujme diferencovatelné funkce F a g, označme $F'(y) = f(y)$, $H(x) = F(g(x))$. Pak $H'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$. Odtud při $y = g(x)$

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = H(x) = F(g(x)) = F(y) = \int f(y) \, dy$$

Vzorec se dobře pamatuje tak, že při substituci $y = g(x)$ je $dy = g'(x) \, dx$. Při výpočtu používáme pravidlo substituce v obou směrech. Počítáme-li integrál tvaru $\int f(g(x))g'(x) \, dx$, převedeme ho substitucí $y = g(x)$ na integrál $\int f(y) \, dy$. Po jeho výpočtu jako $F(y)$ dosadíme za y a dostáváme $F(g(x))$. Naopak integrál $\int f(y) dy$ převádíme substitucí $y = g(x)$ na $\int f(g(x))g'(x) \, dx$. Po výpočtu tohoto integrálu jako $H(x)$ dosazujeme zpět $x = g^{-1}(y)$ a dostáváme $H(g^{-1}(y))$. To však můžeme udělat pouze je-li funkce g vzájemně jednoznačná.

Tvrzení 105 *Nechť $g : \langle a, b \rangle \to I$ je diferencovatelná funkce, nechť $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a označme $F(y) = \int f(y) dy$ neurčitý integrál f. Pak*

$$\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x) \, dx &= \int f(y) \, dy = F(y) = F(g(x)), \quad x \in \langle a, b \rangle \\ \int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy \end{aligned}$$

Důkaz plyne ze vzorce pro derivaci složené funkce $F(g(x))$. Pro určitý integrál je

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy$$

Tvrzení 106 *Nechť $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, $g : I \to \langle a, b \rangle$ je vzájemně jednoznačná diferencovatelná funkce a označme $H(x) = \int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx$. Pak*

$$\begin{aligned} \int f(y) \, dy &= \int f(g(x))g'(x) \, dx = H(x) = H(g^{-1}(y)), \quad y \in \langle a, b \rangle \\ \int_a^b f(y) \, dy &= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x))g'(x) \, dx \end{aligned}$$

Důkaz: Pro primitivní funkci $F(y) = \int f(y)\,dy$ je $H = F \circ g$, takže $\int f(y)\,dy = F(y) = F(g(g^{-1}(y))) = H(g^{-1}(y))$. $\square$

Je-li zde g klesající funkce, je $g^{-1}(a) > g^{-1}(b)$, takže

$$\int_a^b f(y)\,dy = -\int_{g^{-1}(b)}^{g^{-1}(a)} f(g(x))g'(x)\,dx$$

Například substitucí $y = ax + b$, $dy = a\,dx$, řešíme pro $c \neq -1$, $x > 0$

$$\int (ax+b)^c\,dx = \frac{1}{a}\int y^c\,dy = \frac{1}{a(c+1)}y^{c+1} = \frac{1}{a(c+1)}(ax+b)^{c+1}$$

Substitucí $y = x^2 + 1$, $dy = 2x\,dx$, $x \in \mathbb{R}$ počítáme

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln y = \frac{1}{2}\ln(x^2+1).\\ \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}[\ln y]_1^2 = \frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

Pro integraci $\tan x$ použijeme substituci $y = \cos x$, $dy = -\sin x\,dx$.

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{-dy}{y} = -\ln|y| = -\ln|\cos x|.$$

Výpočet platí buď pro y z intervalu $y \in (0, +\infty)$, nebo z intervalu $(-\infty, 0)$, tedy v každém intervalu $x \in (\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. V určitém integrálu se obracejí meze

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-dy}{y} = [-\ln y]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln 2$$

Substitucí $y = \ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$ řešíme

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 x, \quad x > 0.$$

Příklad 107

$$\begin{aligned}\int \sqrt{b^2-y^2} &= \frac{y}{2}\sqrt{b^2-y^2} + \frac{b^2}{2}\arcsin\frac{y}{b}\\ \int \sqrt{b^2+y^2} &= \frac{y}{2}\sqrt{b^2+y^2} + \frac{b^2}{2}\operatorname{arg\,sinh}\frac{y}{b}\end{aligned}$$

Důkaz: Integrál řešíme substitucemi $y = b\sin x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $z = 2x$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{b^2-y^2}\,dy &= b^2\int \cos^2 x\,dx = \frac{b^2}{2}\int(\cos 2x + 1)\,dx\\ &= \frac{b^2}{4}\int(\cos z + 1)\,dz = \frac{b^2}{4}(\sin z + z)\\ &= \frac{b^2}{2}(\sin x\cos x + x) = \frac{y}{2}\sqrt{b^2-y^2} + \frac{b^2}{2}\arcsin\frac{y}{b}\end{aligned}$$

Substitucemi $y = b\sinh x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $z = 2x$ řešíme

$$\begin{aligned}\int \sqrt{b^2+y^2}\,dy &= b^2\int \cosh^2 x\,dx = \frac{b^2}{2}\int(\cosh 2x+1)\,dx\\ &= \frac{b^2}{4}\int(\cosh z+1)\,dz = \frac{b^2}{4}(\sinh z+z)\\ &= \frac{b^2}{2}(\sinh x\cosh x+x) = \frac{y}{2}\sqrt{b^2+y^2}+\frac{b^2}{2}\operatorname{arg\,sinh}\frac{y}{b}\end{aligned}$$

Cvičení

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-2x}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^4}$
4. $\displaystyle\int (3x+1)^3\,dx$
5. $\displaystyle\int \sin(3x-1)\,dx$
6. $\displaystyle\int x\sin(x^2+1)\,dx$
7. $\displaystyle\int ae^{bx}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x+1}dx$
10. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$
12. $\displaystyle\int \sqrt{x+1}dx$
13. $\displaystyle\int 3x\sqrt{1-x^2}\,dx$
14. $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$
15. $\displaystyle\int (2x+1)^{99}\,dx$
16. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}$
19. $\displaystyle\int (2^x+3^x)^2\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}\,dx$
21. $\displaystyle\int e^x\cos^2 x\,dx$
22. $\displaystyle\int xe^x\sin x\,dx$
23. $\displaystyle\int \sin 3x\sin 5x\,dx$
24. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+5}$
25. $\displaystyle\int \arctan x\,dx$
26. $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$

4.3 Stirlingův vzorec

Je-li a_n posloupnost kladných čísel, položme $r_n = \prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 a_1 \cdots a_n$. Limitu této posloupnosti (pokud existuje) nazýváme nekonečný součin posloupnosti a_n

$$\prod_{k=0}^{\infty} a_k = r \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} r_n = r$$

Teorie nekonečných součinů se redukuje na teorii nekonečných součtů logaritmováním. Je-li totiž nějaké a_i nulové, je nekonečný součin nulový. Jsou-li všechna a_i kladná, je $\ln\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln(a_k)$.

Příklad 108 (Wallisův součin)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

Důkaz: Integrací per partes pro $f(x) = \sin^{n-1}(x)$, $g(x) = -\cos(x)$:

$$\begin{aligned} \int \sin^n x\, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\, dx \end{aligned}$$

Druhou část integrálu na pravé straně převedeme na levou stranu a vydělíme celou rovnost n

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx$$

Integrujeme-li v mezích od 0 do $\frac{\pi}{2}$, je $[\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2} = 0$ a tedy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx$$

Pro $n = 0$ a $n = 1$ je

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1$$

Odtud

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

a dělením těchto dvou výrazů

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}$$

Pro $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ je $0 \leq \sin^{2n+2} x \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x$, takže

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x\, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx$$

$$\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x\, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx} \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx} \leq 1$$

Limita každého z těchto podílů je tedy 1, takže

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} \\
\pi &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2n}{2n+1}
\end{aligned}$$

Protože $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$, dostáváme po odmocnění

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

takže

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}$$

Příklad 109 (Stirlingův vzorec)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$$

Stirlingův vzorec odhaduje rychlost růstu faktoriálu. Je založen na integraci logaritmu. Pro $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$ je

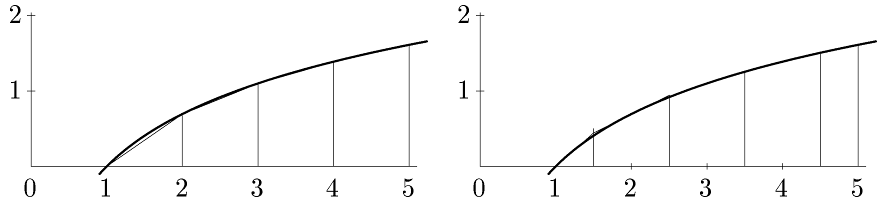
$$\begin{aligned}
\int_1^n \ln x\, dx &= [x \ln x]_1^n - \int_1^n x \frac{1}{x}\, dx = n \ln n - n + 1 \\
&= 1 + n \ln \frac{n}{e} = \ln e \left(\frac{n}{e}\right)^n
\end{aligned}$$

Pro $1 \le k < n$ sečteme nerovnosti $\ln k < \int_k^{k+1} \ln x\, dx < \ln(k+1)$, takže

$$\ln(n-1)! < \ln e \left(\frac{n}{e}\right)^n < \ln n!$$

Přičteme k první nerovnosti $\ln n$, a přejdeme k exponenciále

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{e}\right)^n n$$



Obrázek 4.4: Integrace logaritmu

Použitím lichoběžníkové metody získáme odhad přesnější. Funkce logaritmu je konkávní, protože její druhá derivace $-x^{-2}$ je záporná. To znamená, že spojnice bodů $[k, \ln k]$ a $[k+1, \ln(k+1)]$ je celá pod grafem funkce $\ln x$, zatímco její tečna v bodě $\ln k$ je celá nad grafem funkce. Integrál odhadneme zdola součtem obsahů lichoběžníků se základnami $\ln k$ a $\ln(k+1)$ a výškou 1 (obr. 4.4 vlevo). Horní odhad sestavíme z lichoběžníků nad body $k-\frac{1}{2}$, $k+\frac{1}{2}$ omezené tečnami v bodech $[k, \ln k]$, které mají stejný obsah jako obdélníky se stranami 1 a $\ln k$ (obr. 4.4 vpravo). Odtud

$$\frac{1}{2}(\ln k + \ln(k+1)) < \int_k^{k+1} \ln x\, dx, \quad \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x\, dx < \ln k$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \ln x\, dx < \frac{1}{8}, \quad \int_{n-\frac{1}{2}}^{n} \ln x\, dx < \frac{1}{2}\ln n$$

Sečtením těchto nerovností

$$\ln 2 + \cdots + \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln n < \int_1^n \ln x\, dx < \frac{1}{8} + \ln 2 + \cdots + \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln n$$

Přičteme $\frac{1}{2}\ln n$ a přejdeme k exponenciále

$$n! < e\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} < n! \cdot e^{\frac{1}{8}}$$

$$e^{\frac{7}{8}}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} < n! < e\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

Označme a_k plochu mezi grafem funkce $\ln x$ v mezích od k do $k+1$ a úsečkou spojující body $[k, \ln k]$, $[k+1, \ln(k+1)]$ (obr. 4.4).

$$a_k = \int_k^{k+1} \ln x\, dx - \frac{1}{2}(\ln k + \ln(k+1)) > 0$$

Sečteme tyto nerovnosti od 1 do $n-1$.

$$
\begin{aligned}
0 < s_n &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \int_1^n \ln x\,dx - \ln n! + \frac{1}{2}\ln n \\
&= 1 - \ln \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}} = 1 - \ln b_n
\end{aligned}
$$

kde

$$b_n = \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}} = e^{1-s_n} < e$$

Posloupnost s_n je součtem řady kladných členů, takže je kladná a rostoucí. Z toho plyne, že posloupnost b_n je klesající a má tedy limitu $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Tato limita je kladná, protože $2.399 \doteq e^{\frac{7}{8}} < b < e \doteq 2.718$. Dosazením $n! = (\frac{n}{e})^n\sqrt{n}b_n$ do Wallisovy formule dostáváme

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{n}{e})^{2n} n b_n^2 2^{2n}}{(\frac{2n}{e})^{2n}\sqrt{2n}b_{2n}\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2}{\sqrt{2}b_{2n}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

takže $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}} = b = \sqrt{2\pi} \doteq 2.507$. To je již Stirlingova formule.

4.4 Integrace racionálních funkcí

Racionální funkce integrujeme tak, že je nejprve algebraicky rozložíme na částečné zlomky. To jsou racionální funkce speciálního tvaru, které již integrovat umíme. Při rozkladu racionální lomené funkce postupně snižujeme stupeň jmenovatele. Základní věta algebry říká, že každý mnohočlen $P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$, $c_n \neq 0$, jehož stupeň $n = \operatorname{st}(P)$ je alespoň 1, má kořen v komplexním oboru, tj. existuje komplexní číslo x_1, pro které $P(x_1) = 0$. Mnohočlen $P(x)$ je pak dělitelný členem $x - x_1$, protože

$$
\begin{aligned}
P(x) &= P(x) - P(x_1) = c_1(x - x_1) + \cdots + c_n(x^n - x_1^n) \\
&= (x - x_1)\left(c_1 + c_2(x + x_1) + \cdots + c_n(x^{n-1} + \cdots + x_1^{n-1})\right) \\
&= (x - x_1)P_1(x)
\end{aligned}
$$

kde $P_1(x)$ je mnohočlen stupně $n-1$. Ten má opět kořen x_2, takže indukcí plyne, že každý mnohočlen stupně n lze zapsat jako součin n lineárních členů. V tomto součinu se některé členy mohou opakovat. V takovém případě rozklad mnohočlenu lze zapsat ve tvaru

$$P(x) = c_n(x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_k)^{r_k}$$

kde $r_1 + \cdots + r_k = n = \operatorname{st}(P)$ je stupeň mnohočlenu. Říkáme pak, že kořen x_i mnohočlenu P má násobnost r_i. Kořeny x_i jsou zde obecně komplexní čísla. Má-li však mnohočlen (s reálnými koeficienty c_i) komplexní kořen $x_1 = a + bi$, má i komplexně sdružený kořen $\overline{x_1} = a - bi$. Sdružíme-li spolu lineární členy s těmito kořeny, dostáváme reálný kvadratický mnohočlen

$$(x - a - ib)(x - a + ib) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q$$

kde $p^2 - 4q < 0$ Z toho plyne, že každý mnohočlen s reálnými koeficienty lze rozložit na součin lineárních a kvadratických reálných členů ve tvaru

$$P(x) \quad = \quad c_n(x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_k)^{r_k} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdots (x^2 + p_j x + q_j)^{s_j}$$

kde $r_1 + \cdots + r_k + 2s_1 + \cdots + 2s_j = n = \operatorname{st}(P)$ je stupeň mnohočlenu.

Předpokládejme, že jmenovatel $Q(x)$ racionální lomené funkce $P(x)/Q(x)$ má reálný kořen a násobnosti r. To znamená, že existuje mnohočlen $Q_1(x)$ pro který $Q(x) = (x - a)^r Q_1(x)$, a přitom $Q_1(a) \neq 0$.

Tvrzení 110 *Nechť $P(x)$, $Q(x) = (x - a)^r Q_1(x)$ jsou mnohočleny a $Q_1(a) \neq 0$. Pak existuje mnohočlen $P_1(x)$, pro který*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)/Q_1(a)}{(x - a)^r} + \frac{P_1(x)}{(x - a)^{r-1} Q_1(x)}$$

Je-li $0 < \operatorname{st}(P) < \operatorname{st}(Q)$, *je* $\operatorname{st}(P_1) < \operatorname{st}(Q) - 1$

Důkaz: Pro neznámou konstantu A upravíme funkci $P(x)/Q(x)$.

$$\frac{P(x)}{(x - a)^r Q_1(x)} = \frac{A}{(x - a)^r} + \frac{P(x) - A \cdot Q_1(x)}{(x - a)^r Q_1(x)}$$

Hledáme takové A, pro které je čitatel druhého zlomku $P(x) - A \cdot Q_1(x)$ dělitelný členem $(x - a)$. To nastane právě tehdy, když je hodnota tohoto mnohočlenu v a rovna nule : $P(a) - A \cdot Q_1(a) = 0$, tedy $A = P(a)/Q_1(a)$. Pro toto a tedy existuje mnohočlen $P_1(x)$, pro který $(x - a)P_1(x) = (P(x) - A \cdot Q_1(x))$. Je-li $0 < \operatorname{st}(P) < \operatorname{st}(Q)$, je $\operatorname{st}(P - AQ) = \operatorname{st}(P)$, takže $\operatorname{st}(Q_1) = \operatorname{st}(P) - 1$. □

Opakovaným používáním této věty stále snižujeme stupeň jmenovatele a přitom převádíme danou racionální funkci na součet členů tvaru $\frac{A}{(x-a)^r}$, které již integrovat umíme.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x - a} &= \ln|x - a|, \\
\int \frac{dx}{(x - a)^r} &= \frac{1}{1 - r} \cdot \frac{1}{(x - a)^{r-1}}, \quad r > 1
\end{aligned}$$

Například racionální funkci $1/(x^3 - x)$ rozkládáme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x - 1)x(x + 1)} &= \frac{\frac{1}{1 \cdot 2}}{x - 1} + \frac{1 - \frac{1}{2}x(x + 1)}{(x - 1)x(x + 1)} = \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{x + 2}{2x(x + 1)} \\
&= \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{2}{1}}{x} + \frac{x + 2 - 2(x + 1)}{x(x + 1)}\right) \\
&= \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x + 1)}
\end{aligned}$$

Alternativně hledáme rozklad funkce ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)x(x+1)} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}\\ 1 &= Ax(x+1)+B(x-1)(x+1)+Cx(x-1)\end{aligned}$$

Tato rovnice má platit pro všechna x různá od -1, 0 a 1. Ze spojitosti však plyne, že platí i pro tyto hodnoty, a právě jejich dosazením dostáváme postupně $1=2A$, $1=-B$ a $1=2C$. Třetí způsob řešení je rozepsat poslední rovnici do tvaru

$$(A+B+C)x^2+(A-C)x-B-1=0.$$

Tato rovnice má platit pro všechna x, takže $A+B+C=0$, $A-C=0$, $-B-1=0$ a odtud opět dostáváme řešení. Je tedy

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^3-x} &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}(\ln|x-1|-2\ln|x|+\ln|x+1|)=\ln\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|}\end{aligned}$$

To je souhrnný vzorec, který platí v každém z intervalů $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$. Podobně

$$\int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}(\ln|x+1|-\ln|x-1|)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

To je funkce, která se rovná $\operatorname{arg\,tanh}$ pro $|x|<1$ a $\operatorname{arg\,coth} x$ pro $|x|>1$. Podobně rozkládáme funkci $\frac{1}{x^3-x^2}$, jejíž jmenovatel má dvojnásobný kořen

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2(x-1)} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}\\ 1 &= Ax^2+B(x-1)+Cx(x-1)\end{aligned}$$

Pro $x=1$ dostáváme $A=1$, pro $x=0$ dostáváme $B=-1$. Poslední koeficient C získáme tak, že rovnost derivujeme $0=2Ax+B+2Cx-C$, a dosadíme dvojnásobný kořen $x=0$. Odtud $C=B=-1$ takže

$$\int\frac{dx}{x^2(x-1)} = \int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\ln|x-1|-\ln|x|+\frac{1}{x}$$

Tento princip platí obecně. Má-li jmenovatel r-násobný kořen a, existují podle tvrzení 110 koeficienty $A_r,\ldots,A_1$ a mnohočlen $P_r(x)$ tak, že platí

$$\frac{P(x)}{(x-a)^rQ_1(x)}=\frac{A_r}{(x-a)^r}+\frac{A_{r-1}}{(x-a)^{r-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{P_r(x)}{Q_1(x)}$$

Položme $R(x)=\frac{P(x)}{Q_1(x)}$, $R_1(x)=\frac{P_r(x)}{Q_1(x)}$. Pak existují mnohočleny $R_2(x)$, $R_3(x)$, atd. tak že platí

$$\begin{aligned}R(x) &= A_r+A_{r-1}(x-a)+\cdots+A_1(x-a)^{r-1}+R_1(x)(x-a)^r\\ R'(x) &= A_{r-1}+\cdots+A_1(r-1)(x-a)^{r-2}+R_2(x)(x-a)^{r-1}\\ R''(x) &= 2A_{r-2}+\cdots+A_1(r-1)(r-2)(x-a)^{r-3}+R_3(x)(x-a)^{r-2}\quad\ldots\end{aligned}$$

Odtud

$$A_r = R(a), \quad A_{r-1} = R'(a), \quad A_{r-2} = \frac{R''(a)}{2}, \ \ldots, \ A_1 = \frac{R^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}$$

Alternativně po výpočtu $A_r = R(a)$ dělíme celou první rovnost lineárním členem $x - a$ a dosazením $x = a$ získáme A_{r-1}.

Složitější případ nastává, jestliže jmenovatel $Q(x)$, již žádné reálné kořeny nemá. Má-li jmenovatel nějaký komplexní kořen $c = a+bi$, také kořen komplexně sdružený $\overline{c} = a-bi$. Oba tyto kořeny mají stejnou násobnost, to znamená, že $Q(x)$ je dělitelný nějakou mocninou kvadratického reálného mnohočlenu $(x-a-bi)(x-a+bi) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)$. Jmenovatel tedy můžeme rozložit na

$$Q(x) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)^r Q_1(x),$$

kde $Q_1(a+bi) \neq 0$, $Q_1(a-bi) \neq 0$. Pak můžeme opět snížit stupeň jmenovatele:

Tvrzení 111 *Nechť $P(x)$, $Q(x) = (x^2-2ax+a^2+b^2)^r Q_1(x)$ jsou reálné mnohočleny, $Q_1(a+bi) \neq 0 \neq Q_1(a-bi)$. Pak existují reálná čísla A, B a mnohočlen $P_1(x)$, pro které*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2-2ax+a^2+b^2)^r} + \frac{P_1(x)}{(x^2-2ax+a^2+b^2)^{r-1} Q_1(x)}$$

Důkaz: Pišme opět

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2-2ax+a^2+b^2)^r} + \frac{P(x) - (Ax+B)Q_1(x)}{(x^2-2ax+a^2+b^2)^r Q_1(x)}$$

Hledáme taková A a B, aby mnohočlen $P(x) - (Ax+B)Q_1(x)$ měl nulovou hodnotu v bodech $c = a+bi$ a $\overline{c} = a - bi$. Pro A, B dostáváme tak soustavu dvou lineárních rovnic

$$Ac + B = P(c)/Q_1(c)$$
$$A\overline{c} + B = P(\overline{c})/Q_1(\overline{c})$$

s řešením

$$A = \frac{1}{2bi}\left(\frac{P(c)}{Q_1(c)} - \frac{P(\overline{c})}{Q_1(\overline{c})}\right) = \frac{\Im(P(c)/Q_1(c))}{\Im(c)}$$

$$B = \frac{1}{2bi}\left(\frac{cP(\overline{c})}{Q_1(\overline{c})} - \frac{\overline{c}P(c)}{Q_1(c)}\right) = \frac{\Im(cP(\overline{c})/Q_1(\overline{c}))}{\Im(c)}$$

Čísla A, B jsme sice dostali jako řešení soustavy rovnic v komplexním oboru, obě jsou však reálná. Existuje tedy mnohočlen $P_1(x)$, pro který

$$(x^2 - 2ax + a^2 + b^2)P_1(x) = P(x) - (Ax+B)Q_1(x).$$

Pro obecné řešení problému integrace racionálních funkcí tedy zbývá určit integrál tvaru $\int \frac{Ax+B}{((x-a)^2+b^2)^r}\,dx$. Nejprve ho zjednodušíme substitucí $y = (x -$

$a)/b$.

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{((x-a)^2+b^2)^r}\,dx &= \int \frac{A(a+by)+B}{b^{2r}(y^2+1)^r} b\,dy \\ &= \frac{A}{2b^{2r-2}}\int \frac{2y}{(y^2+1)^r}\,dy + \frac{Aa+B}{b^{2r-1}}\int \frac{dy}{(y^2+1)^r}\end{aligned}$$

Substitucí $z=(y^2+1)$, $dz = 2y\,dy$ dostáváme $\int \frac{2y}{(y^2+1)^r} = \int \frac{dz}{z^r}$ a tento integrál již řešit umíme. Zbývá tedy určit integrály $\int \frac{dy}{(1+y^2)^r}$. Pro $r=1$ je to $\arctan x$. Pro $r>1$ odvodíme rekurentní vzorec.

Příklad 112

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^{r+1}} = \frac{y}{2r(1+y^2)^r} + \frac{2r-1}{2r}\int \frac{dy}{(1+y^2)^r}, \quad r>0$$

Důkaz: Pro $r>1$ počítáme pravidlem per partes s funkcemi $f(y) = \frac{1}{(1+y^2)^r}$, $g(y) = y$, $f'(y) = -2ry/(1+y^2)^{r+1}$, $g'(y) = 1$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(1+y^2)^r} &= \frac{y}{(1+y^2)^r} + 2r\int \frac{y^2\,dy}{(1+y^2)^{r+1}} \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^r} + 2r\int \frac{dy}{(1+y^2)^r} - 2r\int \frac{dy}{(1+y^2)^{r+1}} \quad \square\end{aligned}$$

Například pro $r=2$ je

$$\int \frac{dy}{(y^2+1)^2} = \frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2}\arctan y.$$

Pro Integraci funkce $\frac{1}{x^4+1}$ rozložíme jmenovatel v komplexním oboru $x^4+1 = (x^2+i)(x^2-i)$ a $x^2 \pm i = (x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})$. V rozkladu x^4+1 sloučíme komplexně sdružené kořeny a hledáme konstanty A, B, C, D pro které

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+1} &= \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} \\ 1 &= (A+C)x^3 + (B+D-\sqrt{2}A+\sqrt{2}C)x^2 + \\ &\quad (A+C-\sqrt{2}B+\sqrt{2}D)x + B + D\end{aligned}$$

Odtud $A+C=0$, $B+D=1$, takže $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B=D=\frac{1}{2}$, takže

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4+1} &= \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{x^2\sqrt{2}x+1}\,dx - \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{x^2\sqrt{2}x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx - \int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx\right) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{(\sqrt{2}x+1)^2+1} + \frac{dx}{(\sqrt{2}x-1)^2+1}\right) \\ = & \frac{\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \end{aligned}$$

Cvičení

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+1}$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-2x+1}$
5. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^8-1}$
6. $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x-2)^2}$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^3}$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$
14. $\displaystyle\int \frac{x^3+3}{x^2-1}\,dx$

4.5 Speciální substituce

Další třídy funkcí které lze formálně integrovat jsou tvaru $\int R(e^{ax})dx$, kde R je nějaká racionální lomená funkce. Řešíme je substitucí $y = e^{ax}$, $dy = e^{ax}a\,dx = ay\,dx$. Odtud

Příklad 113

$$\int R(e^{ax})dx = \frac{1}{a}\int R(y)\frac{dy}{y}, \quad y = e^{ax}$$

Na pravé straně je integrace racionální funkce. Například

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \quad = \quad \int \frac{1}{1+\frac{1}{y}}\cdot\frac{dy}{y} = \int \frac{dy}{y^2+1} = \arctan(e^x)$$

Také racionální funkce funkcí goniometrických lze integrovat obecným postupem. Zde se jedná ale o racionální lomené funkce dvou proměnných. Mnohočlen dvou proměnných x, y je funkce tvaru

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_{ij}x^i y^j$$

pro reálné koeficienty c_{ij}. Racionální lomená funkce dvou proměnných je podíl dvou mnohočlenů, například $R(x,y) = \frac{x^2+xy-y}{x^3-y^2}$. Je-li $R(x,y)$ racionální lomená funkce, počítáme $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$. Použijeme vzorec $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ a zvolíme substituci $y = \tan\frac{x}{2}$ na intervalu $x \in (-\pi, \pi)$.

$$\begin{aligned}
x &= 2\arctan y, \quad dx = \frac{2\,dy}{1+y^2} \\
\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1+y^2} \\
\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-y^2}{1+y^2}
\end{aligned}$$

Odtud

Příklad 114

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1+y^2}\right) \cdot \frac{2\,dy}{1+y^2}, \quad y = \tan\frac{x}{2}$$

To už je racionální funkce jedné proměnné. Například

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{1+y^2}{1-y^2} \cdot \frac{2\,dy}{1+y^2} = \int \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) dy \\
&= \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|
\end{aligned}$$

Výpočet platí na intevalu $y \in (-1, 1)$, takže $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Podobně

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1}{1+\frac{1-y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{2\,dy}{1+y^2} = \int dy = \tan\frac{x}{2}$$

Dále uvažujeme integrály

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad \text{kde} \quad ad - bc \neq 0$$

a R je racionální lomená funkce. Zvolíme substituci

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad x = \frac{b-dy^n}{cy^n-a}, \quad dx = \frac{ad-bc}{(cy^n-a)^2} n y^{n-1} dy$$

Příklad 115

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{b-dy^n}{cy^n-a}, y\right) \frac{ad-bc}{(cy^n-a)^2} n y^{n-1}\,dy, \quad y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Například integrál $\int \sqrt{\frac{x-1}{x}}$ řešíme v intervalu $x \in (1, +\infty)$ substitucí $y = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$, $y \in (0,1)$, $x = \frac{1}{1-y^2}$, $dx = \frac{2y\,dy}{(1-y^2)^2}$. Rozklad racionální lomené funkce hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{2y^2}{(1-y^2)^2} &= \frac{A}{(1-y)^2} + \frac{B}{(1+y)^2} + \frac{C}{1-y} + \frac{D}{1+y} \\ 2y^2 &= A(1+y)^2 + B(1-y)^2 + C(1-y)(1+y)^2 + D(1+y)(1-y)^2\end{aligned}$$

Pro $y = \pm 1$ dostáváme $A = B = \frac{1}{2}$ a po dosazení

$$\begin{aligned}y^2 - 1 &= C(1-y)(1+y)^2 + D(1+y)(1-y)^2 \\ -1 &= C(1+y) + D(1-y)\end{aligned}$$

a pro $y = \pm 1$ je $C = D = -\frac{1}{2}$. Je tedy

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x-1}{x}}\,dx &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y} + \ln(1-y) - \ln(1+y)\right) \\ &= \frac{y}{1-y^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-y}{1+y} = \sqrt{x(x-1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\end{aligned}$$

Další případ je integrál tvaru $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Můžeme předpokládat, že kvadratický člen pod odmocninou nemá dvojnásobný kořen a $a \neq 0$. Rozeznáváme dva případy. Je-li $a > 0$, volíme substituci

$$y = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x \quad \Rightarrow \quad ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}xy + y^2$$

$$x = \frac{y^2-c}{b-2\sqrt{a}y}, \quad dx = 2\frac{-\sqrt{a}y^2 + by - \sqrt{a}c}{(b-2\sqrt{a}y)^2}dy$$

Příklad 116

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R\left(\frac{y^2-c}{b-2\sqrt{a}y}, \frac{\sqrt{a}(y^2-c)}{b-2\sqrt{a}y} + y\right)\frac{-2\sqrt{a}(y^2 - \frac{by}{\sqrt{a}} + c)}{(b-2\sqrt{a}y)^2}dy$$

Je-li $a < 0$, má kvadratický člen dva reálné kořeny $x_1 < x_2$ (jinak by totiž byl všude záporný). Pro $x \in (x_1, x_2)$ je

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{-a}(x-x_1)\sqrt{\frac{-x+x_2}{x-x_1}}$$

Touto úpravou dostaneme tvar, který již umíme řešit.

Například substitucí $y = \sqrt{x^2+a^2} - x$ řešíme integrál z příkladu 107.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = -\int \frac{(a^2+y^2)^2}{2y} \cdot \frac{dy}{2y^2} = -\frac{1}{4}\left(a^4\frac{y^{-2}}{-2} + 2a^2\ln y + \frac{y^2}{2}\right)$$

Protože $y^{-1} = (\sqrt{x^2+a^2}+x)/a^2$, dostáváme odtud (přičtením vhodné integrační konstanty)

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$$

Cvičení

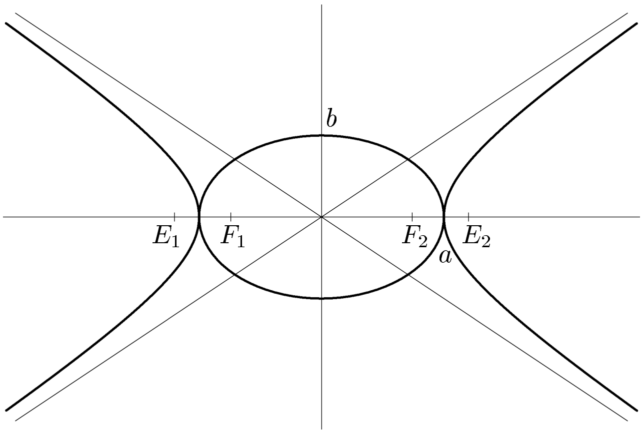
1. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$
2. $\displaystyle\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{2+e^x}$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$
8. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
10. $\displaystyle\int x\sqrt{2-5x}\,dx$
11. $\displaystyle\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}$
13. $\displaystyle\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$
14. $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$
15. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$
16. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
17. $\displaystyle\int \frac{(x-1)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{2\sin x-3\cos x+6}$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$
20. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$

4.6 Rovinné křivky

Plošný obsah rovinné oblasti mezi grafem funkce a osou x počítáme určitým integrálem dané funkce. U složitějších rovinných oblastí tento postup nelze vždy použít. Rovinné oblasti jsou často vymezeny rovinnými křivkami v parametrickém tvaru, tj. dvojicí funkcí $x(t) = f_1(t)$, $y(t) = f_2(t)$. Chápeme je jako záznam pohyby bodu, tj. $[x(t), y(t)]$ chápeme jako pozici bodu v čase t. Alternativně rovinnou křivku vymezujeme rovnicí jako množinu bodů, pro které platí $f(x,y) = 0$, kde f je funkce dvou proměnných.

Elipsa s poloosami a, b má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



Obrázek 4.5: Elipsa a hyperbola

Je to množina bodů, které mají konstantní součet vzdáleností od dvou daných bodů (ohnisek). Je-li $a > b$, je tento součet vzdáleností $2a$ a ohniska jsou na ose x v bodech $F_1 = [-\sqrt{a^2 - b^2}, 0], F_2 = [\sqrt{a^2 - b^2}, 0]$. Parametrické vyjádření elipsy je křivka

$$x(t) = a\cos t, \;\; y(t) = b\sin t$$

Zde se elipsa probíhá proti směru hodinových ručiček od bodu $[a, 0]$ pro $t = 0$ přes bod $[0, b]$ pro $t = \frac{\pi}{2}$ opět do bodu $[a, 0]$ pro $t = 2\pi$.

Hyperbola s poloosami a, b má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hyperbola sestává ze dvou větví, které se při $x \to \pm\infty$ asymptoticky přibližují k přímkám $y = \pm\frac{b}{a}x$. Její kladná větev má parametrickou rovnici

$$x(t) = a\cosh t, \;\; y(t) = b\sinh t$$

a je to množina bodů, které mají konstantní rozdíl vzdáleností $2a$ od dvou daných bodů (ohnisek) $E_1 = [-\sqrt{a^2 + b^2}, 0]$, $E_2 = [\sqrt{a^2 + b^2}, 0]$.

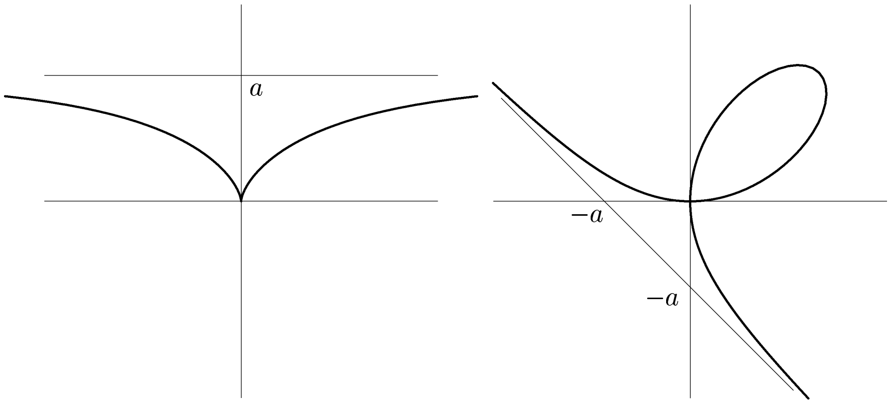
Parabola $x = y^2/2a$ je množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od ohniska $F = [\frac{a}{2}, 0]$ a řídící přímky $x = -a/2$.

Kisoida (obr. 4.6 vlevo) je křivka třetího stupně s rovnicí

$$y(x^2 + y^2) = ax^2, \;\; a > 0.$$

Položíme-li $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, je $r = a\cos^2 t/\sin t$. Protože $y > 0$, je $0 < t < \pi$. Kisoida má tedy parametrickou rovnici

$$x(t) = a\frac{\cos^3 t}{\sin t}, \;\; y(t) = a\cos^2 t, \;\; t \in (0, \pi)$$



Obrázek 4.6: Kisoida a Descartův list

V nulovém bodě má kisoida hrot. Chápeme-li ji jako záznam pohybu, znamená to, že se v tomto bodě zastaví a vrací se stejným směrem. Protože $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = a$, má kisoida asymptotu $y = a$ (i pro $t \to \pi^-$). Pro $t \in (\pi, 2\pi)$ určuje parametrická rovnice kisoidu s rovnicí $y(x^2 + y^2) = -ax^2$.

Descartův list (obr. 4.6 vpravo) je křivka s rovnicí

$$x^3 + y^3 = 3axy, \quad a > 0.$$

Položíme-li $t = y/x$, dostaneme parametrickou rovnici

$$x(t) = \frac{3at}{t^3+1}, \quad y(t) = \frac{3at^2}{t^3+1}, \quad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

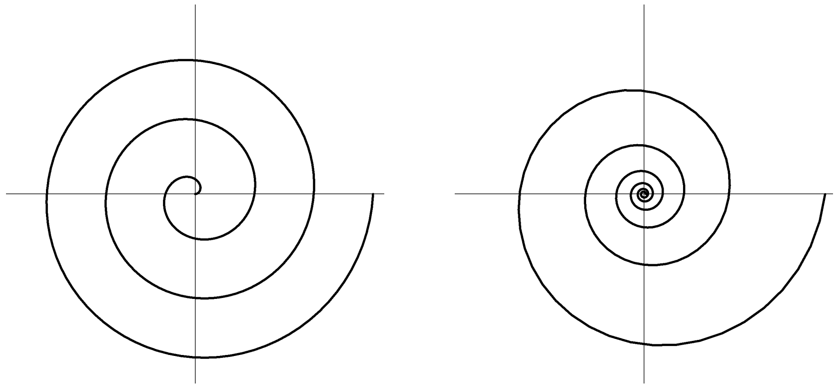
Pro $t \to \pm\infty$ se křivka blíží k nule, pro $t \to -1$ se křivka vzdaluje do nekonečna k asymptotě $x + y = -a$. Položíme-li $t = -1 + 1/s$, dostáváme jinou parametrizaci, při které se křivka blíží k asymptotě $x + y = -a$ pro $s \to \pm\infty$.

$$x(s) = \frac{as^2(1-s)}{s^2 - s + \frac{1}{3}}, \quad y(s) = \frac{as(1-s)^2}{s^2 - s + \frac{1}{3}}$$

Kuželosečky, kisoida a Descartův list jsou algebraické křivky, protože jsou definovány algebraickými rovnicemi. Kuželosečky jsou algebraické křivky druhého stupně, kisoida a Descartův list jsou algebraické křivky třetího stupně.

Spirály vzniknou, obíhá-li bod kolem počátku a přitom se vzdaluje. Vzdaluje-li se od počátku rovnoměrnou rychlostí, vznikne Archimedova spirálu (obr. 4.7 vlevo).

$$x(t) = at\cos t, \quad y(t) = at\sin t$$

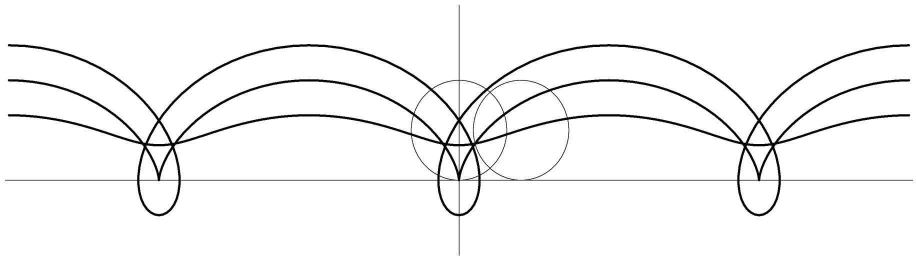


Obrázek 4.7: Archimedova a geometrická spirála

Vzdaluje-li se bod od počátku exponenciální rychlostí, vznikne geometrická spirála (obr. 4.7 vpravo).

$$x(t) = e^{at} \cos t, \quad y(t) = e^{at} \sin t$$

U Archimedovy spirály tvoří průsečíky s osou x aritmetickou posloupnost. U geometrické spirály tvoří tyto průsečíky geometrickou posloupnost.



Obrázek 4.8: Cykloidy

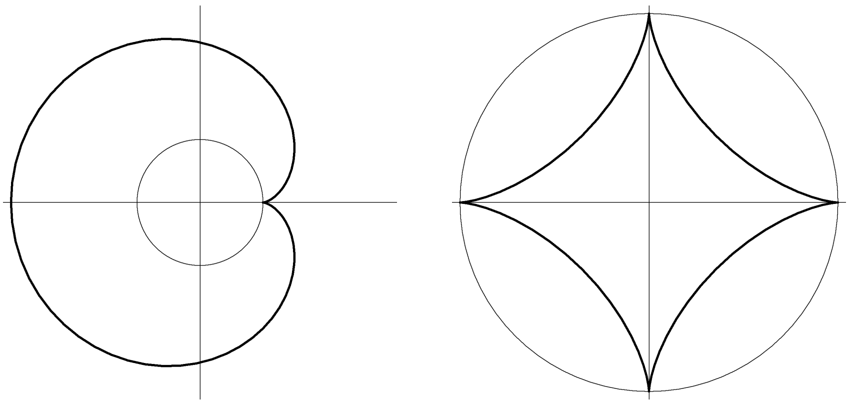
Valí-li se kružnice po přímce, opisuje každý její bod křivku, která se nazývá (prostá) cykloida. Předpokládejme, že v čase $t = 0$ má kružnice s poloměrem r střed v bodě $[0, r]$, takže se dotýká osy x v bodě 0. Odvalí-li se kružnice o úhel t, posune se střed kružnice do bodu $[rt, r]$ a původní bod dotyku je od středu posunut o vektor $r[-\sin t, -\cos t]$. Parametrická rovnici cykloidy tedy je

$$x(t) = r(t - \sin t), \quad y(t) = r(1 - \cos t)$$

Bod kruhu, jehož vzdálenost od středu je a opisuje křivku

$$x(t) = rt - a \sin t, \quad y(t) = r - a \cos t$$

Jedná-li se o vnitřní bod kruhu $a < r$ nazýváme tuto křivku zkrácenou cykloidou. Je-li $a > r$, nazýváme ji prodlouženou cykloidou. Prostá cykloida (při $a = 1$) má hroty na ose x v čase $t = 2k\pi$, kde se bod na okamžik zastaví a potom se vrací zpět.



Obrázek 4.9: Kardioida a astroida

Epicykloida je dráha bodu kružnice poloměru r, která se valí po vnějším obvodu kružnice s poloměrem R. Její parametrická rovnice je

$$x(t) = (R+r)\cos t - r\cos\frac{(R+r)t}{r}, \quad y(t) = (R+r)\sin t - r\sin\frac{(R+r)t}{r}$$

Při $r = R$ vzniká kardioida (obr. 4.9 vlevo) s parametrickými rovnicemi

$$x(t) = R(2\cos t - \cos 2t), \quad y(t) = R(2\sin t - \sin 2t)$$

Hypocykloida je dráha bodu kružnice poloměru r, která se valí po vnitřním obvodu kružnice s poloměrem $R > r$. Její parametrická rovnice je

$$x(t) = (R-r)\cos t + r\cos\frac{(R-r)t}{r}, \quad y(t) = (R-r)\sin t - r\sin\frac{(R-r)t}{r}$$

Při $r = R/4$ vzniká astroida (obr. 4.9 vpravo) s parametrickými rovnicemi

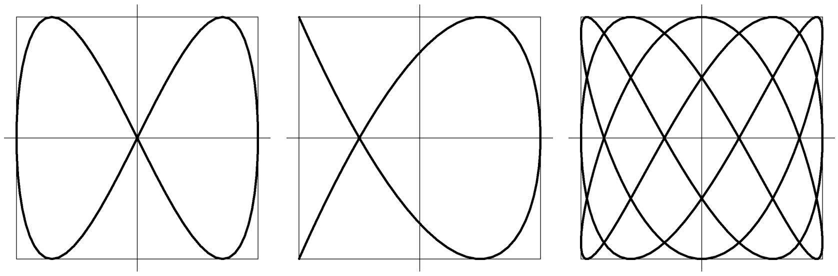
$$x(t) = R\cos^3 t, \quad y(t) = R\sin^3 t$$

Její rovnice je $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{R^2}$.

Lissajoussovy křivky mají parametrickou rovnici

$$x(t) = \cos nt, \quad y(t) = \sin mt$$

kde $n, m > 0$ jsou přirozená čísla. Obě proměnné se tedy mění periodicky s frekvencemi, jejichž podíl je racionální. Na obr. 4.10 jsou Lissajousovy křivky pro $n = 1$, $m = 2$ (vlevo), $n = 2$, $m = 3$ (uprostřed) a $n = 3$, $m = 5$ (vpravo).



Obrázek 4.10: Lissajousovy křivky

4.7 Obsah rovinného útvaru

Interpretace určitého integrálu jako plochy útvaru mezi osou x a grafem funkce dává ihned metodu výpočtu plochy rovinných obrazců. Například plocha útvaru mezi osou x a grafem funkce $\sin x$ v mezích od 0 do π je

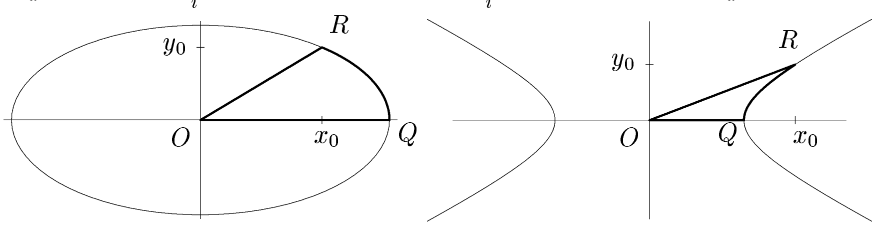
$$P = \int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2$$

Integrací můžeme určit i plochy obecnějších rovinných útvarů, jejichž hranice nemusí nutně být osa x. Předpokládejme, že každá přímka rovnoběžná s osou y vedená ve vzdálenosti x od osy y protíná daný útvar v konečně mnoha úsečkách a označme $L(x)$ jejich celkovou délku. Je-li $L(x)$ spojitá funkce, je obsah útvaru

$$P = \int_a^b L(x) \, dx$$

kde a, b jsou meze na ose x, mezi kterými se útvar rozprostírá. Je-li totiž $(x_i)_{i=0}^p$ infinitesimální dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a m_i, M_i minimální a maximální délka řezu v nestandardním bodě na intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, je

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \sum_i m_i(x_{i+1} - x_i) \leq P \leq \sum_i M_i(x_{i+1} - x_i) \approx \int_a^b f(x) \, dx$$



Obrázek 4.11: Obsah elipsy a hyperboly

Uvažujme elipsu s poloosami $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Označme O počátek souřadné soustavy, $Q = [a, 0]$ vrchol kladné větve elipsy a $R = [x_0, y_0]$ bod elipsy v kladném kvadrantu. Určíme plochu $P(y_0)$ útvaru omezeného úsečkami OQ, OR a obloukem elipsy QR. Za nezávislou proměnnou volíme y. Úsečka OR má rovnici $x = yx_0/y_0$, kladná větev elipsy má rovnici $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$. Podle příkladu 107

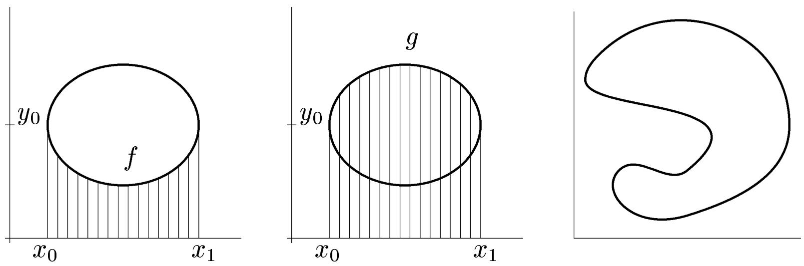
$$\begin{aligned} P(y_0) &= \int_0^{y_0} \left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} - \frac{x_0}{y_0} y \right) dy \\ &= \left[\frac{a}{2b} y \sqrt{b^2 - y^2} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{y}{b} - \frac{x_0}{2y_0} y^2 \right]_0^{y_0} = \frac{ab}{2} \arcsin \frac{y_0}{b} \end{aligned}$$

Speciálně plocha celého útvaru omezeného elipsou je

$$P = 4P(b) = 4 \cdot \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab$$

Uvažujme hyperbolu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Označme O počátek souřadné soustavy, $Q = [a, 0]$ vrchol kladné větve hyperboly a $R = [x_0, y_0]$ bod hyperboly v kladném kvadrantu. Určíme plochu $P(y_0)$ útvaru omezeného úsečkami OQ, OR a obloukem hyperboly QR. Za nezávislou proměnnou zvolíme y. Úsečka OR má rovnici $x = x_0 y/y_0$, kladná větev hyperboly má rovnici $x = \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$. Podle příkladu 107

$$\begin{aligned} P(y_0) &= \int_0^{y_0} \left(\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2} - \frac{x_0}{y_0} y \right) dy \\ &= \left[\frac{a}{2b} y \sqrt{y^2 + b^2} + \frac{ab}{2} \operatorname{arg\,sinh} \frac{y}{b} - \frac{x_0}{2y_0} y^2 \right]_0^{y_0} = \frac{ab}{2} \operatorname{arg\,sinh} \frac{y_0}{b} \end{aligned}$$



Obrázek 4.12: Obsah rovinné oblasti

Předpokládejme nyní, že graf funkce $f : \langle x_0, x_1 \rangle \to \mathbb{R}$ je vyjádřen v parametrickém tvaru dvojicí funkcí $x = x(t)$, $y = y(t)$, kde $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ a $f(x(t)) = y(t)$. Substitucí $x = x(t)$, $dx = x'(t)dt$ dostáváme vzorec pro plošný obsah

$$P = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t))x'(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)\, dt$$

Je-li graf funkce f parametrizován v opačném směru, tj. $f(t_0) = x_1$, $f(t_1) = x_0$, je plošný obsah

$$P = \int_{t_1}^{t_0} y(t)x'(t)\,dt = -\int_{t_1}^{t_0} y(t)x'(t)\,dt$$

Uvažujme nyní funkce $f, g : \langle x_0, x_1\rangle \to \mathbb{R}$ takové že $f(x_0) = g(x_0) = y_0$, $f(x_1) = g(x_1) = y_1$ a $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in (x_0, x_1)$. Určíme plošný obsah rovinné oblasti

$$A = \{[x, y] : \ \ x_0 \le x \le x_1, \ \ f(x) \le y \le g(x)\}$$

Hranici oblasti A vyjádříme uzavřenou křivkou, která od bodu $[x_0, y_0]$ vede po grafu funkce f k bodu $[x_1, y_1]$ a odtud po grafu funkce g zpět do bodu $[x_0, y_0]$. Křivka je dána dvojicí funkcí $x, y : [t_0, t_2] \to \mathbb{R}$ takových, že platí

$$\begin{aligned} x(t_0) = x_0, \ \ x(t_1) = x_1, \ \ f(x(t)) = y(t) \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_0, t_1\rangle \\ x(t_1) = x_1, \ \ x(t_2) = x_0, \ \ g(x(t)) = y(t) \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_1, t_2\rangle \end{aligned}$$

Plošný obsah oblasti A určíme jako rozdíl ploch pod grafy funkcí g a f (obr. 4.12 vlevo a uprostřed).

$$\begin{aligned} P &= -\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx = -\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)\,dt + \int_{t_2}^{t_1} y(t)x'(t)\,dt \\ &= -\int_{t_0}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt \end{aligned}$$

Vzorec platí obecně pro každou rovinnou oblast vymezenou uzavřenou rovinnou křivkou, pokud tato křivka probíhá proti směru hodinových ručiček (obr. 4.12 vpravo). Hraniční křivku rozložíme na úseky, kde ji vyjádříme jako grafy funkcí a v každém z těchto úseků určíme plochu mezi ní a osou x. Například obsah plochy omezené elipsou $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$ s poloosami a a b je

$$\begin{aligned} P &= -\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} ab\sin^2 t = ab\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt \\ &= \frac{ab}{4}[2t - \sin 2t]_0^{2\pi} = \pi ab \end{aligned}$$

Plošný obsah oblasti omezené kardioidou $x(t) = R(2\cos t - \cos 2t)$, $y(t) = R(2\sin t - \sin 2t)$ je

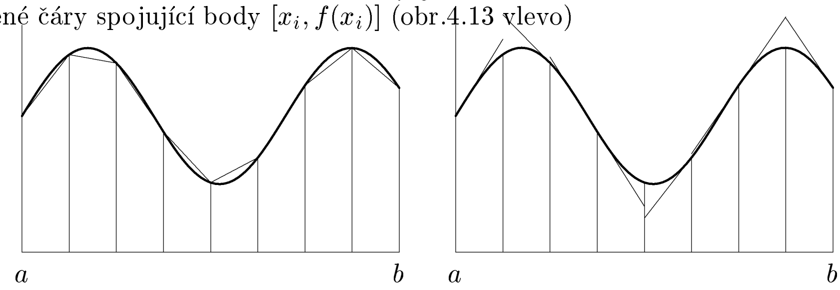
$$\begin{aligned} P &= -\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,dt = R^2\int (4\sin^2 t - 6\sin t\sin 2t + 2\sin^2 2t)\,dt \\ &= R^2\int_0^{2\pi} (2 - 2\cos 2t - 3\sin t + 3\sin 3t + 1 - \cos 4t)\,dt = 6\pi R^2 \end{aligned}$$

Cvičení Určete plošné obsahy oblastí omezených křivkami

1.	$x(t) = \pm r(t - \sin t)$,	$y(t) = r(1 - \cos t)$	cykloida
2.	$x(t) = r\cos^3 t$,	$y(t) = r\sin^3 t$	astroida
3.	$x(t) = \cos nt$,	$y(t) = \sin nt$	Lissajousovy křivky
4.	$x(t) = r\sin 3t\cos t$,	$y(t) = r\sin 3t\sin t$	třílístek
5.	$x(t) = r\sqrt{\cos 2t}\cos t$,	$y(t) = r\sqrt{\cos 2t}\sin t$	lemniskáta
6.	$x(t) = (3 + 2\cos t)\cos t$,	$y(t) = (3 + 2\cos t)\sin t$	

4.8 Délka křivky

Uvažujme diferencovatelnou funkci f a počítejme délku jejího grafu v mezích od a do b. Pro infinitesimální dělení $(x_i)_{i=0}^p$ je hledaná délka křivky větší než délka lomené čáry spojující body $[x_i, f(x_i)]$ (obr.4.13 vlevo)



Obrázek 4.13: Délka křivky

$$\begin{aligned}
L &\geq \sum_{i=0}^{p-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2} \\
&\approx \sum_{i=0}^{p-1} (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \\
&\approx \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx
\end{aligned}$$

Pro horní odhad zvolme v intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ bod y_i, ve kterém je absolutní hodnota derivace $|f'(y_i)|$ maximální. Úsek křivky v intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ má pak délku, která je menší nebo rovna délce úsečky nad tímto intervalem se sklonem $f'(y_i)$ (obr. 4.13 vpravo).

$$L \leq \sum_{i=0}^{p-1} (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + (f'(y_i))^2} \approx \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Délka grafu diferencovatelné funkce v mezích od a do b je tedy

$$L(a,b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

Pro parabolu $f(x) = x^2/2a$ je $\sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{x^2 + a^2}/a$. Její délka v mezích od 0 do x_0 je podle příkladu 107

$$\begin{aligned} L(x_0) &= \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}\, dx = \frac{1}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})\right]_0^{x_0} \\ &= \frac{x_0}{2a}\sqrt{x_0^2 + a^2} + \frac{a}{2}\ln\frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 + a^2}}{a} = \frac{a}{2}\operatorname{arg\,sinh}\frac{x_0}{a} \end{aligned}$$

Délka grafu funkce $f(x) = \frac{1}{a}\cosh ax$ v mezích od 0 do x_0 je

$$\begin{aligned} L(x_0) &= \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \sinh^2 ax}\, dx = \int_0^{x_0} \cosh ax\, dx \\ &= \frac{1}{a}[\sinh ax]_0^{x_0} = \frac{1}{a}\sinh ax_0 \end{aligned}$$

Předpokládejme, že graf funkce $f : \langle x_0, x_1\rangle \to \mathbb{R}$ je zadán v parametrickém tvaru diferencovatelnými funkcemi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $f(x(t)) = y(t)$ a $x'(t) \geq 0$. Pak jeho délka je

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + f'^2(x(t))}x'(t)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + (f'(x(t))x'(t))^2}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt \end{aligned}$$

Je-li graf funkce parametrizován v opačném směru, tj. $x(t_0) = x_1$, $x(t_1) = x_0$ a $x'(t) \leq 0$, je

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \int_{t_1}^{t_0} \sqrt{1 + f'^2(x(t))}x'(t)\, dt \\ &= -\int_{t_1}^{t_0} \sqrt{x'^2(t) + (f'(x(t))x'(t))^2}\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt \end{aligned}$$

Délka křivky tedy nezávisí na směru její parametrizace. Například pro kružnici $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\sin t$ je $x'^2(t) + y'^2(t) = r^2$, takže její délka je

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r$$

Pro cykloidu $x(t) = r(t - \sin t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$ je

$$x'^2(t) + y'^2(t) = r^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = 4r^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

takže její délka je

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = 2r \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 4r[-\cos\frac{t}{2}]_0^{2\pi} = 8r$$

Cvičení Určete délky křivek

1. $x(t) = r(2\cos t - \cos 2t)$, $y(t) = r(2\sin t - \sin 2t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$
2. $x(t) = r\cos^3 t$, $y(t) = r\sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ astroida
3. $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$, $t \in \langle 0, t_0\rangle$ spirála
4. $x(t) = r(\cos t + t\sin t)$, $y(t) = r(\sin t - t\cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$
5. $x(t) = r(\sinh t - t)$, $y(t) = r(\cosh t - 1)$, $t \in \langle 0, t_0\rangle$.
6. $x(t) = \cosh^3 t$, $y(t) = \sinh^3 t$, $t \in \langle 0, t_0\rangle$
7. $y = e^x$, $x \in \langle 0, x_0\rangle$
8. $y = \ln\cos x$, $x \in \langle 0, x_0\rangle$, kde $x_0 < \frac{\pi}{2}$

4.9 Objem tělesa

Objem prostorového tělesa určíme tak, že integrujeme plochu řezů vedených v rovnoběžných rovinách. Předpokládejme, že tyto řezy jsou kolmé na osu x a označme $P(x)$ plochu řezu vedeného v bodě x. Pro infinitesimální dělení $(x_i)_{i=0}^p$ označme M_i, m_i maximum a minimum $P(x)$ v intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$. Pak objem i-té desky je mezi hodnotami $m_i(x_{i+1} - x_i)$ a $M_i(x_{i+1} - x_i)$. Rozprostírá-li se těleso v mezích od a do b, platí pro jeho objem V

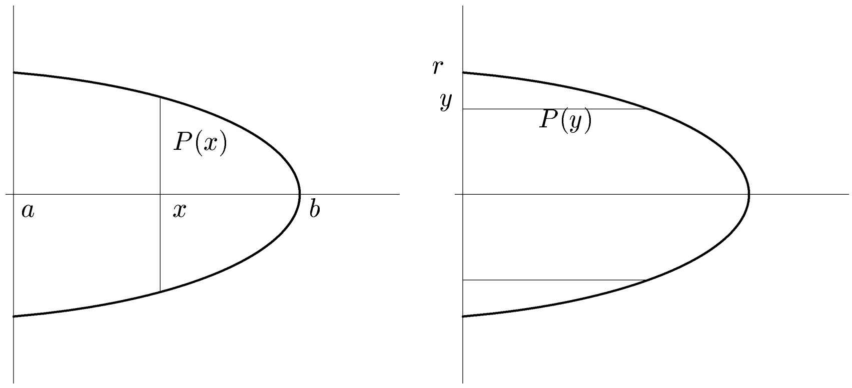
$$\int_a^b P(x)\, dx \approx \sum_i m_i(x_{i+1} - x_i) \le V \le \sum_i M_i(x_{i+1} - x_i) \approx \int_a^b P(x)\, dx$$

Je-li $P(x)$ spojitá funkce, je objem tělesa

$$V = \int_a^b P(x)\, dx.$$

Například plocha řezu koule s poloměrem r vedeného ve vzdálenosti x od středu je $P(x) = \pi(r^2 - x^2)$. Objem koule s poloměrem r je tedy

$$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Obrázek 4.14: Objem rotačních těles

Obecněji uvažujeme rotační tělesa, která vzniknou rotací grafu funkce $f(x)$ kolem osy x. Plocha řezu v bodě x je pak $P(x) = \pi f^2(x)$ (obr. 4.14 vlevo), takže objem rotačního tělesa je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

kde a, b jsou meze, mezi kterými se těleso rozprostírá. Jiným způsobem počítáme objem rotačního tělesa integrací plochy nad mezikružím. Předpokládejme, že fukce f je monotónní, takže má inverzní funkci $g : \langle 0, r\rangle \to \langle a, b\rangle$. Vedeme řez tělesa nikoliv rovinou, ale válcovou plochou, jejíž osa je x a poloměr y. Plocha tohoto řezu je $P(y) = 2\pi y g(y)$ (obr. 4.14 vpravo). Nechť $(y_i)_{i=0}^{p}$ je infinitesimální dělení intervalu $\langle 0, r\rangle$. Plocha mezikruží s poloměry y_i a y_{i+1} je $\pi(y_{i+1}^2 - y_i^2)$. Je-li g klesající, je objem tělesa v mezích

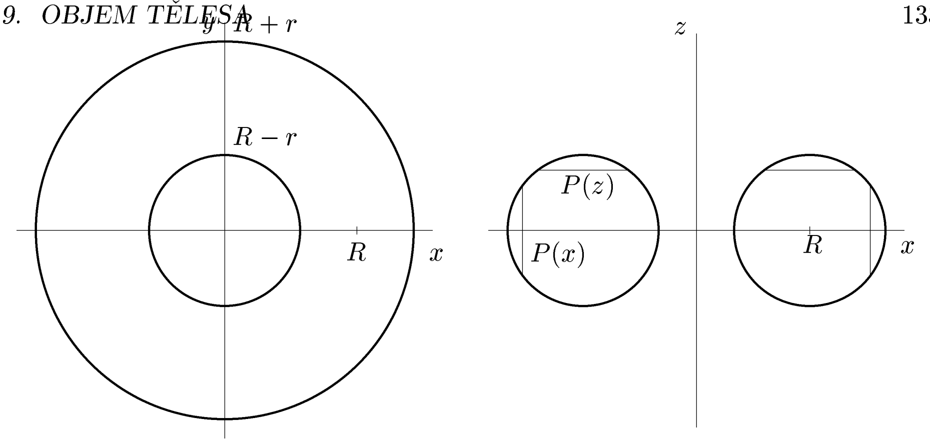
$$\sum_{i=0}^{p-1} \pi(y_{i+1}^2 - y_i^2)g(y_{i+1}) \le V \le \sum_{i=0}^{p-1} \pi(y_{i+1}^2 - y_i^2)g(y_i)$$

Protože $y_{i+1} \approx y_i$ a $g(y_i) \approx g(y_{i+1})$, je

$$V \approx \sum_{i=0}^{p-1} 2\pi y_i(y_{i+1} - y_i)g(y_i) = \int_0^r 2\pi y g(y)\,dy$$

S použitím substituce $y = \sqrt{r^2 - z^2}$, $dy = -z\,dz/y$ počítáme touto metodou objem koule

$$V = 2\int_0^r 2\pi y\sqrt{r^2 - y^2}\,dy = 4\pi \int_r^0 yz\frac{-z\,dz}{y} = 4\pi \int_0^r z^2\,dz = \left[4\pi\frac{z^3}{3}\right]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Obrázek 4.15: Torus

Torus je těleso, které vznikne v třírozměrném prostoru rotací kružnice $(x-R)^2+z^2=r^2$ kolem osy z. Jeho rovnice je tedy

$$(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=r^2$$

Řez vedený kolmo na osu z sestává z mezikruží s poloměry $R-\sqrt{r^2-z^2}$ a $R+\sqrt{r^2-z^2}$. Jeho plocha je

$$P(z)=\pi(R+\sqrt{r^2-z^2})^2-\pi(R-\sqrt{r^2-z^2})^2=4\pi R\sqrt{r^2-z^2}$$

Odtud substitucí $z=r\sin x$

$$V=8\pi R\int_0^r\sqrt{r^2-z^2}\,dz=8\pi Rr^2\int_0^{\pi/2}\cos^2x\,dx=2\pi^2Rr^2$$

Alternativně $P(x)=4\pi x\sqrt{r^2-(R-x)^2}$ je povrch válcové plochy s osou z a poloměrem x. Substitucí $R-x=r\sin y$

$$\begin{aligned}
V &= \int_{R-r}^{R+r}P(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}4\pi(R-r\sin y)r\cos y(-r\cos y)\,dy\\
&= 2\pi r^2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2y)(R-r\sin y)\,dy\\
&= 2\pi r^2\left[Rt+\frac{R\sin 2y}{2}+\frac{r\cos 3y}{2}-\frac{r\cos y}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi^2Rr^2
\end{aligned}$$

Cvičení Určete objem těles omezeného plochami

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $z=\pm c$
3. $y^2+z^2=\sin^2x$, $x=0,\pi$

4. $x = y^2 + z^2$, $x = 0, r$

5. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz = r^2$

6. $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$, $0 \le z \le r$

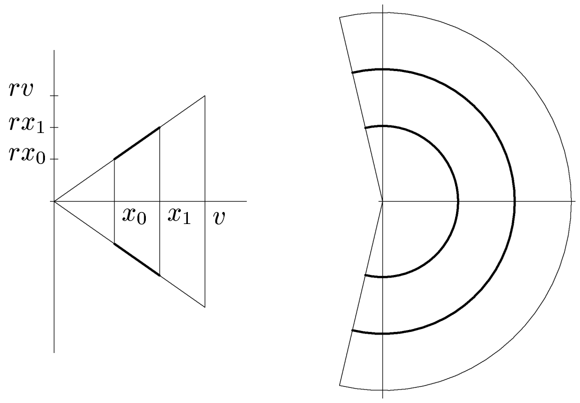
7. $x + y + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

8. $x^2 + z^2 = r^2$, $y^2 + z^2 = r^2$

4.10 Povrch rotačních těles

Uvažujme kužel s výškou v a poloměrem základny rv. V třírozměrném prostoru je vytvořen rotací úsečky $y = rx$ kolem osy x nad intervalem $\langle 0, v\rangle$. Plášť tohoto kužele je kruhová výseč s poloměrem $v\sqrt{1+r^2}$ a délkou oblouku $2\pi vr$. Její plošný obsah je $P = \pi v^2 r\sqrt{1+r^2}$. Povrch komolého kužele nad intervalem $\langle x_0, x_1\rangle$ je

$$P(x_0, x_1) = \pi r\sqrt{1+r^2}(x_1^2 - x_0^2) = \pi\sqrt{1+r^2}(rx_1 + rx_0)(x_1 - x_0).$$



Obrázek 4.16: Povrch kužele

Určeme povrch tělesa vytvořeného rotací grafu funkce $y = f(x)$ kolem osy x nad intervalem $\langle a, b\rangle$. Předpokládáme, že f má spojitou derivaci. Pro infinitesimální dělení $(x_i)_{i=0}^{p}$ zvolíme $z_i \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$, kde je absolutní hodnota derivace $|f'(z_i)|$ maximální a $y_i \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$, kde je hodnota funkce největší. Povrch části tělesa v intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ odhadneme zdola povrchem komolého kužele s poloměry $f(x_i)$ a $f(x_{i+1})$. Pro horní odhad použijeme komolý kužel se sklonem $f'(z_i)$ a menším poloměrem $f(y_i)$. Pro povrch rotačního tělesa pak platí

$$\begin{aligned} S &\ge \sum_i \pi(f(x_i) + f(x_{i+1}))\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2}(x_{i+1} - x_i) \\ S &\le \sum_i 2\pi f(y_i)\sqrt{1 + f'^2(z_i)}(x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

Dolní i horní odhad je nekonečně blízko integrálu

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

Například kulová plocha s poloměrem r vznikne rotací kružnice $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, takže povrch koule s poloměrem r je

$$S = 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4\pi \int_0^r r\, dx = 4\pi r^2$$

Povrch toru vzniklého rotací kružnice $(x - R)^2 + z^2 = r^2$ kolem osy z počítáme jako součet povrchů vytvořených grafy funkcí $f(z) = R \pm \sqrt{r^2 - z^2}$. Pro tyto funkce je $f'(z) = \mp z/\sqrt{r^2 - z^2}$ a $\sqrt{1 + f'^2(z)} = r/\sqrt{r^2 - z^2}$. Povrch toru je tedy

$$\begin{aligned} S &= 4\pi \int_0^r \left(R + \sqrt{r^2 - z^2} + R - \sqrt{r^2 - z_2}\right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - z^2}}\, dz \\ &= 8\pi Rr \left[\arcsin \frac{z}{r}\right]_0^r = 4\pi Rr \end{aligned}$$

Cvičení Určete povrch těles vytvořených rotací $y = f(x)$ kolem osy x.

1. $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{a}}$, $0 \le x \le a$
2. $f(x) = a \cos \frac{\pi x}{2b}$, $|x| \le b$
3. $f(x) = \tan x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
5. $x(t) = r \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$
6. $x(t) = r(t - \sin t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$ $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

4.11 Těžiště a gravitační síla

Uvažujme nehmotnou tyč podepřenou v bodě x, na které jsou umístěny hmotné body s hmotnostmi m_i v pozicích x_i. Při jejím vychýlení o (infinitesimální) úhel α se vykoná práce $\sum_{i=1}^n m_i g(x - x_i) \sin \alpha$. Těžiště je charakterizováno tím, že tato práce je nulová. Jeho souřadnice je tedy

$$x_T = \sum_{i=1}^n m_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^n m_i$$

Jsou-li hmotné body m_i rozloženy v rovině v bodech $[x_i, y_i]$, dává tento vzorec první souřadnici těžiště. Jeho druhá souřadnice je

$$y_T = \sum_{i=1}^n m_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^n m_i$$

Je-li hmota na přímce rozložena spojitě, vyjadřujeme její rozložení hustotou

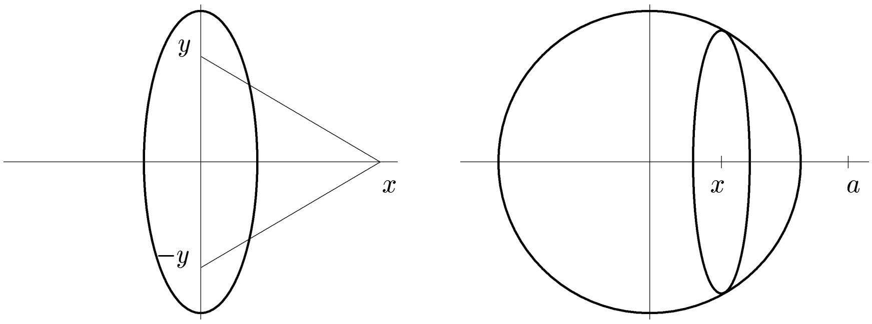
$$\varrho(x) = \lim_{y \to x} \frac{M(x,y)}{y-x}$$

kde $M(x,y)$ je hmotnost soustavy mezi body x a y. Je-li celá soustava rozložena mezi body a, b je celková hmotnost, a pozice těžiště dána vzorci

$$\begin{aligned} m &= \int_a^b \varrho(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{p-1} \varrho(x_i)(x_{i+1}-x_i) \\ x_T &= \frac{1}{m}\int_a^b x\varrho(x)\,dx = \sum_{i=0}^{p-1} \varrho(x_i)(x_{i+1}-x_i)x_i/m \end{aligned}$$

Takto také můžeme počítat těžiště rovinných a prostorových útvarů. Například hmotnost půlkruhové desky s poloměrem r je úměrná její ploše $\pi r^2/2$. Substitucí $y = r^2 - x^2$, $dy = -2x\,dx$ počítáme vzdálenost těžiště půlkruhové desky od jejího středu

$$a = \frac{2}{\pi r^2}\int_0^r 2x\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{-2}{\pi r^2}\int_{r^2}^0 = \frac{2}{\pi r^2}\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^{r^2} = \frac{4r}{3\pi}$$



Obrázek 4.17: Gravitační síla

Gravitační síla mezi dvěma hmotnými body je přímo úměrná jejich hmotnosti a nepřímo úměrná čtverci jejich vzdálenosti. Gravitační sílu mezi dvěma tělesy se známými rozměry a hustotou počítáme integrací infinitesimálních sil, kterými na sebe působí infinitesimální objemové oblasti obou těles. Určíme takto vzájemnou gravitační sílu dvou koulí. Vyjádříme nejprve sílu, kterou je hmotný bod (s jednotkovou hmotností) na ose x přitahován ke kruhové desce kolmé na osu x s poloměrem r a s plošnou hustotou ϱ. Síly, kterými na tento bod působí dva protilehlé body desky, se sčítají do výslednice působící ve směru osy x (obr. 4.17 vlevo). Označme x vzdálenost hmotného bodu od středu desky. Síla působící na bod ve vzdálenosti y od středu kruhu je nepřímo úměrná čtverci jejich vzdálenosti x^2+y^2 a její průmět do osy x je úměrný

$$(x^2+y^2)^{-1} \cdot x/\sqrt{x^2+y^2} = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Sečteme-li tyto síly pro infinitesimální mezikruží poloměru y, dostáváme výslednou sílu

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^r \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi\varrho y\,dy = \pi\varrho x\left[-2(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^r \\ &= 2\pi\varrho\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\right) \end{aligned}$$

kde ϱ je plošná hustota desky.

Dále určíme gravitační sílu, kterou působí koule s poloměrem R a (prostorovou) hustotou ϱ na hmotný bod (s jednotkovou hmotností) ve vzdálenosti a od jejího středu. Řez koulí ve vzdálenosti x od středu má poloměr $r = \sqrt{R^2-x^2}$, takže celková gravitační síla je

$$F = \int_{-R}^{R} 2\pi\varrho\left(1-\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+R^2-x^2}}\right)dx$$

Integrál řešíme substitucí $z=\sqrt{a^2-2ax+R^2}$, $x=(a^2+R^2-z^2)/2a$.

$$\begin{aligned} \int \frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+R^2}}\,dx &= \int \frac{a^2-R^2+z^2}{2az}\cdot\frac{-2z\,dz}{2a} \\ &= -\frac{z}{6a^2}(3a^2-3R^2+z^2) \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} F &= 2\pi\varrho\left[x+\frac{\sqrt{a^2-2ax+R^2}}{6a^2}(4a^2-2ax-2R^2)\right]_{-R}^{R} \\ &= 2\pi\varrho\left(2R+\frac{(a-R)(2a^2-aR-R^2)-(a+R)(2a^2+aR-R^2)}{3a^2}\right) \\ &= 2\pi\varrho\left(2R+\frac{-2a^2R-2R(2a^2-R^2)}{3a^2}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3\varrho/a^2 = m/a^2 \end{aligned}$$

kde m je hmotnost koule. Vidíme, že hmotný bod je přitahován ke kouli stejnou silou, jakou by byl přitahován k jejímu středu, kdyby v něm hmotnost koule byla soustředěna. Výpočet platí za předpokladu, že uvažovaný bod je mimo kouli, $a>R$. Nakonec gravitační síla mezi dvěma koulemi s hmotnostmi m_1, m_2, jejichž středy jsou ve vzdálenosti $a>r_1+r_2$, je $F=m_1m_2/a^2$. Každý bod první koule je ke druhé kouli přitahován stejnou silou, jako kdyby hmotnost této koule byla soustředěna v jejím středu. Tím se výpočet převádí na předchozí úlohu.

Cvičení Najděte souřadnice těžiště oblasti ohraničené křivkami

1. $ax=y^2$, $ay=x^2$
2. $y=\sin x$, $y=0$, $x=0,\pi$
3. kruhové výseče úhlu φ
4. kruhové úseče úhlu φ

4.12 Nekompaktní intervaly

Integrací lze také počítat plochy neomezených útvarů vymezených osou x a grafem nějaké funkce. Podle věty 101 primitivní funkce existuje pro každou spojitou funkci na intervalu libovolného typu. Interval (a, b) neobsahuje sice krajní body a, b ale jeho obraz $(a, b)^*$ obsahuje monády a^+ a b^-. Podobně interval $(a, +\infty)$ obsahuje monády a^+, $+\infty$. Určitý integrál tedy definujeme jako rozdíl limit na příslušných monádách. Jednostranné monády nazýváme monády tvaru a^+, a^-, $-\infty$ a $+\infty$.

Definice 117 *Nechť f je spojitá funkce na intervalu, A, B monády a nechť F je funkce primitivní k f. Definujme*

$$\int_A^B f(x)\,dx := [F(x)]_A^B := \lim_{x\to B} F(x) - \lim_{x\to A} F(x)$$

Intergál existuje, pokud obě monády A i B jsou obsaženy ve společném definičním oboru funkcí f a F, pokud existují obě limity a pokud rozdíl těchto limit není neurčitý výraz. Uvedená definice zahrnuje i případ integrace na kompaktním intervalu $\langle a, b\rangle$, kdy $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ jsou bodové monády. Pokud určitý integrál existuje, je to monáda. V případě, že tato monáda je vlastní, píšeme

$$\int_A^B f(x)\,dx = c \quad\Leftrightarrow\quad \int_A^B f(x)\,dx := c^\bullet$$

Například

$$\begin{aligned}
\int_{0^+}^{+\infty} \frac{dx}{x} &:= [\ln x]_{0^+}^{+\infty} := +\infty - (-\infty) = +\infty \\
\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} &:= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} := \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} - (-1) = 1 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &:= \lim_{x\to+\infty} \arctan x - \lim_{x\to-\infty} \arctan x = \pi \\
\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx &:= [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1 \\
\int_0^{+\infty} \cos x\,dx &:= [\sin x]_0^{+\infty} := \lim_{x\to+\infty} \sin x - 0 \ \text{ neexistuje} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\,dx}{1+x^2} &:= [\ln(1+x^2)]_{-\infty}^{+\infty} := +\infty - \infty \ \text{ neexistuje}
\end{aligned}$$

Definici integrálu lze rozšířit na funkce, které mají konečný počet bodů nespojitosti

Definice 118 *Nechť $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$, $n \in \mathbb{N}$ a nechť f je funkce spojitá v každém intervalu (c_i, c_{i+1}), $0 \le i < n$. Definujeme*

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k^+}^{c_{k+1}^-} f(x)\,dx$$

pokud integrály vpravo a jejich součet existují.

Například $\int_a^b \operatorname{sgn}(x)\,dx = |b| - |a|, \quad a, b \in \mathbb{R}$. V tomto smyslu je absolutní hodnota primitivní funkce k $\operatorname{sgn}(x)$, přesto že $|x|$ nemá derivaci v nule. Pravidla pro výpočet integrálů platí s určitými modifikacemi i na nekompaktních intervalech.

Tvrzení 119 *Nechť f, g jsou spojité funkce a A, B monády.*

$$\int_A^B (af(x) + bg(x))\,dx := a\int_A^B f(x)\,dx + b\int_A^B g(x)\,dx$$

Důkaz plyne z tvrzení 103 a 28. Nechť F, G jsou primitivní funkce k f a g. Pak $aF + bG$ je primitivní funkce k $af + bg$, takže

$$\begin{aligned}
\int_A^B (af(x) + bg(x))\,dx &:= \lim_{x\to B}(aF(x) + bG(x)) - \lim_{x\to A}(aF(x) + bG(x)) \\
&:= a(\lim_{x\to B} F(x) - \lim_{x\to A} F(x)) + b(\lim_{x\to B} G(x) - \lim_{x\to A} G(x))
\end{aligned}$$

Tvrzení 120 *Nechť A, B jsou monády a f, g diferencovatelné funkce na intervalu.*

$$\int_A^B f(x)g'(x)\,dx := [f(x)g(x)]_A^B - \int_A^B f'(x)g(x)\,dx$$

Důkaz bezprostředně plyne z tvrzení 104, 28.

Tvrzení 121 *Nechť A, B jsou monády, $g : I \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce, nechť $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a nechť existují limity $\lim_{x\to A} g(x) := C$, $\lim_{x\to B} g(x) := D$. Pak*

$$\int_A^B f(g(x))g'(x)\,dx := \int_C^D f(y)\,dy$$

Je-li dokonce $C = \lim_{x\to A} g(x)$, $D = \lim_{x\to B} g(x)$, je

$$\int_C^D f(y)\,dy := \int_A^B f(g(x))g'(x)\,dx$$

Důkaz: Nechť F je primitivní funkce k f. Podle tvrzení 28 je

$$\begin{aligned}
\int_A^B f(g(x))g'(x)\,dx &:= \lim_{x\to B} F(g(x)) - \lim_{x\to A} F(g(x)) \\
&:= \lim_{y\to D} F(y) - \lim_{y\to C} F(y) := \int_C^D f(y)\,dy
\end{aligned}$$

Je-li navíc $C = \lim_{x\to A} g(x)$, $D = \lim_{x\to B} g(x)$, je $\lim_{y\to C} F(y) := \lim_{x\to A} F(g(x))$ a výpočet lze obrátit. $\square$

Pravidlo substituce tedy používáme na obě strany. V prvním případě stačí ukázat pouze inkluzi monád $\lim\limits_{x\to A} g(x) := C$, v druhém případě je třeba rovnost těchto monád. Například substitucí $y = x^2$ řešíme

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} := \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-y} = \frac{1}{2}$$

Substitucí $y = \sin x$ řešíme

$$\int_0^{1^-} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} := \int_0^{(\pi/2)^-} dy = \frac{\pi}{2}$$

Cvičení

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}$

7. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$

13. $\displaystyle\int_{1^+}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

14. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

15. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

16. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

4.13 Konvergence integrálů

Definice 122 *Integrál* $\displaystyle\int_A^B f(x)\,dx$ *konverguje, diverguje nebo osciluje, podle toho zda je vlastní, nevlastní nebo neexistuje. Integrál konverguje absolutně, konverguje-li integrál* $\displaystyle\int_A^B |f(x)|\,dx$.

Tvrzení 123 *Nechť f je funkce spojitá na intervalu, nechť F je funkce primitivní k f a nechť A, B jsou monády. Pak integrál $\int_A^B f(x)\,dx$ konverguje právě když platí*

$$x, y \in A \quad \Rightarrow \quad \int_x^y f(s)\,ds \approx 0,$$

$$x, y \in B \quad \Rightarrow \quad \int_x^y f(s)\,ds \approx 0$$

Důkaz: Nechť F je primitivní funkce k f. Podle Bolzano-Cauchyovy věty 34 je limita $\lim\limits_{x\to A} F(x)$ konečná právě když pro každá $x, y \in A$ platí $F(x) \approx F(y)$. □

Tvrzení 124 *Nechť A,B jsou jednostranné monády a f, g, h funkce na stejném intervalu takové, že $(\forall x)(f(x) \leq g(x) \leq h(x))$.*

1. Jestliže konvergují $\displaystyle\int_A^B f(x)\,dx$ a $\displaystyle\int_A^B h(x)\,dx$, konverguje i $\displaystyle\int_A^B g(x)\,dx$.

2. Jestliže $\displaystyle\int_A^B g(x)\,dx$ konverguje absolutně, pak konverguje.

3. Jestliže $\displaystyle\int_a^B f(x)\,dx := +\infty$, je i $\displaystyle\int_A^B g(x)\,dx := +\infty$.

Důkaz: 1. Pro $x, y \in A$ je $0 \approx \displaystyle\int_x^y f(s)\,ds \leq \int_x^y g(s)\,ds \leq \int_x^y h(s)\,ds \approx 0$, takže $\displaystyle\int_A^B g(s)\,ds$ konverguje.
2. plyne z 1 pro $f(x) = -|g(x)|$ a $h(x) = |g(x)|$.
3. Nechť $F(x)$, $G(x)$ jsou funkce primitivní k $f(x)$ a $g(x)$. Funkce $G-F$ je neklesající, takže na každé jednostranné monádě má limitu: buď vlastní nebo $+\infty$. Z toho plyne

$$\int_A^B g(x)\,dx := \int_A^B f(x)\,dx + \int_A^B (g(x) - f(x))\,dx := +\infty$$

Například integrál

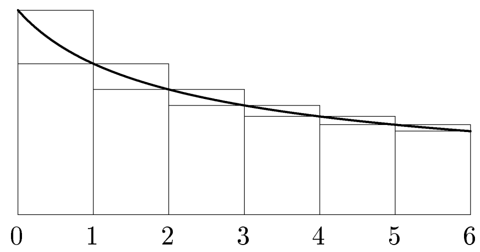
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} \leq \int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 + \left[-x^{-1}\right]_0^{+\infty} = 2$$

konverguje zatímco integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+e^{-x}}} > \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \left[2\sqrt{x+1}\right]_0^{+\infty} := +\infty$$

diverguje

Tvrzení 125 (Integrální kritérium konvergence) *Nechť f je spojitá neklesající a nezáporná funkce na intervalu $\langle 0, +\infty)$. Pak řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ konverguje právě když konverguje integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.*



Obrázek 4.18: Integrální kritérium konvergence

Důkaz: Protože funkce f je nezáporná, jak součet řady tak integrál existuje a jeho hodnota je buď $+\infty$ nebo vlastní reálné číslo. Pro $x \in \langle k-1, k\rangle$ je $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$, takže

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1)$$

Sečtením těchto nerovností pro $k = 1, \ldots, n$ dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_{0}^{n} f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

Je-li navíc f konvexní, je

$$\int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq \frac{f(k-1)+f(k)}{2}$$

Na pravé straně je obsah lichoběžníka se základnami $f(k-1)$ a $f(k)$ a výškou 1. $\square$

Pro funkci $f(x) = (x+1)^{-a}$ je

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^a} = \left[\frac{(1+x)^{1-a}}{1-a}\right]_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{1-a} = \frac{1}{a-1}, \quad a > 1$$
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^a} = \left[\frac{(1+x)^{1-a}}{1-a}\right]_0^{+\infty} = +\infty - \frac{1}{1-a} = +\infty, \quad a < 1$$
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x+1} = [\ln(1+x)]_0^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty, \quad a = 1$$

Pro $a > 1$ je $f(x) = (x+1)^{-a}$ konvexní, takže dostáváme odhad

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^a} < \quad \frac{1}{a-1} \quad < \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^a}$$

Příklad 126

$$\frac{a+1}{2(a-1)} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} < \frac{a}{a-1}, \quad a > 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} := +\infty, \quad 0 \le a \le 1$$

Integrální kriterium znovu ukazuje, že harmonická řada diverguje, navíc však ještě dává odhad na součet jejích prvních n členů. Sečtením nerovností

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$$

pro k od 1 do $n-1$ dostáváme

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

takže

$$0 < c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n < 1 - \frac{1}{n}$$

Posloupnost $(c_n)_n$ je kladná, omezená a neklesající. Je totiž

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} > 0$$

Limita této posloupnosti se nazývá Eulerova konstanta.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n\right) = C = 0.5772156649\ldots$$

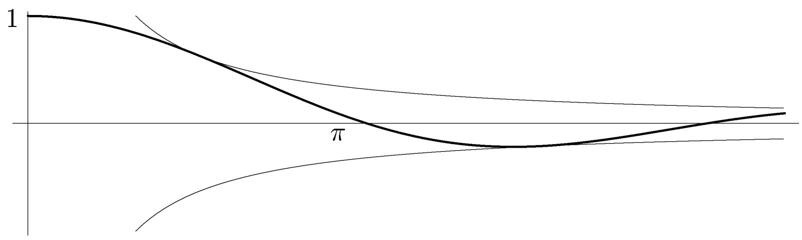
Příklad 127 (Dirichletův integrál) *Integrál* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ *konverguje, ale nekonverguje absolutně.*

Důkaz: Integrací per partes při $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\cos x$ dostáváme pro každé $0 < a < b$

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx\right| &= \left|\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_a^b - \int_a^b (-\tfrac{1}{x^2})(-\cos x)\, dx\right| \\ &\le \left|-\frac{\cos b}{b} + \frac{\cos a}{a}\right| + \int_a^b \frac{dx}{x^2} \le \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = \frac{2}{a}\end{aligned}$$

Pro každé $b > a \in \mathbb{R}^\infty$ je tedy $\int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx$ infinitesimální, takže podle Bolzano-Cauchyovy věty integrál $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ konverguje. Nekonverguje však absolutně, protože

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \quad &\geq \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\, dx \\
&= \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} := +\infty
\end{aligned}$$



Obrázek 4.19: Dirichletův integrál

Substitucí $y = \frac{1}{x}$ ukážeme konvergenci integrálů

$$\left|\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\, dx\right| \quad = \quad \left|\int_{+\infty}^1 \frac{\sin y}{-y^2}\, dy\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = 1$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \sin\frac{1}{x}\, dx = \int_{+\infty}^0 \frac{y \sin y}{-y^2}\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy$$

Vidíme, že integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ může konvergovat i když funkce $f(x)$ sama není omezená. Konvergence prvního z těchto integrálů lze ovšem ukázat také podle Bolzano-Cauchyovy věty. Pro infinitesimální) $< \alpha < \beta$ je

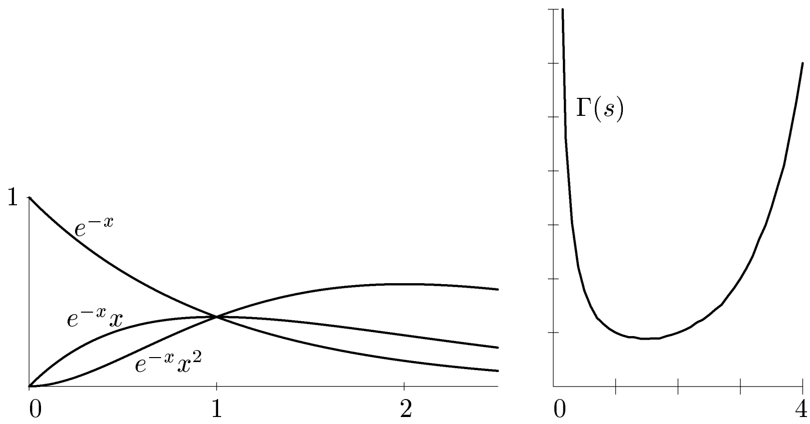
$$\left|\int_\alpha^\beta \sin\frac{1}{x}\, dx\right| \leq \int_\alpha^\beta dx = \beta - \alpha \approx 0$$

Příklad 128 (Gamma funkce) *Pro každé $s > 0$ konverguje integrál*

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

a platí $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. *Pro* $n \in \mathbb{N}$ *je* $\Gamma(n+1) = n!$.

Důkaz: Protože $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} x^{s+1} = 0$, existuje $t > 1$ takové, že pro všechna $x > t$ je $e^{-x} x^{s+1} < 1$ a tedy $e^{-x} x^{s-1} < x^{-2}$. Z toho plyne



Obrázek 4.20: Gamma funkce

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^t e^{-x}x^{s-1}\,dx + \int_t^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx \\
&< \int_0^t x^{s-1}\,dx + \int_t^{+\infty} x^{-2}\,dx = \left[\frac{x^s}{s}\right]_0^t + \left[-\frac{1}{x}\right]_t^{+\infty} \\
&= \frac{t^s}{s} + \frac{1}{t} < +\infty
\end{aligned}$$

Integrací per partes při $f(x) = x^s$, $g(x) = -e^{-x}$ dostáváme

$$\Gamma(s+1) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x}x^s\,dx = \left[-e^{-x}x^s\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} se^{-x}x^{s-1}\,dx = s\Gamma(s)$$

Protože $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = [-\exp(-x)]_0^{+\infty} = 1$, je pro každé n přirozené $\Gamma(n+1) = n!$. Pro $0 < s < 1$ je

$$\Gamma(s) > \int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx > \frac{1}{e}\int_0^1 x^{s-1}\,dx = \frac{1}{es}$$

takže $\lim\limits_{s\to 0^+} \Gamma(s) := +\infty$.

Cvičení Rozhodněte, zda konvergují integrály

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

2. $\displaystyle\int_{0+}^{\pi-} \frac{dx}{\sin x}$

3. $\displaystyle\int_{0+}^{2} \frac{dx}{\ln x}$

4. $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln x}{1-x^2}$

5. $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}$

6. $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}+} \frac{\ln(sinx)}{\sqrt{x}}$

7. $\displaystyle\int_{0}^{1-} \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$

8. $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}$

9. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin x^2\,dx$

10. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos x^2\,dx$

11. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin\tfrac{1}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\cos x^4\,dx$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$