Kapitola 5

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Diferenciální rovnice je úloha najít neznámou funkci $x(t)$ splňující rovnici, ve které se vyskytuje proměnná t, funkce $x(t)$ a její derivace $x'(t)$, $x''(t), \ldots$. Značení $x(t)$ odráží to, že proměnnou t často interpretujeme jako čas. Úloha najít primitivní funkci k dané funkci $f(t)$ je diferenciální rovnice $x'(t) = f(t)$. Je-li $f(t)$ spojitá funkce, řešení existuje a je určeno až na integrační konstantu. Diferenciální rovnice může být doplněna další podmínkou, která ze všech možných řešení vybírá jediné. Touto podmínkou bývá hodnota funkce či jejích derivací v určitém bodě. Například pokud f je spojitá funkce na intervalu, který obsahuje bod t_0, pak úloha nalézt funkci $x(t)$ splňující podmínky

$$x'(t) = f(t), \;\; x(t_0) = x_0$$

má právě jedno řešení

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

Diferenciální rovnice je prvního řádu, pokud se v ní vyskytuje pouze první derivace neznámé funkce. Obecný tvar diferenciální rovnice prvního řádu s počáteční podmínkou je

$$x'(t) = f(x(t), t), \;\; x(t_0) = x_0$$

kde $f(x,t)$ je funkce dvou proměnných. Ukážeme si řešení některých speciálních případů této úlohy.

5.1 Autonomní rovnice

Častá situace je, že růst nějaké veličiny x je určen pouze její velikostí a nezávisí explicitně na čase. Mluvíme o autonomní diferenciální rovnici

$$x'(t) = f(x(t)), \;\; x(t_0) = x_0$$

Je-li $f(x_0) = 0$, má úloha konstantní řešení $x(t) = x_0$. Je-li $f(x_0) \neq 0$, a je-li f spojitá funkce, je $f(x) \neq 0$ v nějakém okolí bodu x_0. Rovnici řešíme tak, že dělíme obě strany členem $f(x(t))$ a získanou rovnost $1 = x'(t)/f(x(t))$ integrujeme. Je-li $F(y)$ primitivní funkce k $1/f(y)$, pak substitucí $y = x(t)$, $dy = x'(t)\,dt$ dostáváme

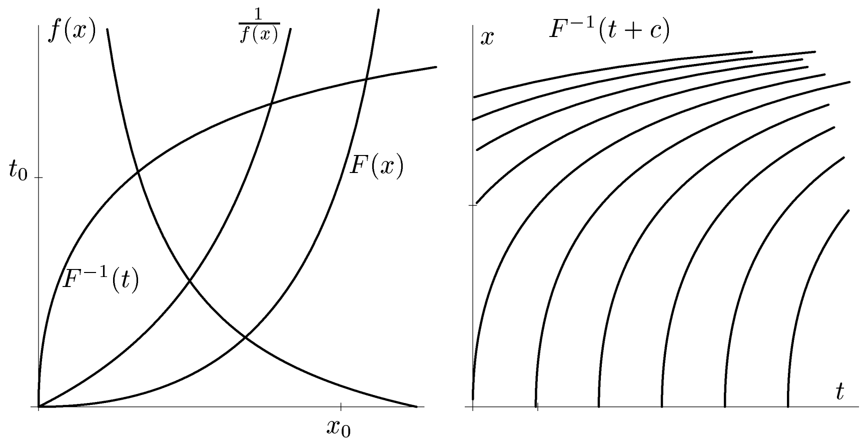
$$t + c \quad = \quad \int dt = \int \frac{x'(t)}{f(x(t))}\,dt = \int \frac{dy}{f(y)} = F(y) = F(x(t))$$

Protože $F'(y)$ má všude stejné znaménko, je $F(y)$ ryze monotónní a má funkci inverzní (obr. 5.1 vlevo). Pro každou konstantu c je tedy $x(t) = F^{-1}(t+c)$ řešení diferenciální rovnice $x'(t) = F(x(t))$. Počáteční podmínka určuje $x_0 = x(t_0) = F^{-1}(t_0 + c)$ a odtud $c = F(x_0) - t_0$. Řešení úlohy s počáteční podmínkou je tedy

$$x(t) = F^{-1}(F(x_0) + t - t_0)$$

Každým bodem $[t_0, x_0]$, pro který $f(x_0) \neq 0$ prochází tedy právě jedno řešení (obr. 5.1 vpravo). Alternativně lze ke stejnému výsledku dospět určitým integrálem

$$\begin{aligned} t - t_0 \quad &= \quad \int_{t_0}^{t} ds = \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{f(x(s))}\,ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{f(y)} = [F(y)]_{x_0}^{x(t)} \\ &= \quad F(x(t)) - F(x_0) \end{aligned}$$



Obrázek 5.1: Autonomní diferenciální rovnice

Tvrzení 129 *Nechť f je spojitá funkce, která je na intervalu I různá od nuly. Nechť $F'(x) = 1/f(x)$ na I. Pak diferenciální rovnice*

$$x'(t) = f(x(t)), \;\; x(t_0) = x_0$$

má jediné řešení

$$x(t) = F^{-1}(F(x_0) + t - t_0)$$

jehož definiční obor je interval

$$\mathcal{D}(x) = \{t \in \mathbb{R} : \; F(x_0) + t - t_0 \in \mathcal{D}(F^{-1})\}$$

Důkaz: Pro $t = t_0$ je $x(t_0) = F^{-1}(F(x_0)) = x_0$. Pro každé $t \in \mathcal{D}(x)$ je

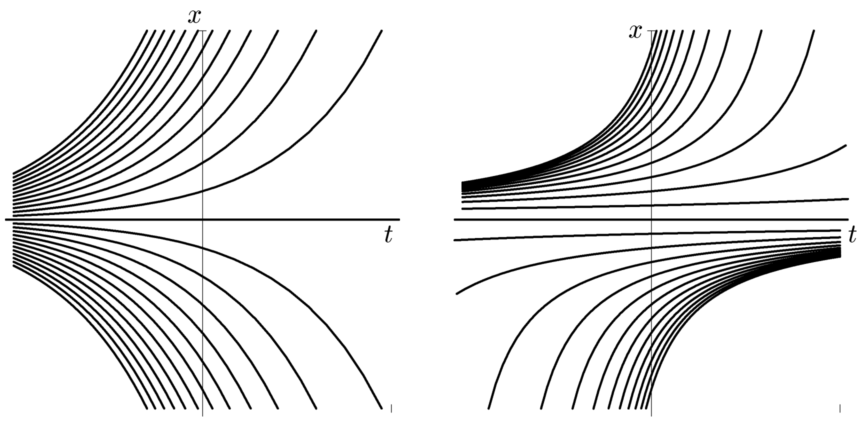
$$\begin{aligned} x'(t) &= (F^{-1})'(F(x_0) + t - t_0) = \frac{1}{F'(F^{-1}(F(x_0) + t - t_0))} \\ &= \frac{1}{F'(x(t))} = f(x(t)) \ \Box \end{aligned}$$

Všimněme si, že řešení platí i pro $t < t_0$. Známe-li stav systému v současnosti (v čase t_0), můžeme určit jeho vývoj jak v minulosti tak v budoucnosti.

Nejjednodušší model růstu populace předpokládá, že přírůstek populace v infinitesimálním časovém období je úměrný velikosti populace a délce časového intervalu, tj. $x(t+\alpha) - x(t) = r\alpha x(t)$, kde r je konstanta úměrnosti. Vydělením obou stran α dostáváme

$$x'(t) \approx \frac{x(t+\alpha) - x(t)}{\alpha} = rx(t)$$

Na obou stranách jsou standardní veličiny, proto platí rovnost.



Obrázek 5.2: Exponenciální a hyperbolický růst

Příklad 130 (Exponenciální růst) *Rovnici*

$$x'(t) = rx(t), \ \ x(0) = x_0$$

řešíme integrací (obr.5.2 vlevo)

$$t = \int_0^t \frac{x'(s)}{rx(s)}\, ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{ry} = \left[\frac{1}{r}\ln y\right]_{x_0}^{x(t)} = \frac{1}{r}\ln\frac{x(t)}{x_0}$$

takže

$$x(t) = x_0 e^{rt}, \ \ t \in (-\infty, +\infty)$$

Příklad 131 (Hyperbolický růst)

$$x'(t) = rx^2(t), \quad x(0) = x_0$$

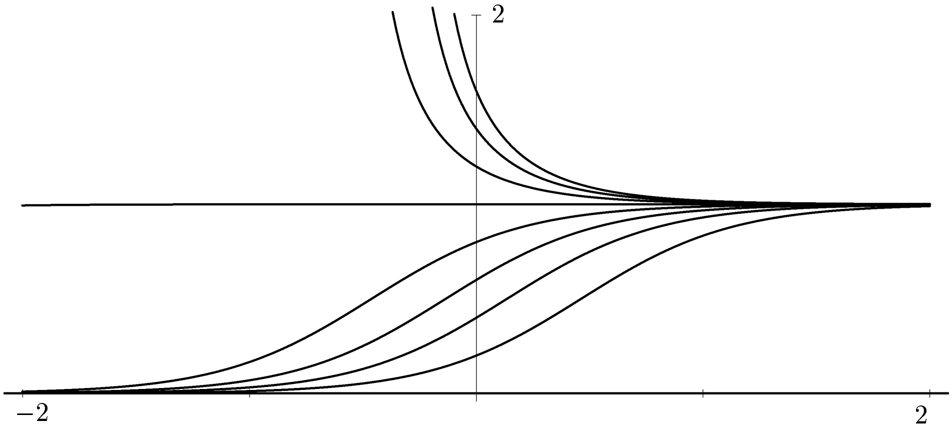
Rovnici integrujeme

$$t = \int_0^t \frac{x'(s)}{rx^2(s)} dt = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{ry^2} = \left[-\frac{1}{ry} \right]_{x_0}^{x(t)} = \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x_0} \right)$$

a tedy

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 rt}, \quad t \in \left(-\infty, \frac{1}{rx_0} \right)$$

Zatímco exponenciální růst probíhá neomezeně dlouho, hyperbolický růst dospěje do nekonečna v konečném čase $t = 1/rx_0$. Tomuto jevu říkáme přetečení (obr.5.2 vpravo). Je-li však $x_0 < 0$, je řešení definováno v intervalu $(\frac{1}{rx_0}, +\infty)$. K přetečení zde dochází v záporném čase.



Obrázek 5.3: Logistický růst

Logistický růst je populační model, který počítá s jevem přemnožení. Je-li populace příliš velká, populační přírůstek se snižuje. V nejjednodušším modelu je populační přírůstek úměrný $1 - x/K$, kde x je velikost populace a K je kapacita teritoria.

Příklad 132 (Logistický růst)

$$x'(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right), \quad x(0) = x_0$$

Integrací dostáváme

$$\begin{aligned} t &= \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{ry(1 - \frac{y}{K})} = \frac{1}{r} \int_{x_0}^{x(t)} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K - y} \right) dy \\ &= \left[-\frac{1}{r} \ln \left| \frac{K - y}{y} \right| \right]_{x_0}^{x(t)} = -\frac{1}{r} \ln \frac{\frac{K}{x(t)} - 1}{\frac{K}{x_0} - 1} \end{aligned}$$

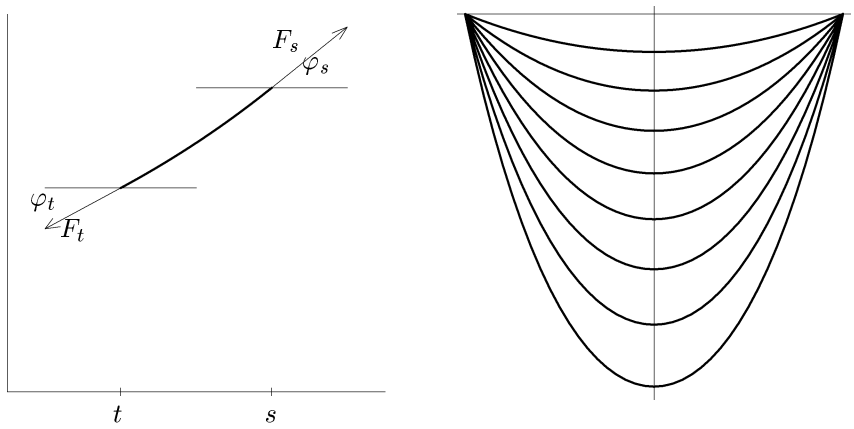
Poslední výraz je již bez absolutní hodnoty, protože členy $\frac{K}{x(t)}-1$ a $\frac{K}{x_0}-1$ mají stejné znaménko. Odtud $\frac{K}{x(t)}-1=e^{-rt}(\frac{K}{x_0}-1)$ a tedy

$$x(t)=\frac{K}{1-e^{-rt}(1-\frac{K}{x_0})}=\frac{x_0e^{rt}}{1+\frac{x_0}{K}(e^{rt}-1)}$$

Je-li $x_0>K$, je $\mathcal{D}(x)=(-\frac{1}{r}\ln\frac{x_0}{x_0-K},+\infty)$. K přetečení dochází v záporném čase. Je-li $0<x_0\le K$, je řešení definováno na celé reálné přímce $\mathcal{D}(x)=(-\infty,+\infty)$. Je-li $x_0<0$, je $\mathcal{D}(x)=(-\infty,\frac{1}{r}\ln\frac{x_0-K}{x_0})$. Řešení je ovšem konstantní pro počáteční podmínku $x_0=0$ nebo $x_0=k$, kdy je pravá strana rovnice nulová.

5.1.1 Řetězovka

Řetězovka je křivka, kterou zaujme dokonale ohebné lano zavěšené mezi dvěma body v prostoru. Označme $x(t)$ výšku lana v bodě t. Každý bod t rozděluje lano na dvě části, které na sebe působí vzájemně opačnými silami velikosti F_t, které jsou k laně tečné. Protože lano je ve statické rovnováze, vodorovná složka této síly $F_t\cos\varphi_t=F$ je konstantní. Zde φ_t je úhel, který lano svírá s horizontálou, tedy $\tan\varphi_t=x'(t)$. Pro dva body $t<s$ je rozdíl svislých složek těchto sil $F_s\sin\varphi_s-F_t\sin\varphi_t$ úměrný váze lana mezi body t,s a ta je rovna $\varrho L(t,s)$, kde ϱ je délková hustota lana (jeho hmotnost dělená délkou) a $L(t,s)$ je délka lana mezi body t,s (obr. 5.4 vlevo).



Obrázek 5.4: Řetězovka

$$\begin{aligned}\varrho L(t,s) &= F_s\sin\varphi_s-F_t\sin\varphi_t=F(\tan\varphi_s-\tan\varphi_t)\\ &= F(x'(t)-x'(s))\end{aligned}$$

Položme $a=\varrho/F$. Je-li $s-t$ infinitesimální, je

$$x''(t)\approx\frac{x'(s)-x'(t)}{s-t}=a\frac{L(t,s)}{s-t}\approx a\sqrt{1+x'^2(t)}$$

Na levé i pravé straně jsou standardní veličiny, musí se tedy rovnat. To je diferenciální rovnice druhého řádu pro $x(t)$. Její derivace $y(t) = x'(t)$ splňuje autonomní diferenciální rovnici

$$y'(t) = a\sqrt{1+y^2(t)}$$

kterou řešíme integrací

$$a(t-c) = \int a\,dt = \int \frac{y'(t)\,dt}{\sqrt{1+y^2(t)}} = \arg\sinh y(t)$$

kde c je integrační konstanta. Odtud $x'(t) = y(t) = \sinh a(t-c)$ a

$$x(t) = d + \frac{1}{a}\cosh a(t-c)$$

kde c, d jsou integrační konstanty. Jejich hodnoty lze získat ze dvou počátečních podmínek. Těmi mohou být hodnota funkce a její derivace v daném bodě (tj. výška a sklon lana v určitém bodě) nebo výška lana ve dvou různých bodech (například bodech závěsu). Předpokládejme, že lano je zavěšeno v bodech se souřadnicemi $[-1, 0]$ a $[1, 0]$, tj. $x(-1) = x(1) = 0$. Tyto podmínky určují jediné řešení (obr. 5.4 vpravo)

$$x_a(t) = \frac{1}{a}(\cosh at - \cosh a)$$

Nejnižší bod lana je v nule, $x_a(0) = \frac{1}{a}(1-\cosh a)$. Parametr a závisí na délce lana. Ta je

$$L(a) = 2\int_0^1 \sqrt{1+x'^2(t)}\,dt = 2\int_0^1 \cosh at = \frac{2}{a}[\sinh at]_0^1 = \frac{2\sinh a}{a}$$

Zde $\lim\limits_{a\to 0^+} L(a) = 2$ je vzdálenost mezi body závěsu. Napětí lana, tj. síla která působí ve vodorovném směru, je $F = \varrho/a$. V každém z obou bodů závěsu působí na lano síla, jejíž vertikální složka je polovina váhy lana, tj $\varrho L(a) = \frac{\varrho}{a}\sinh a$ a jejíž horizontální složka je ϱ/a. Velikost této síly, napětí v bodu závěsu je

$$G(a) = \frac{\varrho}{a}\sqrt{1+\sinh^2 a} = \frac{\varrho}{a}\cosh a$$

Úloha o řetězovce má variantu, kdy síla působící na infinitesimální úsek lana není úměrná jeho délce, ale délce jeho vodorovného průmětu. Tato situace nastává, slouží-li lano k zavěšení mostu, a hmotnost mostu je podstatně větší než hmotnost lana. V toto případě dostáváme diferenciální rovnici $x''(t) = a$ s obecným řešením $x(t) = \frac{a}{2}t^2 + ct + d$. kde c, d jsou konstanty. Podmínka $f(-1) = f(1) = 0$ určuje jediné řešení

$$x_a(t) = \frac{a}{2}(t^2 - 1)$$

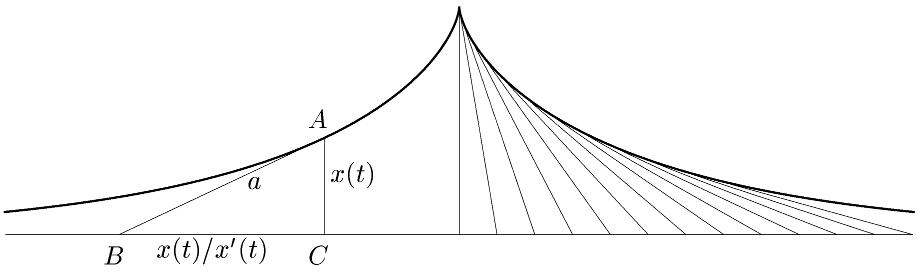
Oblouk je v tomto případě parabolický.

5.1.2 Traktrix

Traktrix je křivka, kterou vytváří těleso vlečené stálým směrem na závěsu pevné délky. Předpokládejme, že závěs je vlečen po ose t a délka závěsu je a. Vedeme-li bodem $A = [t, x(t)]$ křivky tečnu, protíná tato tečna osu t v bodě B, který je od bodu dotyku vzdálen a. Označme $C = [t, 0]$. Pak ABC je pravoúhlý trojúhelník s přeponou a a odvěsnami $x(t)$ a $|x(t)/x'(t)|$ (viz. Newtonova iterační metoda). Podle Pythagorovy věty je

$$x^2(t) + \left(\frac{x(t)}{x'(t)}\right)^2 = a^2$$

$$x'(t) = \frac{\pm x(t)}{\sqrt{a^2 - x^2(t)}}, \quad x(0) = a$$



Obrázek 5.5: Traktrix

Traktrix sestává ze dvou větví, které obě vycházejí z bodu $[0, a]$. V levé větvi platí diferenciální rovnice s kladným znaménkem, v pravé větvi se záporným znaménkem. Rovnici pro kladnou větev řešíme substitucí $y = x(t)$

$$t + c = \int dt = -\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\, dy$$

Volíme další substituci $y = a/\cosh u$, takže $\sqrt{a^2 - y^2} = a \tanh u$, $dy = -a \sinh u/\cosh^2 u$.

$$t + c = a \int \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 u}\right) du = a(u - \tanh u), \quad x(t) = y = \frac{a}{\cosh u}$$

Kde c je integrační konstanta. Z počáteční podmínky $x_0 = 0$, $y_0 = a$ plyne $c = 0$, takže dostáváme parametrickou rovnici traktrix

$$t(u) = a(u - \tanh u), \quad x(u) = \frac{a}{\cosh u}, \quad u \in \langle 0, +\infty)$$

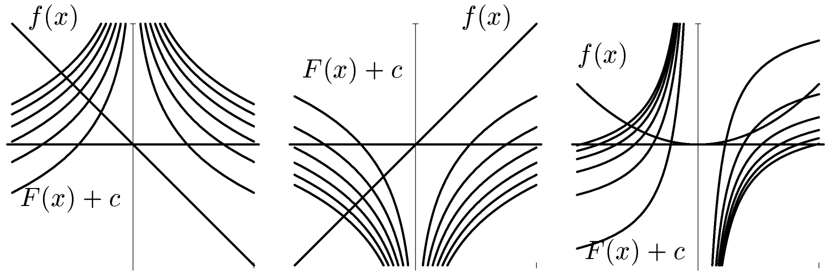
Dosadíme-li do x za $u = \operatorname{arg\,cosh} \frac{a}{y}$, dostáváme inverzní funkci pro traktrix

$$t(x) = a \operatorname{arg\,cosh} \frac{a}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

5.1.3 Stabilita stacionárních stavů

Říkáme, že x_1 je stacionární bod autonomní diferenciální rovnice $x'(t) = f(x(t))$, jestliže $f(x_1) = 0$. Je-li x_1 stacionární bod, je konstantní funkce $x(t) = x_1$ řešení diferenciální rovnice. Stacionární body se však liší svou stabilitou. Jediný stacionární bod rovnice $x'(t) = x(t)$ je $x_1 = 0$. Všechna řešení $x(t) = x_0 e^t$ s počáteční podmínkou $x(0) = x_0 \neq 0$ se od tohoto bodu vzdalují. Platí pro ně $\lim_{t\to+\infty} x(t) := \pm\infty$. Říkáme, že 0 je nestabilní stacionární bod. Diferenciální rovnice $x'(t) = rx(t)(1 - x(t)/K)$ má dva stacionární body. Bod $x_1 = 0$ je opět nestabilní, řešení s počáteční podmínkou $x_0 \in (-\infty, K)$ se od něj vzdalují, i když ne nutně do nekonečna. Druhý stacionární bod $x_2 = K$ je stabilní. Řešení s počáteční podmínkou $x_0 \in (0, +\infty)$ se k němu přibližují a platí pro ně $\lim_{t\to+\infty} x(t) = K$.

Definice 133 *Stacionární bod x_1 autonomní diferenciální rovnice $x'(t) = f(x(t))$ je stabilní, jestliže pro každé řešení $x(t)$ rovnice, pro které $x(0) \approx x_1$, je $x(t) \approx x_1$ pro všechna $t > 0$.*



Obrázek 5.6: Stabilita stacionárních bodů

Tvrzení 134 *Nechť f je diferencovatelná v bodě x_1 a $f(x_1) = 0$. Je-li $f'(x_1) < 0$, je x_1 stabilní stacionární bod rovnice $x'(t) = f(x(t))$. Je-li $f'(x_1) > 0$, není x_1 stabilní stavcionární bod.*

Důkaz: Nechť $f'(x_1) < 0$. Protože f je diferencovatelná, existuje $r > 0$ takové, že $f'(x_0) < 0$ pro každé $x_0 \in (x_1 - r, x_1 + r)$, takže f je na tomto intervalu klesající (obr. 5.6 vlevo). Z toho plyne, že funkce $1/f$ je rostoucí na obou intervalech $(x_1 - r, x_1)$ i $(x_1, x_1 + r)$ a přitom

$$\lim_{x_0\to x_1^-} \frac{1}{f(x_0)} := +\infty, \quad \lim_{x_0\to x_1^+} \frac{1}{f(x_0)} := -\infty$$

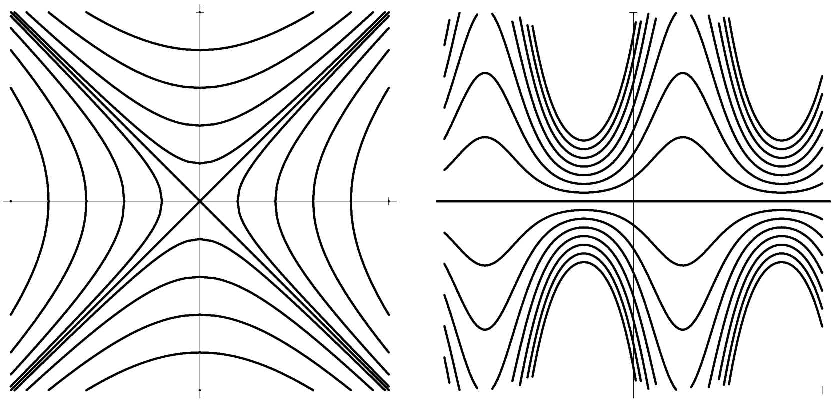
Je-li F funkce primitivní k $1/f$ na intervalu $(x_1 - r, x_1)$, je rostoucí a $\lim_{x\to x_1^-} F(x) := +\infty$, takže $\lim_{t\to+\infty} F^{-1}(t) := x_1^-$. Je-li $x_1 \approx x(0) < x_1$, je tedy $x(t) \approx x_1$ pro všechna $t > 0$, takže x_1 je stabilní zleva. Je-li F primitivní k $1/f$ na intervalu $(x_1, x_1 + r)$, je klesající a $\lim\limits_{x\to x_1^+} F(x) := +\infty$, takže $\lim\limits_{t\to+\infty} F^{-1}(t) := x_1^+$ a x_1 je stabilní zprava.

Nechť nyní $f'(x_1) > 0$, takže existuje $r > 0$ takové, že $f'(x_0) > 0$ pro každé $x_0 \in (x_1 - r, x_1 + r)$, takže $1/f$ i její primitivní funkce F jsou klesající na intervalu $(x_1 - r, x_1)$ (obr. 5.6 uprostřed). Také funkce F^{-1} je pak klesající, takže je-li $x(0) = x_0 \in (x_1 - r, x_1)$, je $x(t)$ klesající a bod x_1 není stabilní. □

Pro logistický růst s funkcí $f(x) = rx(1 - x/K)$ je $f'(x) = r(1 - 2x/K)$, takže $f'(0) = r > 0$ není stabilní, zatímco $f'(K) = -r < 0$ je stabilní. V případě, že x_1 je stacionární bod, pro který $f'(x_1) = 0$, může nýt x_1 jak stabilní tak nestabilní. Například pro diferenciální rovnici $x'(t) = x^2(t)$ je nulový bod stabilní zleva a nestabilní zprava (obr.5.2 vpravo a obr. 5.6 vpravo).

Cvičení Řešte diferenciální rovnice

1. $x'(t) = -\frac{1}{x^2(t)}$
2. $x'(t) = \frac{1}{x(t)}$
3. $x'(t) = x(t) - x^3(t)$
4. $x'(t) = 1 + x^2(t)$
5. $x'(t) = x(t) \ln x(t)$
6. $x'(t) = e^{-x(t)}$
7. $x'(t) = \tan x(t)$
8. $x'(t) = 1 - e^{x(t)}$



Obrázek 5.7: Separace proměnných

5.2 Separace proměnných

Difererenciální rovnici, jejíž pravá strana je součin $f(x)g(t)$, řešíme oddělením (separovaním) proměnných x a t. Úloha

$$x'(t) = f(x(t)) \cdot g(t), \;\; x(t_0) = x_0$$

má konstantní řešení $x(t) = x_0$, je-li $f(x_0) = 0$. Je-li $f(x_0) \neq 0$, a jsou-li f a g spojité, řešíme opět integrací

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= f(x(t)) \cdot g(t) \\
G(t) + c = \int g(t)\, dt &= \int \frac{x'(t)}{f(x(t))} = \int \frac{dy}{f(y)} = F(y) = F(x(t)) \\
x(t) &= F^{-1}(G(t) + c)
\end{aligned}
$$

kde $F'(y) = 1/f(y)$ a $G'(t) = g(t)$ jsou primitivní funkce a c je integrační konstanta. Počáteční podmínka určuje $c = F(x_0) - G(t_0)$, takže řešení je

$$x(t) = F^{-1}(F(x_0) + G(t) - G(t_0))$$

jehož definiční obor je interval $\mathcal{D}(x) = \{t \in \mathbb{R} : \ F(x_0) + G(t) - G(t_0) \in \mathcal{D}(F^{-1})\}$.

Například rovnici

$$x'(t) = \frac{t}{x(t)}, \ \ x(t_0) = x_0$$

řešíme integrací

$$t^2 - t_0^2 = 2 \int_{t_0}^{t} s\, ds = 2 \int_{t_0}^{t} x(s) x'(s)\, ds = 2 \int_{x_0}^{x(t)} y\, dy = x^2(t) - x_0^2$$

$$x(t) = \operatorname{sgn}(x_0) \sqrt{x_0^2 + t^2 - t_0^2}$$

(obr. 5.7 vlevo). Znaménko řešení závisí na počáteční podmínce. Řešení jsou hyperboly, které se asymptoticky blíží k $y = \pm x$. Je-li $x_0 = \pm t_0 \neq 0$, je řešení přímka. Řešení nejsou definována pro $t_0 = 0$.

Diferenciální rovnici

$$x'(t) = x(t) \cos t, \ \ x(t_0) = x_0$$

řešíme integrací (obr. 5.7 vpravo).

$$
\begin{aligned}
\sin t - \sin t_0 &= \int_{t_0}^{t} \cos s = \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)\, ds}{x(s)} = \ln \left| \frac{x(t)}{x_0} \right| \\
& \quad x(t) = x_0 e^{\sin t - \sin t_0}
\end{aligned}
$$

5.2.1 Homogenní rovnice

Homogenní nazýváme rovnici tvaru

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right)$$

kde pravá strana závisí pouze na podílu $\frac{x(t)}{t}$. Řešíme ji zavedením nové proměnné $y(t) = \frac{x(t)}{t}$. Dosadíme-li do dané rovnice $x(t) = ty(t)$, dostáváme

$$ty'(t) + y(t) = f(y(t))$$

a tím se rovnice převádí na rovnici se separovanými proměnnými

$$y'(t) = \frac{f(y(t)) - y(t)}{t}$$

Například rovnice

$$x'(t) = \frac{2tx(t)}{t^2 - x^2(t)} = \frac{2\frac{x(t)}{t}}{1 - \left(\frac{x(t)}{t}\right)^2}$$

je homogenní. Substitucí $y(t) = \frac{x(t)}{t}$ dostáváme rovnici

$$ty'(t) = \frac{2y(t)}{1 - y^2(t)} - y(t) = \frac{y(t) + y^3(t)}{1 - y^2(t)}$$

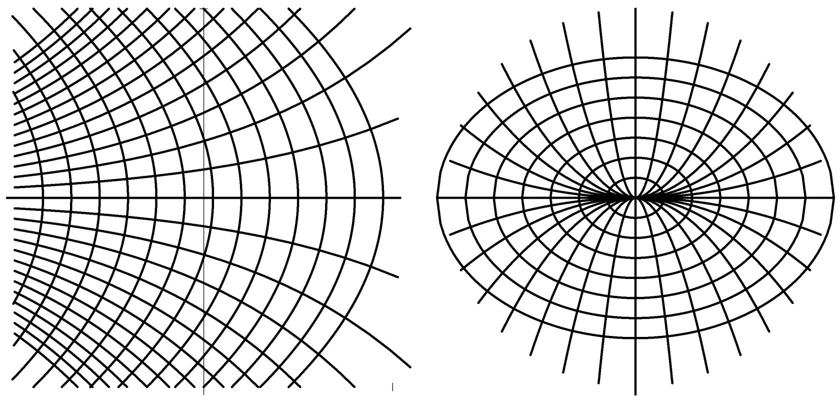
Rovnici integrujeme

$$\ln|t| + \ln|c| = \int \frac{dt}{t} = \int \frac{1 - y^2(t)}{y(t) + y^3(t)}\, dt = \ln\left|\frac{y(t)}{1 + y^2(t)}\right|$$

takže $\frac{y(t)}{1+y^2(t)} = ct$. Dosadíme zpět $y(t) = \frac{x(t)}{t}$ a po úpravě

$$t^2 + \left(x(t) - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}$$

To jsou kružnice procházející počátkem tečné k ose t. Řešení $y(t) = 0$ dává $x(t) = 0$.



Obrázek 5.8: Ortogonální systémy

5.2.2 Ortogonální systémy

Uvažujme soustavu funkcí $x(t) = ae^t$ s parametrem $a \in \mathbb{R}$. Každým bodem $[t, x]$ roviny prochází právě jedna tato křivka. Její parametr je $a = xe^{-t}$. Hledejme funkci

$y(t)$, jejíž graf je kolmý na každou křivku $x(t)$. Protínají-li se v bodě t grafy křivek $x(t)$ a $y(t)$ a jsou-li zde na sebe kolmé, platí

$$y(t) = x(t), \quad y'(t)x'(t) = -1$$

Pro $x(t) = ae^t$ je $x'(t) = ae^t = x(t)$ (funkce $x(t) = ae^t$ jsou tedy soustavou řešení diferenciální rovnice $x'(t) = x(t)$). Pro křivky $y(t)$ tedy platí

$$y'(t) = -\frac{1}{x'(t)} = -\frac{1}{x(t)} = -\frac{1}{y(t)}$$

To je autonomní diferenciální rovnice s řešením

$$t = \int dt = -\int y(t)y'(t) = -\frac{y^2(t)}{2} + c$$

takže $y(t) = \pm\sqrt{2c - 2t}$. To jsou paraboly s osou y a vrcholem v bodě $[c, 0]$. každým bodem roviny prochází právě jedna tato parabola (obr.5.8 vlevo).

Soustava funkcí $x(t) = at^n$ s pevným $n > 0$ splňuje diferenciální rovnici $x'(t) = ant^{n-1} = \frac{nx(t)}{t}$. Každým bodem roviny $[t, x]$ kromě počátku prochází právě jedna tato křivka s parametrem $a = xt^{-n}$. Funkce $y(t)$, která je kolmá na všechny tyto křivky, splňuje diferenciální rovnici

$$y'(t) = -\frac{1}{x'(t)} = -\frac{t}{nx(t)} = -\frac{t}{ny(t)}$$

To je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými s řešením

$$-\frac{t^2}{2n} + c = -\int \frac{t\,dt}{n} = \int y(t)y'(t)\,dt = \frac{y^2(t)}{2}$$

To jsou elipsy $y^2(t) + \frac{t^2}{n} = c^2$ s poloosami $c\sqrt{n}$ a c (obr. 5.8 vpravo).

5.2.3 Lineární rovnice prvního řádu

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu má tvar

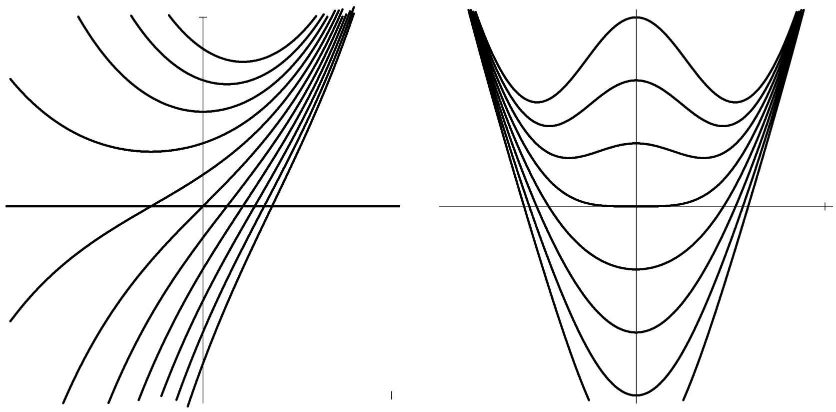
$$x'(t) = f(t) \cdot x(t) + g(t), \quad x(t_0) = x_0$$

kde f, g jsou dané funkce. Je-li $g(t) = 0$, říkáme, že rovnice je homogenní. Je to rovnice se separovanými proměnnými, kterou řešíme

$$\ln\frac{x(t)}{x_0} = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{y} = \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)\,ds}{x(s)} = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds = F(t)$$

takže

$$x(t) = x_0 e^{F(t)}, \quad F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$$



Obrázek 5.9: Lineární diferenciální rovnice

Je-li funkce g je nenulová, hledáme řešení ve tvaru $x(t) = y(t)e^{F(t)}$ pro neznámou funkci $y(t)$. Dosadíme-li tento výraz do původní rovnice, dostáváme

$$y'(t)e^{F(t)} + y(t)e^{F(t)}F'(t) = f(t)y(t)e^{F(t)} + g(t)$$

Protože $F'(t) = f(t)$, je

$$y'(t) = g(t)e^{-F(t)},\ \ y(t_0) = x_0$$

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)e^{-F(s)}\,ds$$

Řešení původní rovnice je

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)e^{-F(s)}\,ds\right)e^{F(t)}, \quad \text{kde} \quad F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$$

Řešme lineární diferenciální rovnici

$$x'(t) = -x(t) + e^t,\ \ x(t_0) = x_0$$

Řešení autonomní rovnice je $x(t) = ce^{-t}$. Po dosazení $x(t) = y(t)e^{-t}$ dostáváme rovnici $y'(t)e^{-t} - y(t)e^{-t} = -y(t)e^{-t} + e^t$, tj. $y'(t) = e^{2t}$ s řešením $y(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + c$ odtud

$$x(t) = \frac{1}{2}e^t + ce^{-t} = \frac{1}{2}e^t + (x_0e^{t_0} - \frac{1}{2}e^{2t_0})e^{-t}$$

Speciálně pro $t_0 = 0$, $x_0 = 1$ je $x(t) = \sinh(t)$ (obr. 5.9 vlevo).

Řešme lineární diferenciální rovnici (obr. 5.9 vpravo)

$$x'(t) = -2tx(t) + 2t^3,\ \ x(t_0) = x_0$$

zde $f(t) = -2t$, takže $F(t) = t_0^2 - t^2$. Řešení homogenní rovnice je $x(t) = x_0 e^{t_0^2 - t^2}$. Pro výpočet $y(t)$ použijeme substituci $z = t^2$

$$\begin{aligned} y(t) - x_0 &= \int_{t_0}^{t} 2t^3 e^{t^2 - t_0^2}\, dt = e^{-t_0^2} \int_{t_0^2}^{t^2} z e^z\, dz = e^{-t_0^2} \left[e^z (z-1) \right]_{t_0^2}^{t^2} \\ &= e^{t^2 - t_0^2}(t^2 - 1) - (t_0^2 - 1) \\ x(t) &= (x_0 + 1 - t_0^2) e^{t_0^2 - t^2} + t^2 - 1 \end{aligned}$$

Cvičení Řešte diferenciální rovnice

1. $x'(t) = \frac{t}{x(t)} e^{t + x(t)}$
2. $x'(t) = \frac{x^2(t)}{t^2}$
3. $x'(t) = \frac{1 - x^2(t)}{1 + t^2}$
4. $x'(t) = -\frac{x(t)}{t}$
5. $x'(t) = \frac{x(t)}{t+4} + \frac{2t+6}{t+4}$
6. $x'(t) = \cot(t)(x(t) + 1)$
7. $x'(t) = x(t) - t$
8. $x'(t) = \sin t - x(t)$

5.3 Chemická kinetika

Uvažujme radioaktivní látku X, která se rozpadá na látku Y. To je pravděpodobnostní proces. V určitém časovém intervalu má každý atom stejnou pravděpodobnost, že se během tohoto intervalu rozpadne. Průměrné množství látky, které se rozpadne, je úměrné množství látky na počátku intervalu. Je-li časový interval infinitesimální, je toto množství také úměrné délce tohoto intervalu. Je-li $x(t)$ množství látky X v čase t, je $x(t + \alpha) = x(t) - k\alpha x(t)$, kde k je konstanta úměrnosti. To vede na diferenciální rovnici

$$x'(t) = -kx(t), \quad x(0) = x_0$$

s řešením $x(t) = x_0 e^{-kt}$. Předpokládejme nyní, že také látka Y, která vznikne rozpadem X, se dále rozpadá na látku Z. Schematicky to zapisujeme

$$X \xrightarrow{k_1} Y \xrightarrow{k_2} Z$$

kde k_1, k_2 jsou rychlostní konstanty těchto rozpadů. Během infinitesimálního časového intervalu délky α přibyde $k_1 \alpha x(t)$ látky Y rozpadem látky X a ubyde jí $k_2 \alpha y(t)$ rozpadem na Z. Pro množství $y(t)$ látky Y to vede na diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y'(t) &= k_1 x(t) - k_2 y(t) \\ y'(t) &= -k_2 y(t) + k_1 x_0 e^{-k_1 t}, \quad y(0) = 0 \end{aligned}$$

Předpokládáme, že v čase 0 je množství látky Y nulové. To je lineární diferenciální rovnice a její řešení hledáme ve tvaru $y(t) = w(t) e^{-k_2 t}$, $w(0) = 0$. Po dosazení

$$\begin{aligned} w'(t) e^{-k_1 t} &= x_0 k_1 e^{-k_1 t} \\ w(t) &= \frac{x_0 k_1}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + c \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{x_0 k_1}{k_2 - k_1} \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{x_0 k_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

Řešení platí za předpokladu $k_2 \neq k_1$. Je-li $k_2 = k_1 = k$, je

$$\begin{aligned} w'(t) &= x_0 k \\ w(t) &= x_0 kt + c \ \Rightarrow \ c = 0 \\ y(t) &= x_0 kte^{-kt} \end{aligned}$$

V obou případech je $y(0) = 0$ a $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

Kinetika chemické reakce probíhá podobně jako radioaktivní rozpad, současně však probíhá zpětná reakce

$$X \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} Y$$

Množství látek X a Y pak splňuje rovnice

$$\begin{aligned} x'(t) &= -k_1 x(t) + k_2 y(t) \\ y'(t) &= k_1 x(t) - k_2 y(t) \end{aligned}$$

Sečtením rovnic dostáváme $x'(t) + y'(t) = 0$, celkové množství látek X a Y se nemění. Je-li jejich počáteční množství x_0 a y_0, dostáváme dosazením $y(t) = x_0 + y_0 - x(t)$ rovnici

$$x'(t) = a - kx(t), \ \ x(0) = x_0$$

kde $a = k_2(x_0+y_0)$ a $k = k_1+k_2$. To je autonomní rovnice s řešením $x(t) = \frac{a}{k}+ce^{-kt}$. Počáteční podmínka dává $x_0 = \frac{k_2(x_0+y_0)}{k_1+k_2} + c$ a odtud

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{k_2(x_0 + y_0)}{k_1 + k_2} + \frac{k_1 x_0 - k_2 y_0}{k_1 + k_2} e^{-(k_1+k_2)t} \\ y(t) &= \frac{k_1(x_0 + y_0)}{k_1 + k_2} + \frac{k_2 y_0 - k_1 x_0}{k_1 + k_2} e^{-(k_1+k_2)t} \end{aligned}$$

Řešení spěje ke stabilnímu stacionárnímu stavu

$$\lim_{x \to +\infty} x(t) = \frac{k_2(x_0 + y_0)}{k_1 + k_2}, \ \ \lim_{x \to +\infty} y(t) = \frac{k_1(x_0 + y_0)}{k_1 + k_2}$$

kdy se množství látek rozdělí v poměru rychlostních konstant $\lim_{x \to +\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{k_2}{k_1}$. Bod $x = \frac{k_2}{k_1}$ je totiž stabilní stacionární bod rovnice $x'(t) = a - kx(t)$.

5.4 Newtonovská mechanika

Newtonův pohybový zákon říká, že součin zrychlení a tělesa a jeho hmotnosti m je roven síle F, která na něj působí. Pohybuje-li se hmotný bod po přímce a je-li síla závislá pouze na jeho poloze, platí pro jeho souřadnice $x(t)$ diferenciální rovnice druhého řádu (to znamená, že rovnice obsahuje druhou derivaci neznámé funkce)

$$mx''(t) = F(x(t)), \;\; x(t_0) = x_0, \;\; x'(t_0) = v_0$$

Zde $F(x)$ je síla, která působí v bodě x. Pohyb je určen dvěma počátečními podmínkami pro pozici a rychlost. Rovnici lze řešit pomocí potenciálu. Potenciální energii v bodě x definujeme jako práci potřebnou k tomu. aby se hmotný bod přemístil do bodu x z nějakého počátečního bodu x_0. Je to záporně vzatá primitivní funkce k F

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(s)\,ds, \;\; F(x) = -V'(x)$$

Pro volný pád v homogenním gravitačním poli Země je $F(x) = -mg$ a potenciální energie je $V(x) = mgx$. Pro volný pád v gravitačním poli tělesa hmotnosti M je $F(x) = -\kappa Mmx^{-2}$, kde κ je gravitační konstanta a x je vzdálenost od tohoto tělesa. Potenciální energie je zde $V(x) = -\kappa Mm/x$. Pro harmonický oscilátor, který modeluje kmity pružiny, je síla úměrná vychýlení z rovnovážné polohy $F(x) = -kx$. Potenciální energie je $V(x) = \frac{k}{2}x^2$.

Je-li $x(t)$ řešení diferenciální rovnice $mx''(t) = F(x(t))$, pak se pro něj zachovává celková energie $E(t) = \frac{m}{2}x'^2(t) + V(x(t))$. Je totiž

$$E'(t) = mx'(t)x''(t) + V'(x(t))x'(t) = x'(t)F(x(t)) - F(x(t))x'(t) = 0$$

takže

$$\frac{m}{2}x'^2(t) + V(x(t)) = E_0 = \frac{m}{2}v_0^2 + V(x_0)$$

a odtud dostáváme autonomní diferenciální rovnici prvního řádu

$$x'(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - V(x(t))\right)}, \;\; x(t_0) = x_0$$

Znaménko před odmocninou závisí na počáteční podmínce. Řešení platí pouze v intervalech, kde $x'(t)$ nemění znaménko. Pro pohyb v homogenním gravitačním poli je

$$x''(t) = -g, \;\; x(t_0) = x_0, \;\; x'(t_0) = v_0$$

Tuto rovnici řešíme přímo integrací

$$x'(t) = v_0 - g(t - t_0), \;\; x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{g}{2}(t - t_0)^2$$

5.4.1 Lineární rovnice druhého řádu

Pro harmonický oscilátor, kde síla je úměrná výchylce z klidového stavu, dostáváme rovnici tvaru

$$x''(t) = -a^2x(t), \;\; x(0) = x_0, \;\; x'(0) = v_0$$

kde $a^2 = k/m$. Pravá strana rovnice je lineární v $x(t)$, proto mluvíme o lineární rovnici druhého řádu. Pro energii násobenou $2/m$ je

$$x'^2(t) + a^2x^2(t) = x'^2(0) + x^2(0) = E_0$$

a odtud

$$x'(t) = \pm\sqrt{E_0 - a^2x^2(t)} = \pm\sqrt{E_0}\sqrt{1 - \frac{a^2}{E_0}x^2(t)}, \quad x(0) = x_0$$

V časovém intervalu, ve kterém je rychlost kladná, je

$$\sqrt{E_0}\, t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{E_0}x^2}} = \frac{\sqrt{E_0}}{a}\left[\arcsin\frac{as}{\sqrt{E_0}}\right]_{x_0}^{x(t)}$$

$$x(t) = \frac{\sqrt{E_0}}{a}\sin(at + \arcsin\frac{ax_0}{\sqrt{E_0}})$$

Řešení platí v celém intervalu $(-\infty, +\infty)$. Jsou to sinusové kmity s frekvencí $a = k/m$ a amplitudou, která závisí na energii. Pro vhodné konstanty C a t_0 můžeme psát řešení ve tvaru $x(t) = C\sin a(t - t_0)$. Jiný obecný tvar řešení dostaneme ze součtového vzorce pro sinus

$$x(t) = C_1 \sin at + C_2 \cos at$$

Analogicky řešíme formálně podobný případ lineární rovnice druhého řádu

$$x''(t) = a^2x(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

kde pravá strana má kladné znaménko. Zde se zachovává funkce

$$E(t) = x'^2(t) + a^2x^2(t) = x'^2(0) + x^2(0) = E_0$$

a odtud

$$x'(t) = \pm\sqrt{E_0 + a^2x^2(t)} = \pm\sqrt{E_0}\sqrt{1 + \frac{a^2}{E_0}x^2(t)}, \quad x(0) = x_0$$

takže

$$\sqrt{E_0}t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{E_0}x^2}} = \frac{\sqrt{E_0}}{a}\left[\arg\sinh\left(\frac{a}{\sqrt{E_0}s}\right)\right]_{x_0}^{x(t)}$$

$$x(t) = \frac{\sqrt{E_0}}{a}\sinh\left(at + \arg\sinh\frac{a}{\sqrt{E_0}}x_0\right)$$

Pro vhodné konstanty můžeme psát řešení v kterémkoliv z tvarů

$$\begin{aligned} x(t) &= C\sinh a(t - t_0) \\ x(t) &= C_1\sinh at + C_2\cosh at \\ x(t) &= C_3e^{at} + C_4e^{-at} \end{aligned}$$

V případě $a = 0$ řešíme rovnici $x''(t) = 0$ přímo integrací

$$x(t) = C_1t + C_0$$

Uvažujeme-li v mechanických úlohách faktor tření, objeví se v rovnicích jako další síla, která působí proti směru pohybu. V nejjednodušším případě je úměrná rychlosti.

$$mx''(t) = F(x(t)) - rx'(t)$$

Pro harmonický oscilátor je

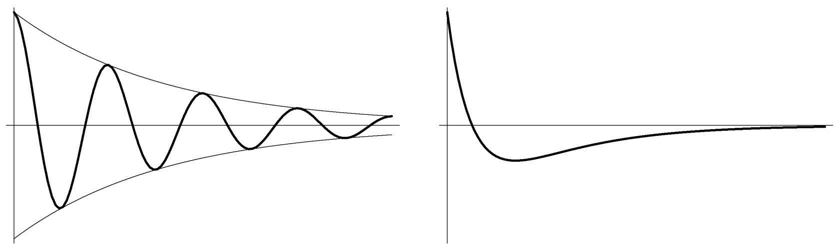
$$x''(t) + 2ax'(t) + bx(t) = 0$$

kde $a = k/2m$ a $b = r/m$. Uvažujme nyní obecnou rovnici tohoto typu pro libovolné koeficienty a, b. Nazýváme ji lineární rovnice druhého řádu. Její řešení hledáme ve tvaru $x(t) = y(t)e^{-at}$. Dosadíme-li do rovnice první a druhou derivaci

$$x'(t) = (y'(t) - ay(t))e^{-at}, \;\; x''(t) = (y''(t) - 2ay'(t) + a^2y(t))e^{-at}$$

dostáváme rovnici

$$y''(t) = (b - a^2)y(t)$$



Obrázek 5.10: Lineární soustava druhého řádu

Obecné řešení lineární rovnice druhého řádu je tedy

$$\begin{aligned}
x(t) = &\ \left(C_1 \sin(t\sqrt{a^2-b}) + C_2 \cos(t\sqrt{a^2-b})\right) e^{-at} && a^2 - b > 0 \\
x(t) = &\ (C_1 t + C_2)e^{-at} && a^2 - b = 0 \\
x(t) = &\ \left(C_1 \sinh(t\sqrt{b-a^2}) + C_2 \cosh(t\sqrt{b-a^2})\right) e^{-at} && a^2 - b < 0
\end{aligned}$$

V posledním případě lze řešení také psát ve tvaru

$$x(t) = C_1 e^{(-a+\sqrt{a^2-b})t} + C_2 e^{(-a-\sqrt{a^2-b})t}$$

Všimněte si formální podobnosti s řešením kvadratické rovnice. V tlumeném lineárním oscilátoru je $a, b > 0$ a řešení vždy konverguje k nule. Je-li $b < a^2$, dochází k oscilacím (obr. 5.10 vlevo). Je-li $b \geq a^2$, dojde nejvýše k jednomu překmitu (obr. 5.10 vpravo).

5.4.2 Volný pád

Uvažujme volný pád tělesa hmotnosti m v gravitačním poli tělesa s hmotností M a předpokládejme, že počáteční rychlost je nulová.

$$mx''(t) = \frac{\kappa M m}{x^2(t)}; \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0$$

Celková energie je

$$E(t) = \frac{m}{2}x'^2(t) - \frac{\kappa M m}{x(t)} = -\frac{\kappa M m}{x_0} = E_0$$

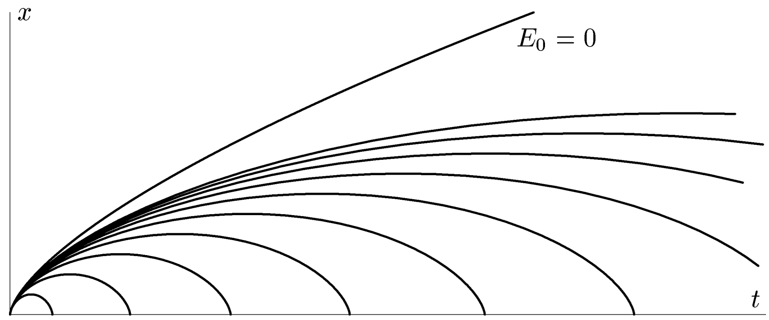
Odtud

$$x'(t) = -\sqrt{2\kappa M}\sqrt{\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x_0}}, \quad x(0) = x_0$$

Znaménko před odmocninou je záporné, protože počáteční rychlost je nulová. Rovnici řešíme substitucí $\frac{y^2}{x_0} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}$, tj. $x = \frac{x_0}{1+y^2}$, $dx = \frac{-2x_0 y}{(1+y^2)^2}\,dx$. S použitím příkladu 112 dostáváme

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\kappa M}t &= -\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}} = 2x_0^{3/2}\int_0^{y(t)} \frac{dy}{(1+y^2)^2} \\
&= x_0^{3/2}\left[\frac{y}{(1+y^2)^2} + \arctan y\right]_0^{\sqrt{\frac{x_0}{x(t)}-1}}
\end{aligned}$$

Řešení lze vyjádřit přehledněji v parametrickém tvaru, položíme-li $u = 2\arctan y$, neboli $y = \tan\frac{u}{2}$. Po dosazení do rovnic pro t a x je



Obrázek 5.11: Volný pád

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2\kappa M}{x_0}}t &= x_0\left(\frac{\tan\frac{u}{2}}{1+\tan^2\frac{u}{2}} + \frac{u}{2}\right) = \frac{x_0}{2}(\cos u + u) \\
x &= \frac{x_0}{1+\tan^2\frac{u}{2}} = x_0\cos^2\frac{u}{2} = \frac{x_0}{2}(\cos u + 1)
\end{aligned}$$

To je parametrická rovnice cykloidy kterou opisuje bod kružnice s poloměrem $x_0/2$, která se valí po ose $\tau = \sqrt{2\kappa M/x_0}\, t$. V čase $t = 0$ je vytvářející bod na vrcholu kružnice v pozici $[0, x_0]$. Cykloida se střetne s osou τ při $u = \pi$, kdy je $x = \frac{x_0}{2}(\cos\pi + 1) = 0$. Doba dopadu je

$$T = \sqrt{\frac{x_0}{2\kappa M}}\frac{x_0}{2}(\sin\pi + \pi) = \frac{\pi x_0^{3/2}}{\sqrt{8\kappa M}}$$

Všimněme si, že nalezené řešení je platné v intervalu $u \in (-\pi, \pi)$. Představuje dráhu tělesa, které vylétne z nuly (v čase $-T$) s nekonečnou počáteční rychlostí, s energií, která stačí právě na to aby dolétlo v čase $t = 0$ do vzdálenosti x_0, odkud se zase vrací zpět. Tento průběh má pohyb vždy, když počáteční energie $E_0 = -\frac{\kappa Mm}{x_0}$ je záporná. Je-li počáteční energie nulová, dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\sqrt{2\kappa M}}{\sqrt{x(t)}}, \quad \lim_{t\to 0^+} x(t) = 0 \\ \sqrt{2\kappa M}t &= \int_{0^+}^{x(t)} x^{1/2}\, dx = \frac{2}{3}[x^{3/2}]_{0^+}^{x(t)} \end{aligned}$$

tj. $x(t) = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\kappa M t^2}$. Těleso se vzdaluje do nekonečna, přitom jeho rychlost $x'(t) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{2}\kappa M t^{-1}}$ se blíží k nule. Je-li počáteční energie $E_0 > 0$ kladná, těleso se také vzdaluje do nekonečna, jeho limitní rychlost je pak $\sqrt{2E/m}$. Dráhy tělesa s různou počáteční energií jsou na obr. 5.11.

5.4.3 Brachystochrona

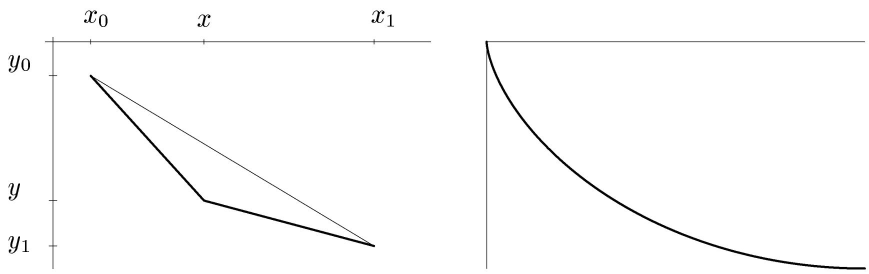
Uvažujme těleso hmotnosti m, které v homogenním gravitačním poli klouže bez tření po dráze daného tvaru. Dráha je umístěna v souřadné soustavě s vodorovnou osou x a svislou osou y. Směr osy y však orientujeme dolů. Předpokládejme, že nulová hladina energie je v $y = 0$. Pro výšku $y(t)$ a rychlost $v(t)$ tělesa v čase t platí podle zákonu zachování energie $\frac{m}{2}v^2(t) - mgy(t) = 0$, takže $v(t) = \sqrt{2gy(t)}$. Uvažujme nejprve nakloněnou rovinu, která spojuje body $[x_0, y_0]$ a $[x_1, y_1]$. Síla, která působí na těleso ve směru pohybu, je $-mg\sin\varphi$, kde $\varphi = \arctan\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ je sklon roviny. Rychlost je lineární funkce $v(t) = v_0 + tg\sin\varphi$, takže čas, za který bod dráhu proběhne je

$$\begin{aligned} T &= \frac{v_1 - v_0}{g\sin\varphi} = \frac{\sqrt{2gy_1} - \sqrt{2gy_0}}{g(y_1 - y_0)}\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_0}} \end{aligned}$$

Je-li dráha daná funkcí $y = f(x)$, uvažujme infinitesimální dělení $(z_i)_{i=0}^p$ intervalu $[x_0, x_1]$. Doba, za kterou těleso dráhu proběhne je pak

$$T = \sum_{i=0}^{p} \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{z_{i+1} - z_i}{\sqrt{f(z_{i+1})} + \sqrt{f(z_i)}} \sqrt{1 + \left(\frac{f(z_{i+1}) - f(z_i)}{z_{i+1} - z_i}\right)^2}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+f'^2(x)}{f(x)}}\, dx$$



Obrázek 5.12: Nakloněná rovina

Pro dané dva body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$ hledáme dráhu, která je spojuje takovou, aby tento čas byl nejmenší. To je optimalizační úloha, možná řešení však nejsou čísla, ale celé funkce. Uvažujme nejprve dráhu sestávající ze dvou úseček, spojující body $[x_0, y_0]$, $[x, y]$, $[x_1, y_1]$ (obr. 5.12). Podle předcházejícího výsledku je čas roven (vynecháváme konstantní koeficient $\sqrt{2g}$)

$$T = \frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\sqrt{y}+\sqrt{y_0}} + \frac{\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y}}$$

Pro pevná x_0, y_0, x_1, y_1 a y hledejme takové x, pro který je tento čas nejmenší. Chápeme tedy čas $T(x)$ jako funkci proměnné x a hledáme x pro které je $T'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{x-x_0}{(\sqrt{y}+\sqrt{y_0})\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \\ &- \frac{x_1-x}{(\sqrt{y_1}+\sqrt{y})\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}} = 0 \end{aligned}$$

Sestává-li funkce f z lineární lomené čáry spojující body $[x_i, y_i]$, musí být tato podmínka splněna pro každou trojici po sobě následujících bodů $[x_{i-1}, y_{i-1}]$, $[x_i, y_i]$, $[x_{i+1}, y_{i+1}]$. To znamená, že hodnota

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{(\sqrt{y_{i+1}}+\sqrt{y_i})\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}} = C$$

je pro všechna i stejná. Pro infinitesimální dělení (z_i) intervalu $[x_0, x_1]$ je tedy

$$\frac{1}{C^2} = (\sqrt{f(z_{i+1})}+\sqrt{f(z_i)})^2 \left(1+\left(\frac{f(z_{i+1})-f(z_i)}{z_{i+1}-z_i}\right)^2\right) \approx 4f(z_i)(1+f'^2(z_i))$$

Položíme-li $r = 1/8C^2$, dostáváme diferenciální rovnici

$$f(x)(1+f'^2(x)) = 2r, \quad f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1$$

pro neznámou hodnotu r. To je stejná rovnice $f'(x) = \pm\sqrt{2r/f(x) - 1}$ jako pro pohyb v gravitačním poli tělesa. Uvažujme počáteční podmínky

$$f'(x) = \sqrt{\frac{2r}{f(x)} - 1}, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

Volíme substitucí $z = \sqrt{\frac{2r}{y} - 1}$, $y = \frac{2r}{z^2+1}$, $dy = \frac{-2rz}{(1+z^2)^2}$

$$\begin{aligned} x &= \int_0^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2r}{y} - 1}} = -2r \int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = -2r \left[\frac{z}{1+z^2} + \arctan z \right]_{+\infty}^{\sqrt{\frac{2r}{y} - 1}} \\ &= \pi r + 2r \left(\frac{z}{1+z^2} + \arctan z \right) \end{aligned}$$

Položíme-li $u = 2\arctan z + \pi$, $z = \tan \frac{u-\pi}{2}$, dostáváme

$$\begin{aligned} x(u) &= \pi r + r(\sin(u - \pi) + u - \pi) = r(u - \sin u) \\ y(u) &= 2r \cos^2 \frac{u - \pi}{2} = r(1 - \cos u) \end{aligned}$$

Brachystochrona je tedy cykloida. Získané řešení odpovídá počátečním podmínkám s krajními body $[0, 0]$ a $[2\pi r, 0]$. Pro každé dva body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, kde $y_0, y_1 \leq 0$ existuje jediná cykloida s hroty na $y = 0$, která jimi prochází.

Cvičení Řešte diferenciální rovnice

1. $x''(t) + 2x'(t) + 4x(t) = 0$
2. $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$