Kapitola 6

FUNKCIONÁLNÍ ŘADY

6.1 Dolní a horní limita posloupnosti

Jestliže limita reálné posloupnosti $(a_n)_n$ neexistuje, vyjadřujeme její chování v nekonečnu jejími hromadnými monádami

Definice 135 *Říkáme, že A je hromadná monáda posloupnosti $(a_n)_n$, jestliže existuje $p \in \mathbb{N}^\infty$ pro které $a_p \in A$. Říkáme, že $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod posloupnosti $(a_n)_n$, je-li $a^\bullet$ její hromadná monáda, tj. jestliže existuje $p \in \mathbb{N}^\infty$ tak že $a_p \approx a$.*

Posloupnost $a_n = (-1)^n$ má hromadné body 1 a -1. Je-li totiž $p \in \mathbb{N}^\infty$ sudé, je $a_p = 1$, a je-li liché, je $a_p = -1$. Hromadné body lze charakterizovat vybranými posloupnostmi. Říkáme, že $(b_n)_n$ je posloupnost vybraná z posloupnosti $(a_n)_n$, existuje-li rostoucí posloupnost $(m_n)_n$ přirozených čísel taková, že $b_n = a_{m_n}$. Například posloupnost $b_n = 2^{-n}$ je posloupnost vybraná z $a_n = \frac{1}{n}$ a konstantní posloupnost $b_n = 1$ je vybraná z posloupnosti $a_n = (-1)^n$.

Tvrzení 136 *A je hromadná monáda posloupnosti (a_n) právě když existuje vybraná posloupnost taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} := A$.*

Důkaz: Nechť $(a_{n_k})_k$ je posloupnost vybraná z $(a_n)_n$ a $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} := A$. Pak pro $k \in \mathbb{N}^\infty$ je $p = n_k \in \mathbb{N}^\infty$ a $a_p \in A$. Předpokládejme naopak, že A je hromadná monáda posloupnosti $(a_n)_n$, tj. existuje $p \in \mathbb{N}^\infty$ pro které $a_p \in A$. Nechť $A = X^* \cap a^\bullet$, kde $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina reálných čísel. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n > k$, pro které $a_n \in X \cap (a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k})$. Kdyby to totiž neplatilo, existovalo by $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > k$ by bylo $a_n \notin X \cap (a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k})$, a tedy také pro p by $a_p \notin X^* \cap a^\bullet = A$. Vybranou posloupnost $(n_k)_k$ nyní sestrojíme indukcí tak, aby pro každé k bylo $n_k > k$, $n_k > n_{k-1}$ a $a_{n_k} \in X \cap (a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k})$. Jestliže $A = X^* \cap \mathbb{R}^\infty$ sestrojujeme vybranou posloupnost $(n_k)_k$ tak, aby platilo $n_k > k$, $n_k > n_{k-1}$, $a_{n_k} \in X$ a $|a_{n_k}| > k$. □

Omezíme-li se na hromadné monády $a^\bullet$, $-\infty$ a $+\infty$, má každá posloupnost právě jednu největší a právě jednu nejmenší hromadnou monádu. Nazýváme je dolní limta $\liminf_{n\to\infty} a_n$ a horní limita $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Definice 137 *Nechť $(a_n)_n$ je reálná posloupnost a A buď vlastní monáda $a^\bullet$ nebo $-\infty$ nebo $+\infty$. Pak*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = A \quad \Leftrightarrow \quad (\exists p \in \mathbb{N}^\infty)(a_p \in A) \ \ \& \ \ (\forall q \in \mathbb{N}^\infty)(\forall x \in A)(a_q \geq x)$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = A \quad \Leftrightarrow \quad (\exists p \in \mathbb{N}^\infty)(a_p \in A) \ \ \& \ \ (\forall q \in \mathbb{N}^\infty)(\forall x \in A)(a_q \leq x)$$

Místo $\liminf_{n\to\infty} a_n = a^\bullet$ píšeme $\liminf_{n\to\infty} a_n = a$ a místo $\limsup_{n\to\infty} a_n = a^\bullet$ píšeme $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$.

Věta 138 *Každá reálná posloupnost má právě jedinou dolní limitu a jedinou horní limitu. Limita posloupnosti existuje právě když se její dolní limita a horní limita rovnají.*

Důkaz: Pro pevné $q \in \mathbb{N}^\infty$ a $p \in \mathbb{Z}^*$ položme $B_p = \{n \in \mathbb{N} : \ \frac{p}{q} < a_n\}$. Zřejmě B_{-q^2} obsahuje všechna konečná přirozená čísla a B_{q^2} je prázdná. Nechť $p \in \mathbb{Z}^*$ je největší celé číslo $(-q^2 < p < q^2)$, pro které je B_p nekonečná, takže B_{p+1} je konečná. Pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{p}{q} < a_n \leq \frac{p+1}{q}$, takže existuje $r \in \mathbb{N}^\infty$ pro které $\frac{p}{q} < a_r \leq \frac{p+1}{q}$. Protože B_{p+1} je konečná, pro všechna $r \in \mathbb{N}^\infty$ platí $a_r \leq \frac{p+1}{q}$. Je-li $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}^\infty$ nekonečné záporné, je $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Je-li $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}^\infty$ nekonečné kladné, je $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Je-li $\frac{p}{q} \approx a \in \mathbb{R}$ konečně velké, je $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$. □

Pro $a \in \mathbb{R}$ nebo $a = +\infty$ nebo $a = -\infty$ je tedy

$$\limsup_{n\to\infty} a_n < a \quad \Leftrightarrow \quad (\forall q \in \mathbb{N}^\infty)(a_q < a)$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n > a \quad \Leftrightarrow \quad (\exists q \in \mathbb{N}^\infty)(a_q > a)$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n > a \quad \Leftrightarrow \quad (\forall q \in \mathbb{N}^\infty)(a_q > a)$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n < a \quad \Leftrightarrow \quad (\exists q \in \mathbb{N}^\infty)(a_q < a)$$

Například

$$\liminf_{n\to\infty} (-1)^n = -1, \qquad \limsup_{n\to\infty} (-1)^n = 1$$

$$\liminf_{n\to\infty} (-n)^n = -\infty, \qquad \limsup_{n\to\infty} (-n)^n = +\infty$$

$$\liminf_{n\to\infty} (1 + (-\tfrac{1}{2})^n)^n = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} (1 + (-\tfrac{1}{2})^n)^n = +\infty.$$

Racionální čísla lze uspořádat do posloupnosti

$$0, \tfrac{-1}{1}, \tfrac{1}{1}, \tfrac{-2}{1}, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{-3}{1}, \tfrac{-2}{2}, \tfrac{-1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{2}, \tfrac{3}{1}, \ldots$$

ve které se vyskytují všechna racionální čísla. Každé reálné číslo je hromadný bod této posloupnosti. Její dolní limita je $-\infty$ a její horní limita je $+\infty$.

Pojem dolní a horní limity umožňuje zesílit kritéria konvergence řad.

Věta 139 (Cauchyovo odmocninové kriterium konvergence)

1. *Jestliže* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *pak řada* $\sum a_k$ *konverguje absolutně.*

2. *Jestliže* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *pak řada* $\sum a_k$ *nekonverguje.*

Důkaz. Zvolme r, pro které $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < r < 1$. Pak pro každé $q \in \mathbb{N}^\infty$ platí $\sqrt[q]{|a_q|} < r$ a tedy existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq m$ platí $\sqrt[n]{|a_n|} < r$, a tedy $|a_n| \leq r^n$. Odtud

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{m-1} |a_k| + \sum_{k=m}^{\infty} r^n = \sum_{k=0}^{m-1} |a_k| + \frac{r^m}{1-r} < +\infty$$

2. Jestliže naopak $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > r > 1$, pak existuje $p \in \mathbb{N}^\infty$ pro které $|a_p| > r^p := +\infty$, takže řada $\sum a_k$ nekonverguje. □

Ani toto zesílené kriterium neříká nic o případu kdy $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. V tomto případě řada může buď konvergovat jako $\sum \frac{1}{k^2}$ nebo divergovat jako $\sum \frac{1}{k}$.

Věta 140 (D'Alembertovo podílové kriterium konvergence)

Jestliže $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *pak řada* $\sum a_k$ *konverguje absolutně.*

Jestliže $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *pak řada* $\sum a_k$ *nekonverguje.*

Důkaz. Zvolme opět r, pro které $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r < 1$, takže existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > m$ platí $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q$ a tedy

$$|a_n| \leq |a_{n-1}|r \leq |a_{n-2}|r^2 \leq \cdots \leq |a_m|r^{n-m}$$

Odtud

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{m-1} |a_k| + \sum_{k=m}^{\infty} |a_m|r^{n-m} = \sum_{k=0}^{m-1} |a_k| + \frac{|a_m|r^{n-m}}{1-r} < +\infty$$

2. Jestliže $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r > 1$, pak existuje $m \in \mathbb{N}$, tak že pro všechna $n > m$ platí $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > r$ a tedy

$$|a_n| \geq |a_{n-1}|r \geq |a_{n-2}|r^2 \geq \cdots \geq |a_m|r^{n-m}$$

Odtud $\lim_{n\to\infty} |a_n| := +\infty$, takže řada $\sum a_n$ nekonverguje. $\square$

Druhou část podílového kriteria nelze zesílit na případ $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. Uvažujme řadu $\sum a_n$, kde $a_{2n} = 2^{-2n-2}$, $a_{2n+1} = 2^{-2n-1}$:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} \cdots$$

Zřejmě $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2$ ale řada $\sum a_k$ konverguje, protože je směsí dvou geometrických řad s kvocientem $\frac{1}{2}$.

6.2 Mocninné řady

Mocninná řada je funkce definovaná předpisem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

kde $(a_k)_k$ je reálná posloupnost a $a \in \mathbb{R}$ je reálné číslo (střed mocninné řady). Speciálně $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ je mocninná řada se středem v nule. Definiční obor mocninné řady je množina těch x, kde řada konverguje. V každém případě do něj náleží její střed a, protože $f(a) = a_0$. Například geometrická řada $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ s koeficienty $a_k = 1$ má definiční obor $\mathcal{D}(f) = (-1, 1)$ a na tomto definičním oboru je $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Rozsah definičního oboru mocninné řady vyjadřuje její poloměr konvergence.

Definice 141 *Poloměr konvergence mocninné řady*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \quad je \quad r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Poloměr konvergence mocninné řady je v mezích $0 \le r \le +\infty$. Pro geometrickou řadu je poloměr konvergence $r = \frac{1}{\sqrt[k]{1}} = 1$. Řada $\sum k^{-k} x^k$ má poloměr konvergence $r = 1/\liminf_{k\to\infty} k^{-1} = +\infty$. Řada $\sum k^k x^k$ má poloměr konvergence $r = 1/\liminf_{k\to\infty} k = 0$. Poloměr konvergence je ovšem $r := \lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{|a_k|}$, pokud tato limita existuje. Při změně konečně mnoha členů řady se její poloměr konvergence nezmění. Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ má stejný poloměr konvergence jako řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ (i když má jiný součet). Hovoříme-li o poloměru konvergence, nemusíme nutně uvádět počáteční index řady.

Tvrzení 142 *Nechť r je poloměr konvergence mocninné řady $\sum a_k x^k$. Pak*
1. $\sum a_k x^k$ konverguje absolutně pro $|x| < r$
2. $\sum a_k x^k$ nekonverguje pro $|x| > r$

Důkaz plyne ihned z odmocninového kriteria, neboť $|x| < r$ právě když

$$|x| \cdot \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} < 1$$

Tvrzení 143 *Poloměr konvergence řady $\sum a_k x^k$ je $r := \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, pokud tato limita existuje.*

Důkaz: Pro $x \neq 0$ je

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k}\right| := |x| \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| := \frac{|x|}{r}$$

Podle podílového kriteria řada konverguje absolutně pro $|x| < r$ a nekonverguje pro $|x| > r$. Její poloměr konvergence je tedy r. □

O konvergenci v hraničních bodech $x = \pm r$ žádná z těchto podmínek nic neříká. Některé řady v nich konvergují, jiné nikoliv. Řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ má poloměr konvergence $r = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^2} = 1$. Vidíme to též podle podílového kritéria: $r = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1$. Podle příkladu 19 řada konverguje absolutně i pro $x = \pm 1$. Řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2 x^2$ má stejný poloměr konvergence $r = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^{-2}} = 1$, v bodech $x = \pm 1$ však nekonverguje. Také řada $\sum\limits_{k\to\infty} \frac{x^k}{k}$ má poloměr konvergence $r = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$. Pro $x = 1$ je to harmonická řada, která nekonverguje, pro $x = -1$ je to alternující harmonická řada, která konverguje.

Mocninnou řadu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ můžeme formálně derivovat člen po členu. Tím obdržíme řadu

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

Ukážeme si, že tato řada má stejný poloměr konvergence jako řada původní a je vskutku její derivací.

Tvrzení 144 *Řady $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ mají stejný poloměr konvergence.*

Důkaz: Jestliže konverguje pro nějaké x řada $\sum k|a_k x^{k-1}|$, konverguje i řada $\sum |a_k x^k|$, protože

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k| \leq |a_0| + |x| \sum_{k=1}^{\infty} |k a_k x^{k-1}| \leq +\infty$$

Naopak předpokládejme, že pro $s > 0$ konverguje řada $\sum |a_k| s^k$ a nechť $|x| < s$. Posloupnost $b_k = \frac{k}{s} |\frac{x}{s}|^{k-1}$ konverguje k nule, existuje tedy $b \in \mathbb{R}$, tak že $b_k < b$ pro všechna k. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} |k a_k x^{k-1}| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| s^k \frac{k}{s} \left| \frac{x}{s} \right|^{k-1} \leq b \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| s^k < +\infty$$

Podle tvrzení 142 mají obě řady stejný poloměr konvergence.

Věta 145 *Nechť* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $r > 0$. *Pak funkce* $f(x)$ *je spojitá na otevřeném intervalu* $(-r, r)$.

Důkaz: Nechť $|x| < r$, zvolme s pro které $|x| < s < r$ a nechť $y \approx x$. Řada $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$ má poloměr konvergence r, takže $g(s)$ je konečné. Odtud

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |y^k - x^k| \\ &\leq |y - x| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| (|y|^{k-1} + |y|^{k-2}|x| + \cdots + |y||x|^{k-2} + |x|^{k-1}) \\ &\leq |y - x| \sum_{k=1}^{\infty} k |c_k| s^k = |y - x| g(s) \approx 0 \quad \square \end{aligned}$$

Věta 146 *Nechť* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $r > 0$. *Pak* $f(x)$ *má v otevřeném intervalu* $(-r, r)$ *derivaci*

$$f'(x) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

Důkaz: Položme $h(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$. Funkce $h(x)$ je formální derivací funkce $g(x)$ a proto má opět stejný poloměr konvergence r. Pro $|x| < r$ zvolme s pro které $|x| < s < r$ a předpokládejme, že $y \approx x$. Pak

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - g(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{y^k - x^k}{y - x} - k a_k x^{k-1} \right) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k |y^{k-1} + y^{k-2}x + \cdots + yx^{k-2} + x^{k-1} - kx^{k-1}| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} a_k (|y^{k-1} - x^{k-1}| + |y^{k-2} - x^{k-2}||x| + \cdots + |y-x||x|^{k-2}) \\
&\leq |y-x| \sum_{k=2}^{\infty} a_k \big(\overbrace{(|y|^{k-2} + \cdots + |x|^{k-2})}^{k-1} + \overbrace{(|y|^{k-3} + \cdots + |x|^{k-3})}^{k-2} |x| \\
&\qquad + \cdots + (|y| + |x|)|x|^{k-3} + |x|^{k-2} \big) \\
&\leq |y-x| \sum_{k=2}^{\infty} a_k \frac{k(k-1)}{2} s^{k-2} = \frac{1}{2}|y-x| h(s) \approx 0 \quad \square
\end{aligned}$$

Mocninná řada $f(x)$ tedy má na intervalu $(-r, r)$ derivace všech řádů a také zde má primitivní funkci

$$\int f(x)\,dx = a_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

kde a_{-1} je libovolná integrační konstanta. Mnoho příkladů mocninných řad získáme rozvojem dané funkce v nějakém bodě podle Taylorovy věty. Pomocí teorie mocninných řad lze ukázat některé rozvoje funkcí jednodušeji. Například geometrická řada

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots = \frac{1}{x}$$

má poloměr konvergence 1. Řadu integrujeme a přitom volíme integrační konstantu tak aby hodnota primitivní funkce v 1 byla nulová. Pak řada

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$

má také poloměr konvergence 1 a na intervalu $(0, 2)$ se rovná $\ln x$.

Primitivní funkce geometrické řady

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

je arkus tangens

$$\arctan x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

Podle vzorce pro obecnou mocninu je

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \cdots$$

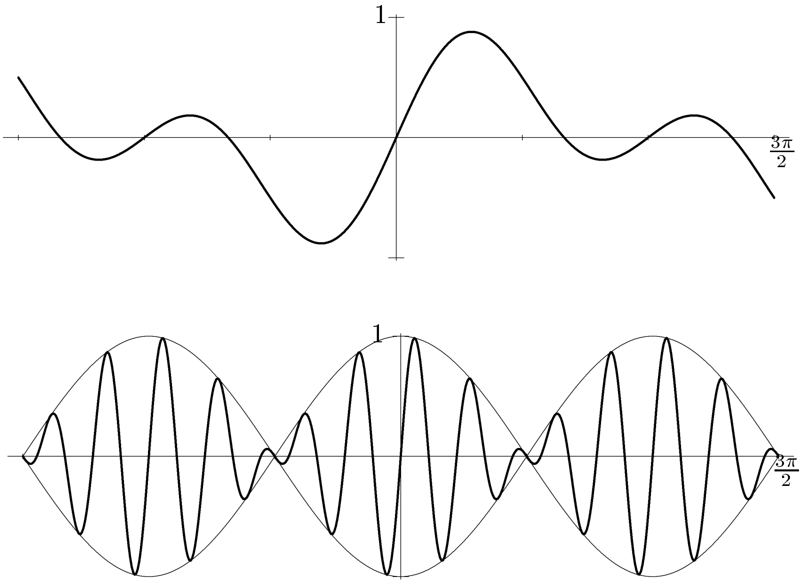
pro $|x| < 1$. Integrací dostáváme

$$
\begin{aligned}
\arcsin x &= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots \\
\arccos z &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} - \cdots
\end{aligned}
$$

6.3 Fourierovy řady

Periodicky se opakující děje jako je chvění struny, lze často vyjádřit jako složení (superpozici) jednoduchých sinusových kmitů. Čistý tón odpovídá funkci $\sin\omega x$ s jedinou frekvencí ω. Tóny jsou však většinou smíšeny s vyššími harmonickými, což jsou sinusové funkce, jejichž frekvence jsou násobky frekvence základní.

Reálná funkce f je periodická s periodou T, jestliže pro každé x platí $f(x+T) = f(x)$. Lineární transformací proměnné x lze periodu libovolně změnit. Omezíme se proto na funkce jejichž perioda je 2π, mezi které patří všechny funkce goniometrické. Periodu 2π mají také funkce $\cos nx$ i $\sin nx$, kde n je přirozené, i každá jejich lineární kombinace jako $\sin x + \sin 2x$ (obr. 6.1 nahoře), apod. V tomto tvaru lze vyjádřit i součiny goniometrických funkcí (rázové vlny) jako $\sin 9x \cos x = (\sin 5x + \sin 4x)/2$ (obr. 6.1 dole). Konstantní funkci dostaneme pro $m = 0$, $a = a\cos 0x$.



Obrázek 6.1: Periodické funkce

Na Fourierův rozklad je vhodné se dívat geometricky. Označme $\mathcal{F}_0$ množinu všech spojitých reálných funkcí s definičním oborem $(-\infty, +\infty)$, které jsou periodické s periodou 2π. Tyto funkce tvoří vektorový prostor. To znamená, že náleží-li

f, g do $\mathcal{F}_0$, náleží tam také jejich součet $f+g$ a násobek af, kde $a \in \mathbb{R}$. Na prostoru $\mathcal{F}_0$ definujeme operaci

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

Tato operace má všechny algebraické vlastnosti skalárního součinu. Ihned z definice je vidět, že $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$, $\langle af,g\rangle = a\langle f,g\rangle$, $\langle f,g+h\rangle = \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle$, $\langle f,f\rangle \geq 0$. Nakonec není-li f nulová funkce, Je $f(x) \neq 0$ na nějakém intervalu, a z toho plyne $\langle f,f\rangle > 0$. Říkáme, že funkce f a g jsou kolmé (ortogonální), jestliže $\langle f,g\rangle = 0$.

Tvrzení 147 *Funkce* $\cos nx$*,* $n \geq 0$ *a* $\sin nx$*,* $n > 0$ *tvoří ortogonální systém.*

$$\begin{aligned}
\langle \cos nx, \sin mx\rangle &= 0, & n,m &\geq 0\\
\langle \cos nx, \cos mx\rangle &= 0, & n \neq m,\ n,m &\geq 0\\
\langle \sin nx, \sin mx\rangle &= 0, & n \neq m,\ n,m &\geq 0\\
\langle \cos nx, \cos nx\rangle &= \pi, & n &> 0\\
\langle \sin nx, \sin nx\rangle &= \pi, & n &> 0\\
\langle 1,1\rangle &= 2\pi
\end{aligned}$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}
\langle 1,1\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dx = [x]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi\\
\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2nx)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi\\
\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi\\
\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(nx-mx)-\cos(nx+mx))\,dx = 0\\
\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(nx-mx)+\sin(nx+mx))\,dx = 0\\
\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(nx-mx)+\cos(nx+mx))\,dx = 0
\end{aligned}$$

Tvrzení 148 *Nechť* $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx$*. Pak*

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\langle f(x), \cos kx\rangle,\ \ 0 \leq k \leq n\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\langle f(x), \sin kx\rangle,\ \ 0 < k \leq n.
\end{aligned}$$

Důkaz: Vynásobíme-li f skalárně s funkcemi ortogonálního systému, dostáváme $\langle f(x), 1\rangle = a_0$, $\langle f(x), \cos kx\rangle = a_k$, $\langle f(x), \sin kx\rangle = b_k$.

Fourierova analýza zobecňuje větu 148 na nekonečné součty, odehrává se však v obecnějším prostoru funkcí než $\mathcal{F}_0$. V technické praxi je často potřeba rozložit na periodické kmity i nespojité funkce při generování pulsů. Říkáme, že reálná funkce f je po částech spojitá, jestliže v každém kompaktním intervalu $\langle a, b\rangle$ má nejvýše konečný počet bodů, ve kterých není definována a nejvýše konečný počet bodů nespojitosti. Ve všech těchto bodech však má jednostranné limity. Funkce f je po částech hladká, je-li po částech spojitá, a její derivace je také po částech spojitá.

Definice 149 *Funkce f je fourierovská, je-li periodická s periodou 2π, po částech hladká a v každém bodě platí*

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{y\to x^-} f(y) + \lim_{y\to x^+} f(y)\right)$$

Označme $\mathcal{F}$ prostor fourierovských funkcí.

Poslední podmínka implikuje, že definiční obor funkce je $(-\infty, +\infty)$. Fourierovské funkce opět tvoří vektorový prostor, tj. je-li $f, g \in \mathcal{F}$ je také $af + bg \in \mathcal{F}$ pro každé $a, b \in \mathbb{R}$. Také operace $\langle f, g\rangle$ má všechny vlastnosti skalárního součinu. Po částech spojité funkce přitom integrujeme podle definice 118.

Tvrzení 150 *Nechť $f \in \mathcal{F}$. Pak pro každé $a \in \mathbb{R}$*

$$\int_{\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x)\,dx$$

Důkaz: Substitucí $y = x + 2\pi$ dostáváme

$$\begin{aligned}\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x)\,dx &= \int_{a-\pi}^{-\pi} f(x)\,dx + \int_{-\pi}^{a+\pi} f(x)\,dx = \int_{a+\pi}^{\pi} f(y)\,dy + \int_{-\pi}^{a+\pi} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\end{aligned}$$

Tvrzení 151 *Nechť f je po částech hladká funkce. Pak pro každá $a < b$*

$$\lim_{y\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(xy)\,dy = 0$$

Důkaz: Určíme integrál nejprve v každém intervalu spojitosti funkce f, integrál v celém intervalu je jejich součet. Můžeme tedy předpokládat, že funkce f i její derivace f' jsou omezené a existuje M takové, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $|f(x)| < M$ a $|f'(x)| < M$. Integrací po částech dostáváme

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin(xy)\,dx\right| &= \left|\left[-\frac{f(x)}{y}\cos(yx)\right]_a^b + \int_a^b \frac{f'(x)}{y}\cos(yx)\,dx\right| \\ &\leq \frac{2M}{y}(b-a)\end{aligned}$$

Tvrzení 152 (Goniometrická součtová formule)

$$\tfrac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}},\quad \sin\frac{x}{2}\neq 0.$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

Důkaz: Ze vzorce $2\sin x\cos y=\sin(x+y)-\sin(y-x)$ dostáváme

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right) &= \sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx\\
&= \sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(\sin\big(kx+\frac{x}{2}\big)-\sin\big((k-1)x+\frac{x}{2}\big)\Big)\\
&= \sin\frac{(2n+1)x}{2}
\end{aligned}$$

Ze součtové formule pak

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx &= \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)dx\\
&= \left[\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{-\sin kx}{k}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Věta 153 (Fourierův rozvoj) *Nechť f je fourierovská funkce a položme*

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$$

Pak pro každé x

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

Důkaz: Položme

$$f_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

Dosadíme-li za a_k a b_k dostáváme s použitím cosinového součtového vzorce

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos ky\cos kx+\sin ky\sin kx\right)dy\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)\right)dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(y-x)}{2\sin\frac{1}{2}(y-x)}\,dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \end{aligned}$$

V poslední úpravě používáme substituci $t = y - x$ a periodicitu integrálu (tvrzení 150). Funkce

$$g(t) = \frac{f(x+t) - \lim\limits_{y\to x^+} f(y)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

je po částech hladká v intervalu $\langle 0,\pi\rangle$. To je zřejmé v intervalu $(0,\pi\rangle$. Pro $t = 0$ to plyne z předpokládané derivace f v x zprava

$$f'^{+}(x) = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-f(x^+)}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{t}{2}}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-f(x^+)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Podle tvrzení 151

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} g(t)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt - \frac{1}{\pi}\lim_{y\to x^+} f(y)\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt - \frac{1}{2}\lim_{y\to x^+} f(y) \end{aligned}$$

Obdobně ukážeme

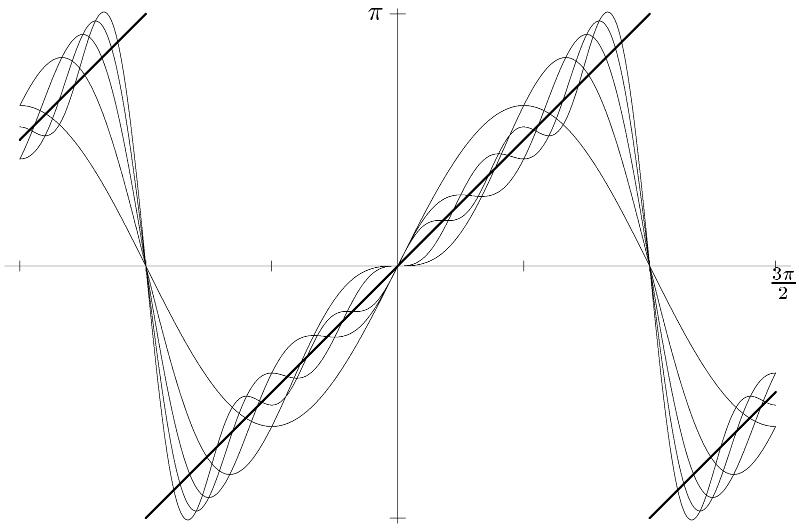
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\lim_{y\to x^-} f(y)$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{y\to x^-} f(y) + \lim_{y\to x^-} f(y)\right) \quad \square$$

Fourierovská funkce f je jednoznačně určena svými hodnotami v intervalu $(-\pi,\pi)$. Je-li f sudá, tj. $f(-x) = f(x)$, jsou všechny funkce $f(x)\sin kx$ liché, takže všechny koeficienty b_k jsou rovny nule, Fourierův rozvoj je sestaven pouze z funkcí $\cos kx$. Je-li f lichá funkce, tj. je-li $f(-x) = -f(x)$, jsou všechny funkce $f(x)\cos kx$ liché, takže všechny koeficienty a_k jsou rovny nule, Fourierův rozvoj je sestaven pouze z funkcí $\sin kx$.

Příklad 154 *$f(x) = x$ pro $x \in (-\pi,\pi)$.*



Obrázek 6.2: Fourierův rozvoj $f(x) = x$

Funkce má body nespojitosti $(2k+1)\pi$ ve kterých je nulová. Protože f je lichá funkce, jsou všechna a_k nulová. Koeficienty b_k jsou

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi k}\int_0^\pi \cos kx\,dx \\ &= (-1)^{k+1}\frac{2}{k} \end{aligned}$$

Odtud

$$\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

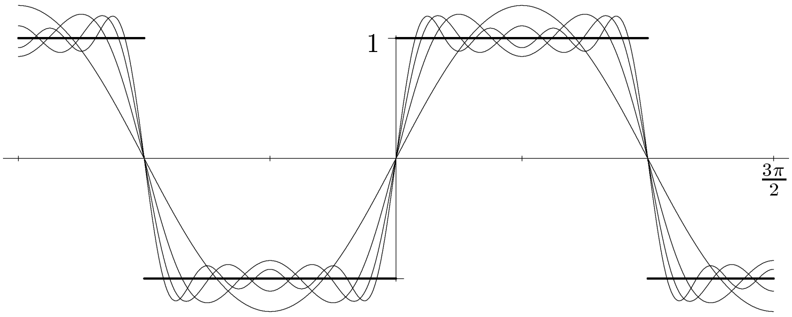
Speciálně pro $x = \pi/2$ je

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Příklad 155 $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ *pro* $x \in (-\pi, \pi)$.

Funkce je lichá, takže všechny koeficienty a_k jsou nulové. Koeficienty b_k jsou

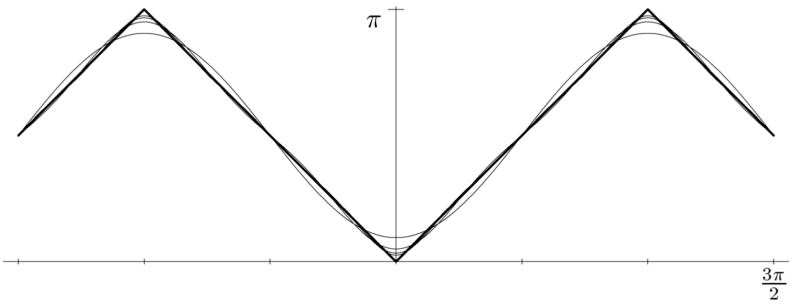
$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin kx\,dx = \frac{2}{\pi k}\left[-\cos kx\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi n}((-1)^{n+1} - 1) \\ &= 0 \qquad \text{pro sudé} \quad n \\ &= \frac{4}{\pi n} \quad \text{pro liché} \quad n \end{aligned}$$



Obrázek 6.3: Fourierův rozvoj sgn(x)

Odtud

$$\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots, \quad x \in (-\pi, \pi)$$



Obrázek 6.4: Fourierův rozvoj $|x|$

Příklad 156 $f(x) = |x|$ *pro* $x \in (-\pi, \pi)$.

Tato funkce je spojitá i v krajních bodech $\pm\pi$. Protože je sudá, je $b_k = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

Pro $k > 0$ je

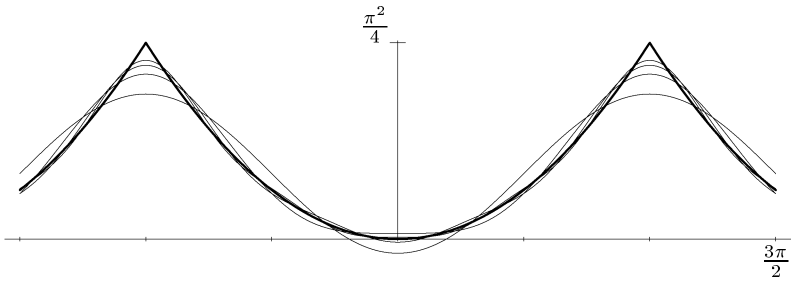
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi k}[x\sin kx]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi k^2}[\cos kx]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}((-1)^k - 1) \\ &= 0 \qquad \text{pro sudé} \quad k \\ &= -\frac{4}{\pi k^2} \quad \text{pro liché} \quad k \end{aligned}$$

Odtud

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right), \quad x \in (-\pi, \pi)$$

Pro $x = 0$ je

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$



Obrázek 6.5: Fourierův rozvoj x^2

Příklad 157 *$f(x) = x^2$ pro $x \in (-\pi, \pi)$.*

Funkce je spojitá i v krajních bodech $\pm\pi$. Protože je sudá, je $b_k = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{2\pi^2}{3}$$

Pro $k > 0$ je

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos kx\,dx = \frac{2}{\pi k}[x^2 \sin kx]_0^\pi - \frac{2}{\pi k}\int_0^\pi 2x \sin kx\,dx \\ &= \frac{4}{\pi k^2}\int_0^\pi x(\cos kx)' = \frac{4}{\pi k^2}\left[x \cos kx\right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos kx\,dx \\ &= \frac{4}{k^2}(-1)^k \end{aligned}$$

Odtud

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots\right), \quad x \in (-\pi, \pi)$$

Pro $x = 0$ a $x = \pi$ je

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{12} &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \\ \frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \end{aligned}$$

Techniku vyvinutou pro důkaz Fourierova rozvoje lze použít i na jiné problémy

Příklad 158 (Dirichletův integrál)

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Konvergenci tohoto integrálu jsme ukázali v příkladu 127. S použitím substituce $x = (n + \frac{1}{2})y$

$$\begin{aligned}\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{0+}^{\pi(n+\frac{1}{2})} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{0+}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{y}\, dy \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{0+}^{\pi} \left(f(y) + \frac{1}{2\sin\frac{y}{2}} \right) \sin(n+\tfrac{1}{2})y\, dy\end{aligned}$$

kde $f(y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{2\sin\frac{y}{2}}$ pro $y \neq 0$ a $f(0) = 0$. Funkce f je diferencovatelná v $[0, \pi]$ a tedy podle tvrzení 151 platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\pi} f(y) \sin(n+\tfrac{1}{2})y\, dy = 0$$

Odtud již podle tvrzení 152

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{0+}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{y}{2}}\, dy = \frac{\pi}{2}$$

6.4 Stejnoměrná konvergence

Taylorův i Fourierův rozvoj jsou speciální případy funkcionálních řad, nebo obecněji funkcionálních posloupností. V obou případech máme posloupnost funkcí $f_n(x)$ se stejným definičním oborem I a jejich limitu definujeme jako $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ pro každé $x \in I$. V případě Taylorova rozvoje jsou funkce f_n mnohočleny, v případě Fourierova rozvoje jsou f_n goniometrické funkce. Je přirozená otázka, zda se při této limitě zachovává spojitost a derivace, tj. $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$. Na příkladě Fourierova rozvoje vidíme, že limita spojitých funkcí být spojitá nemusí a tím méně se zachovává derivace. Platí to však, nahradíme-li podmínku konvergence silnější podmínkou stejnoměrné konvergence.

Definice 159 *Nechť f je reálná funkce a $(f_n)_n$ posloupnost reálných funkcí se stejným definičním oborem $\mathcal{D}(f_n) = \mathcal{D}(f)$. Říkáme, že f_n konverguje k f bodově ($f_n \to f$), konverguje-li v každém standardním bodě, a stejnoměrně ($f_n \rightrightarrows f$), konverguje-li v každém nestandardním bodě.*

$$\begin{aligned} f_n \to f_n &\iff (\forall x \in \mathcal{D}(f))(\forall q \in \mathbb{N}^\infty)(f_q(x) \approx f(x)) \\ f_n \rightrightarrows f_n &\iff (\forall x \in \mathcal{D}(f)^*)(\forall q \in \mathbb{N}^\infty)(f_q(x) \approx f(x)) \end{aligned}$$

Například posloupnost $f_n(x) = (1-x)^n$ konverguje na intervalu $\langle 0, 1)$ bodově k funkci $\mathrm{sgn}(x)$. Nekonverguje k ní však stejnoměrně. Je-li totiž $q \in \mathbb{N}^\infty$, a $a \in \langle 0, 1)$, položme $\alpha = 1 - \sqrt[q]{a}$. Pak $\alpha \in \langle 0, 1)^*$ je infinitesimální, $\alpha \approx 0$, ale $(1-\alpha)^q = a \neq 1 = \mathrm{sgn}(\alpha)$.

Tvrzení 160 *Nechť $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost spojitých funkcí, která stejnoměrně konverguje k funkci f. Pak pro každé $p \in \mathbb{N}^\infty$ je f_p spojitá, tj. pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ a každé $y \in \mathcal{D}(f)^*$ pro které $y \approx x$ je $f_p(y) \approx f_p(x)$.*

Důkaz: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n(y) \approx f_n(x)$ a tedy $|f_n(y) - f_n(x)| < \frac{1}{n}$. Ukážeme, že existuje $r \in \mathbb{N}^\infty$ pro které $|f_r(y) - f_r(x)| < \frac{1}{r}$. Zvolme $q \in \mathbb{N}^\infty$ libovolně. Jestliže $|f_q(y) - f_q(x)| < \frac{1}{q}$, položme $r = q$. Jestliže $|f_q(y) - f_q(x)| \geq \frac{1}{q}$, nechť s je první nestandardní číslo $s \in \mathbb{N}^*$ (menší nebo rovno q), pro které $|f_s(y) - f_s(x)| \geq \frac{1}{s}$ a položme $r = s - 1$. Protože $s \in \mathbb{N}^\infty$ je také $r \in \mathbb{N}^\infty$ a $|f_r(y) - f_r(x)| < \frac{1}{r}$. Nechť $p \in \mathbb{N}^\infty$ je nyní libovolné nekonečné. Protože (f_n) konverguje stejnoměrně, je

$$f_p(y) \approx f(y) \approx f_r(y) \approx f_r(x) \approx f(x) \approx f_p(x)$$

Věta 161 *Stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá.*

Důkaz: Nechť f_n stejnoměrně konvergují k f a $p \in \mathbb{N}^\infty$. Podle tvrzení 160 pro $x \in \mathcal{D}(f)$, $y \in \mathcal{D}(f)^*$, $y \approx x$ platí

$$f(y) \approx f_p(y) \approx f_p(x) \approx f(x) \quad \square$$

Věta 162 *Nechť f_n je posloupnost diferencovatelných funkcí, které bodově konvergují k f, nechť $f_n' = g_n$ stejnoměrně konvergují k funkci g. Pak f je diferencovatelná a $f'(x) = g$.*

Důkaz: Podle věty 161 je funkce g spojitá. Nechť $x < y$, $\langle x, y\rangle \subseteq \mathcal{D}(f)$ a $p \in \mathbb{N}^\infty$. Podle věty o přírůstku funkce existuje $z \in \langle x, y\rangle^*$ a jeho projekce $w = \mathfrak{P}(z) \in \langle x, y\rangle$ tak, že platí

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \approx \frac{f_p(y) - f_p(x)}{y - x} = f_p'(z) \approx g(z) \approx g(w)$$

Na obou stranách jsou standardní čísla, takže se musí rovnat. Podle principu expanze pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$, $y \in \mathcal{D}(f)^*$, $y \approx x$ existuje $x \leq w \leq y$, pro které

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = g(w) \approx g(x)$$

takže $f'(x) = g(x)$. $\square$

Věty o stejnoměrně konvergujících posloupnostech funkcí používáme zejména na funkcionální řady. Je-li (f_n) posloupnost funkcí se stejným definičním oborem, říkáme, že řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně k funkci f, konverguje-li k ní stejnoměrně její posloupnost částečných součtů. Znovu tak můžeme ukázat spojitost a diferencovatelnost mocninných řad.

Tvrzení 163 *Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $r > 0$. Pak pro každé $s \in (0, r)$ řada stejnoměrně konverguje na intervalu $\langle -s, s\rangle$.*

Důkaz: Podle odmocninového kritéria řada absolutně konverguje v každém $|x| < r$. Položme $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Pak pro každé $y \in \langle -s, s\rangle^*$, $p \in \mathbb{N}^\infty$ platí

$$|f(y) - f_p(y)| = \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} c_k y^k \right| \le \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_k| \cdot |y|^k \le \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_k| s^k \approx 0 \quad \Box$$

Stejnoměrná konvergence zachovává také limity a integraci. Jestliže f_n stejnoměrně konvergují k f, pak pro každou submonádu $A \subseteq \mathcal{D}(f)^*$ je

$$\lim_{x\to A} f(x) := \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to A} f_n(x)$$

Je-li totiž $a_n = \lim_{x\to A} f_n(x)$ a $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, je pro každé $x \in A$ a $p \in \mathbb{N}^\infty$

$$f(x) \approx f_p(x) \approx a_p \approx a$$

Tvrzení 164 *Nechť g_n stejnoměrně konvergují k g na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$$

Důkaz: Označme $c_n = \int_a^b g_n(x)\, dx$, $c = \int_a^b g(x)\, dx$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in \langle a, b\rangle$, pro které

$$c_n - c = \int_a^b (g_n(x) - g(x))\, dx = (b-a)(g_n(x_n) - g(x_n))$$

Pro $p \in \mathbb{N}^\infty$ je pak $c_p - c = (b-a)(g_p(x_p) - g(x_p)) \approx 0$. $\Box$

Pro nevlastní integrály podobné tvrzení neplatí. Uvažujme posloupnost funkcí

$$\begin{array}{lll} g_n(x) = \frac{1}{n} & \text{pro} & 0 \le x \le n-1 \\ g_n(x) = \frac{n+1-x}{2n} & \text{pro} & n-1 \le x \le n+1 \\ g_n(x) = 0 & \text{pro} & n+1 \le x \end{array}$$

Pak $g_n \rightrightarrows 0$, ale $\int_0^{+\infty} g_n(x)\, dx = 1$ pro každé n. Zde totiž nekonvergují stejnoměrně primitivní funkce.

Tvrzení 165 *Nechť $f_n \rightrightarrows f$ a $f_n' = g_n \rightrightarrows g$ na intervalu $[a, +\infty)$. Pak*

$$\int_a^{+\infty} g(x)\, dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} g_n(x)\, dx$$

Důkaz: Položme $c_n = \int_a^{+\infty} g_n(x)\, dx$, $c = \lim_{n\to\infty} c_n$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}^\infty$, $x > a$ je $f(x) - f(a) \approx f_p(x) - f_p(a) \approx c_p \approx c$, takže $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx \approx c$. $\Box$