Kapitola 7

ARITMETICKÝ PROSTOR

Při studiu funkčních závislostí mezi dvěma a více reálnými proměnnými se podstatným způsobem uplatňují geometrické metody. Graf reálné funkce je podmnožina reálné roviny a nejdůležitější vlastnosti funkce lze vyjádřit geometrickými vlastnostmi jejího grafu. Základní pojmy infinitesimálního počtu jako spojitost, monotonie nebo derivace mají geometrický význam. Podobně funkční závislosti mezi n reálnými proměnnými studujeme v n-rozměrném aritmetickém prostoru. Jednorozměrný aritmetický prostor $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}$ je reálná přímka, tj. přímka se souřadnou soustavou. Dvourozměrný aritmetický prostor $\mathbb{R}_2$ je rovina se souřadnou soustavou. Tu zavedeme, zvolíme-li v rovině dvě navzájem kolmé přímky, které nazveme osy, a na každé z nich jednotkový bod ve stejné vzdálenosti od jejich průsečíku. Každý bod roviny je jednoznačně určen dvojicí svých souřadnic $[x, y]$. Podobně souřadnou soustavu v (třírozměrném) prostoru zavedeme, zvolíme-li počátek souřadnic, tři navzájem kolmé přímky, které jím prochází, a na každé z nich jednotkový bod ve stejné vzdálensti od počátku. Body prostoru jsou pak jednoznačně určeny trojicemi reálných čísel $[x, y, z]$. Třírozměrný aritmetický prostor proto ztotožňujeme s množinou všech trojic reálných čísel. Podobně n-rozměrný aritmetický prostor ztotožňujeme s množinou všech n-tic reálných čísel

$$\mathbb{R}_n = \{x = [x_1, x_2, \ldots, x_n] : \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Aritmetický prostor je třeba odlišovat jak od eukleidovského tak od vektorového prostoru. Dvourozměrný eukleidovský prostor je rovina, ve které lze měřit vzdálenosti a úhly, není v ní však žádná souřadná soustava. Studujeme-li rovinné útvary prostředky analytické geometrie, nějakou souřadnou soustavu sice volíme, vlastnosti rovinných útvarů jsou však na volbě této soustavy nezávislé. Při studiu reálných funkcí jsme v jiné situaci. Například exponenciální funkce je charakterizována tím, že její derivace je ona sama a její hodnota v nule je jedna. Pokud bychom exponenciálu vyjádřili v souřadné soustavě s libovolným počátkem a s libovolnou jednotkou délky, dostali bychom funkci tvaru $f(x) = e^{ax+b} + c$, která již tyto vlastnosti nemá. Aritmetický prostor se tedy liší od eukleidovského tím, že jedna souřadná soustava je v něm pevně zvolena.

Vektor dimenze n je uspořádaná dvojice $[x, y]$ bodů n-rozměrného eukleidovského prostoru. Říkáme, že tento vektor je umístěn v bodě x, který je jeho počáteční bod a y je jeho koncový bod. Častěji pracujeme s volnými vektory, které v žádném bodě umístěny nejsou. Získáme je tak, že ztotožníme (umístěné) vektory se stejným směrem a stejnou velikostí. Při pevné volbě souřadné soustavy je každý vektor $u = [x, y]$ jednoznačně popsán svými souřadnicemi, tj. rozdílem souřadnic $u_i = y_i - x_i$ svého koncového a počátečního bodu. Tyto souřadnice jsou nezávislé na umístění vektoru. Jsou-li $[x, y]$, $[z, w]$ dvě umístění stejného (volného) vektoru u, je $y_i - x_i = u_i = w_i - z_i$. Soubor všech volných vektorů n-rozměrného eukleidovského prostoru tvoří n-rozměrný vektorový prostor.

Vektory lze sčítat a násobit reálnými čísly. Tyto operace jsou na volbě souřadné soustavy nezávislé, v každé souřadné soustavě má však součet $u + v$ vektorů u a v souřadnice $(u + v)_i = u_i + v_i$ a násobek au vektoru u reálným číslem a má souřadnice $(au)_i = au_i$. K bodu x lze dále přičíst vektor u, tak že u umístíme do bodu x a sestrojíme koncový bod $y = x + u$ takto umístěného vektoru. Tato operace opět nezávisí na volbě souřadné soustavy, v každé souřadné soustavě je však $(x+u)_i = x_i+u_i$. Naproti tomu dva body x, y sčítat nemůžeme. Součet x_i+y_i totiž na volbě souřadné soustavě závisí, při různých volbách souřadné soustavy reprezentuje různé body.

Prvky aritmetického prostoru $\mathbb{R}_n$ lze podle okolností pokládat jak za body eukleidovského prostoru (při pevně zvolené souřadné soustavě) tak za vektory umístěné v počátku souřadné soustavy. Jak eukleidovský tak vektorový prostor totiž slouží jako pomocné pojmy při studiu funkčních závislostí mezi reálnými proměnnými. Volíme proto interpretaci, která je názornější.

Funkční vztah mezi n nezávislými proměnnými a m závislými proměnnými vyjařujeme zobrazením $f : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$, jehož definiční obor je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_n$ a obor hodnot je $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathbb{R}_m$. Není-li zobrazení definováno pro všechny hodnoty nezávisle proměnných, je $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}_n$. To zapisujeme $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$. Jestliže $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathbb{R}_1$, říkáme, že f je funkce n proměnných. Graf zobrazení $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ je množina

$$\mathcal{G}(f) = \{[x, f(x)] \in \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_m : x \in \mathcal{D}(f)\}$$

v prostoru $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_m$, který ztotožňujeme s aritmetickým prostorem $\mathbb{R}_{n+m}$. Hodnota zobrazení $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ v bodě $x \in \mathbb{R}_n$ je bod $f(x) \in \mathbb{R}_m$. Označíme-li jeho složky $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, dostáváme m reálných funkcí $f_1, \ldots, f_m$. Píšeme pak $f = [f_1, \ldots, f_m]$, takže

$$f(x_1, \ldots, x_n) = [f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)]$$

Funkce $f, g : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ n proměnných můžeme sčítat, odčítat dělit a násobit.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

Zobrazení $f, g : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ můžeme sčítat a násobit reálným číslem

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (af)(x) = af(x)$$

Jsou-li $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$, $g : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_p$ zobrazení, jejich složení je zobrazení $g \circ f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_p$ definované $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

7.1 Funkce dvou proměnných

Funkce f dvou proměnných přiřazuje bodům reálné roviny reálná čísla. Její definiční obor $\mathcal{D}(f)$ je podmnožina $\mathbb{R}_2$, její obor hodnot $\mathcal{R}(f)$ je podmnožina $\mathbb{R}_1$. Graf funkce dvou proměnných $f(x,y)$ je plocha v třírozměrném prostoru, tj. množina bodů

$$\mathcal{G}(f) = \{[x,y,f(x,y)] : [x,y] \in \mathcal{D}(f)\}.$$

Graf funkce znázorňujeme prostředky počítačové grafiky. Pro každé pevné $x = a$ je závislost proměnné $z = f(a,y)$ na proměnné y funkce jedné proměnné. Značíme jí $f(a) : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}$. Podobně pro každé pevné $y = b$ je závislost $z = f(x,b)$ na x funkce jedné proměnné, kterou značíme $f(.,b) : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}$. Funkce $f(a)$, $f(.,b)$ jsou definovány předpisem

$$f(a)(y) = f(a,y); \quad f(.,b)(x) = f(x,b)$$

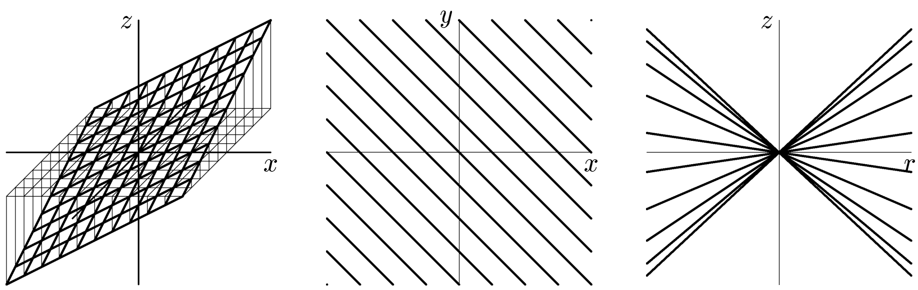
Grafy těchto funkcí jsou řezy grafu funkce f s rovinami $x = a$ nebo $y = b$. Soustava grafů těchto funkcí vytváří plastický obraz grafu funkce f.

Alternativně znázorňujeme funkce v rovině systémem jejích vrstevnic. Vrstevnice funkce f s hodnotou $c \in \mathbb{R}$ je množina bodů

$$f^{-1}(c) = \{[x,y] \in \mathcal{D}(f) : f(x,y) = c\}$$

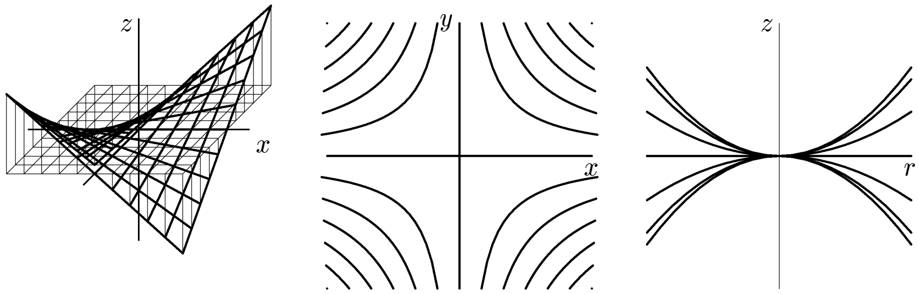
se stejnou funkční hodnotou c. Je to křivka, která vznikne na řezech grafu funkce vodorovnou rovinou $z = c$. Představu o chování funkce ve směru úhlu φ dává řez grafu s rovinou $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Na tomto řezu vznikne funkce reálná funkce $f_\varphi : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$f_\varphi(r) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$



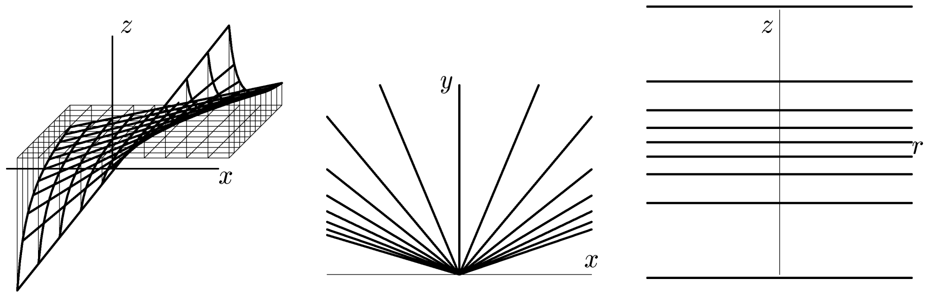
Obrázek 7.1: Součet

Lineární funkce jsou dány předpisem $f(x,y) = ax + by + c$. Jejich graf je rovinný, jejich vrstevnice jsou rovnoběžné přímky (pokud se nejedná o konstantní funkci $f(x,y) = c$). Na obr. 7.1 je znázorněna funkce součtu $f(x,y) = x+y$. Její vrstevnice (uprostřed) jsou přímky $x + y = c$, které jsou všechny kolmé na vektor $[1,1]$. Řez ve směru úhlu φ je lineární funkce $f_\varphi(r) = (\cos\varphi + \sin\varphi)r$, jejíž směrnice se mění s úhlem φ.



Obrázek 7.2: Součin

Graf funkce součinu $f(x,y) = xy$ na obr. 7.2 je hyperbolická plocha. V každé rovině $x = a$ je to lineární funkce $f(a)(y) = ay$, jejíž směrnice se však mění s a (vlevo). Vrstevnice jsou hyperboly s rovnicí $xy = c$. Pouze nulová vrstevnice sestává ze dvou přímek, tj. z osy x a osy y (uprostřed). Ve směru φ je řez parabola $f_\varphi(r) = \sin\varphi\cos\varphi r^2$. Plocha modeluje tvar horského hřebenu ve směru $\varphi = \frac{\pi}{4}$, který má v nulovém bodě sedlo a z něj vychází údolí ve směru $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.



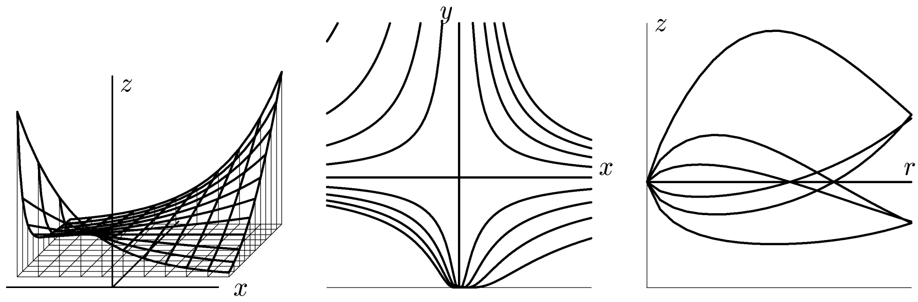
Obrázek 7.3: Podíl

Graf funkce podílu $f(x,y) = \frac{x}{y}$ je stejná hyperbolická plocha jako graf funkce součinu, protože $z = \frac{x}{y}$ právě když $x = yz$ (a $y \neq 0$) (obr. 7.3 vlevo). Její vrstevnice jsou přímky $y = cx$ (obr. 7.3 uprostřed). Ve směru φ je řez konstantní funkce $f_\varphi(r) = \cot\varphi$ (obr. 7.3 vpravo).

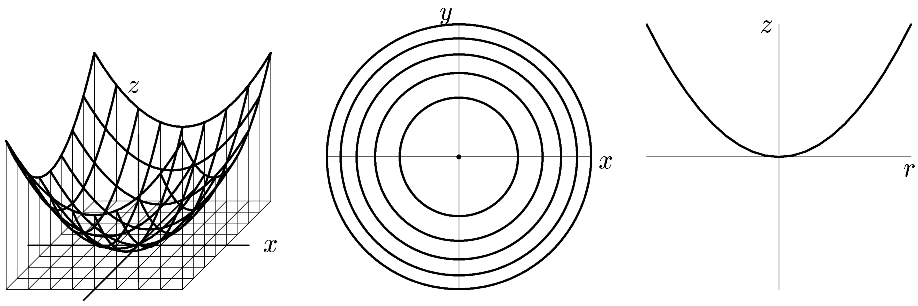
Definiční obor mocniny $f(x,y) = y^x$ je $\mathcal{D}(y^x) = \{[x,y] : \ y > 0\} \cup \{[x,0] : x > 0\}$. Její vrstevnice jsou funkce $y = c^{1/x}$, tj. $x = \ln c/\ln y$. Pouze jednotková vrstevnice sestává ze dvou přímek $x = 0$ a $y = 1$ (obr. 7.4 uprostřed). Řezy ve směru φ jsou na obr. 7.4 vpravo.

Mnohočleny jsou funkce funkce tvaru

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}x^i y^j$$

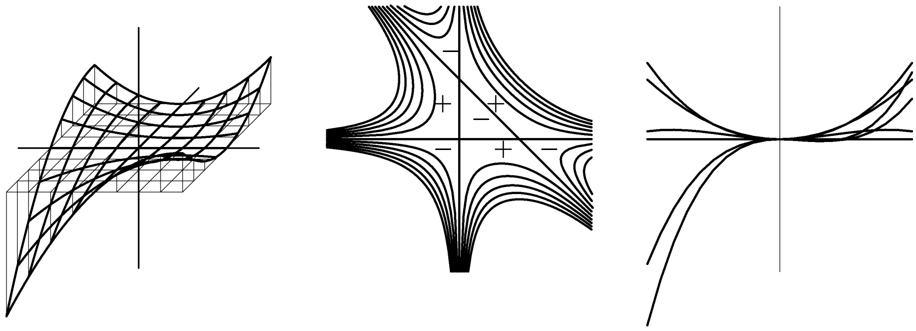


Obrázek 7.4: Mocnina

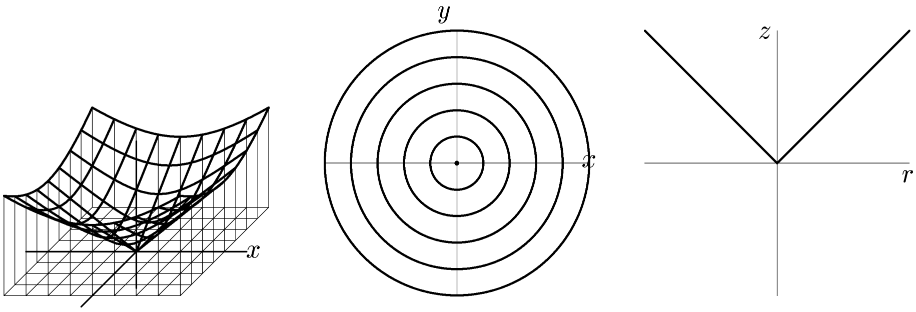


Obrázek 7.5: Kvadratická funkce

kde a_{ij} jsou reálné koeficienty. Stupeň mnohočlenu je $\max\{i+j : a_{ij} \neq 0\}$. Racionální lomené funkce jsou podíly mnohočlenů. Stupeň racionální lomené funkce je maximum ze stupně čitatele a jmenovatele. Mnohočleny prvního stupně jsou lineární funkce tvaru $f(x,y) = ax + by + c$, kde buď $a \neq 0$ nebo $b \neq 0$. Funkce $f(x,y) = xy$ na obr. 7.2 je mnohočlen stupně 2. Také funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ je mnohočlen druhého stupně. Její graf je parabolická plocha (obr. 7.5 vlevo). Její vrstevnice jsou soustředné kružnice, jejichž hustota roste s rostoucí vzdáleností od počátku. Pouze nulová vrstevnice sestává z jediného (nulového) bodu (obr. 7.5 uprostřed). V každém směru φ je na řezu stejná parabola $f_\varphi(r) = r^2$ (obr. 7.5 vpravo). To znamená, že graf funkce vznikne rotací této paraboly kolem osy z.
Funkce $f(x,y) = xy(x+y-1)$ je mnohočlen stupně 3 (obr. 7.6). Jeho nulová vrstevnice sestává ze tří přímek $x = 0$, $y = 0$ a $x + y = 1$. Ty rozdělují roviny na 7 oblastí, v každé z nichž má funkce stejné znaménko (obr. 7.6 uprostřed).
Graf funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ je kuželová plocha, její vrstevnice jsou soustředné kružnice (obr. 7.7 uprostřed). V každém směru φ je na řezu stejná funkce $f_\varphi(r) = |r|$ (obr. 7.7 vpravo), Také kužel je rotační plocha.



Obrázek 7.6: Plocha třetího stupně



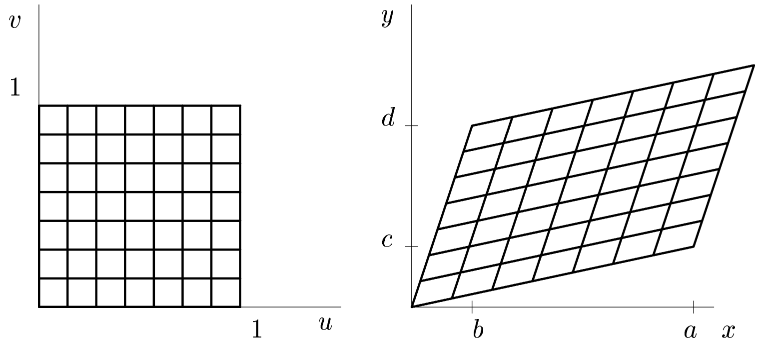
Obrázek 7.7: Kužel

7.2 Rovinné transformace

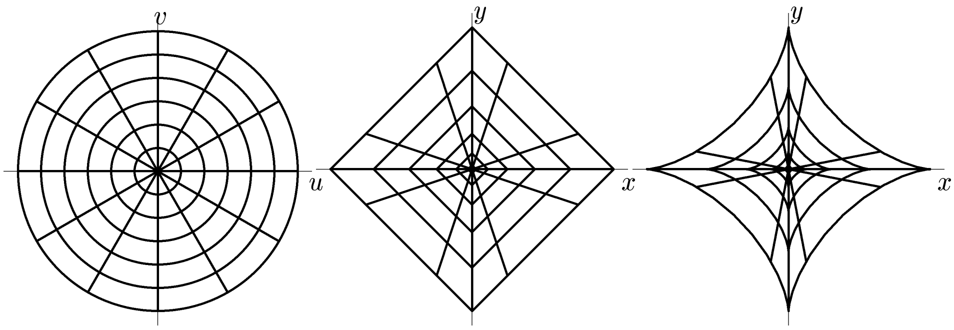
Rovinná transformace $f(u,v) = [f_1(u,v), f_2(u,v)]$ přiřazuje bodům roviny opět body roviny. Je tedy $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}_2$ i $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathbb{R}_2$. Rovinná transformace je dána dvojicí funkcí $f = [f_1, f_2]$ dvou proměnných. Píšeme $x = f_1(u,v)$, $y = f_2(u,v)$. Graf rovinné transformace je podmnožina čtyřrozměrného prostoru. Proto rovinné transformace znázorňujeme křivkami, na které se zobrazí pravoúhlá, nebo jiná rovinná síť.

Lineární transformace $x = au + bv$, $y = cu + dv$ zobrazuje přímky opět na přímky. Osa u s rovnicí $v = 0$ ze zobrazí na přímku s parametrickou rovnicí $x = au$, $y = cu$. Osa $u = 0$ se zobrazí na přímku $x = bv$, $y = dv$ (obr. 7.8).

Transformace $x = u|u|$, $y = v|v|$ zobrazuje svislé přímky $u = a$ opět na svislé přímky $x = a|a|$ a podobně vodorovné přímky opět na vodorovné přímky. Zajímavější je její chování na síti soustředných kružnic se středem v počátku a polopřímek, které z počátku vycházejí (obr. 7.9 vlevo). Kružnice $u^2 + v^2 = r^2$ se zobrazí na čtverec $|x| + |y| = r^2$ s vrcholy na osách ve vzdálenosti r^2 od počátku. Polopřímky $u = t\cos\varphi$, $v = t\sin\varphi$ vycházející z počátku pod úhlem φ se zobrazí na polopřímky vycházející z počátku pod úhlem $\psi = \arctan(\tan^2\varphi)$ (obr. 7.9 uprostřed).



Obrázek 7.8: Lineární transformace



Obrázek 7.9: Transformace druhého a třetího stupně

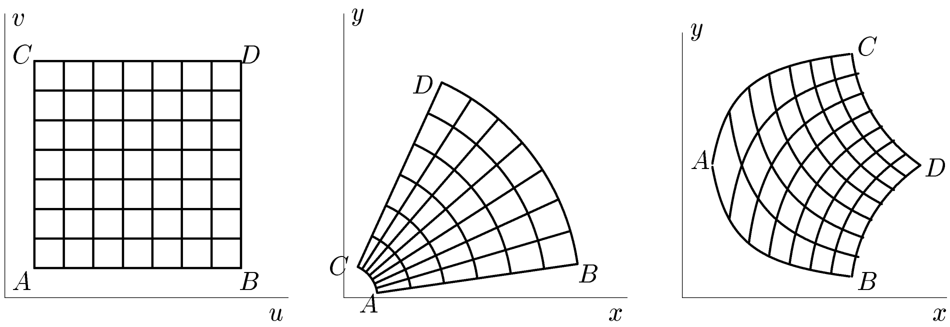
Transformace $x = u^3$, $y = v^3$ zobrazuje kružnici $x^2 + y^2 = r^2$ na astroidu s rovnicí $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{r^2}$ a paprsek vycházející z počátku pod úhlem φ na polopřímku vycházející z počátku pod úhlem $\psi = \arctan(\tan^3 \varphi)$ (obr. 7.9 vpravo).

Polární transformace $x = u \cos v, y = u \sin v$ převádí svislé přímky $u = a$ na kružnice s poloměrem a. Vodorovné přímky $v = b$ se zobrazují na polopřímky vycházející z počátku ve směru úhlu b (obr. 7.10 uprostřed). Inverzní polární transformace je zobrazení $x = \sqrt{u^2 + v^2}$, $y = \arctan \frac{v}{u}$ definované na polorovině $u > 0$ (obr. 7.10 vpravo).

Sférické souřadnice zobrazují rovinu na kulovou plochu s rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v třírozměrném prostoru. Je to zobrazení z $\mathbb{R}_2$ do $\mathbb{R}_3$ s rovnicemi

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \sin u \cos v, \quad z = \sin v$$

Zde $u \in \langle -\pi, \pi \rangle$ je zeměpisná délka, tj. úhel průvodiče s osou x v rovině xy, a $v \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ je zeměpisná šířka, tj. úhel, který průvodič svírá s rovinou xy (obr.



Obrázek 7.10: Polární transformace

7.11 nahoře). Promítneme-li kulovou plochu do roviny xz paprsky rovnoběžnými s osou y, dostáváme rovinnou transformaci $y = \sin u \cos v, \quad z = \sin v$ na obr. 7.11 dole uprostřed. Pro zobrazení map se často používá stereografická projekce, která kulovou plochu promítá z jednoho jejího bodu na rovinu procházející středem a kolmou na průvodič tohoto bodu. Na obr. 7.11 nahoře vpravo je znázorněna stereografická projekce kružnice s rovnicí $x^2+y^2 = 1$ na osu x z vrcholu kružnice $[0,1]$. Z podobnosti trojúhelníků vidíme, že bod $[x,y]$ kružnice se zobrazuje na bod $[\frac{x}{1-y}, 0]$ osy x. Analogicky stereografická projekce ze severního pólu $[0,0,1]$ třírozměrného prostoru promítá bod $[x,y,z]$ kulové plochy na bod $[\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0]$ roviny xy. Při projekci z bodu $[-1,0,0]$ na rovinu yz se bod $[x,y,z]$ promítá na bod $[0, \frac{y}{1+x}, \frac{z}{1+x}]$. Složíme-li sférické transformace s touto stereografickou projekcí, dostáváme rovinné transformace

$$y = \frac{\sin u \cos v}{1+\cos u \cos v}, \quad z = \frac{\sin v}{1+\cos u \cos v}$$

na obr. 7.11 vpravo dole.

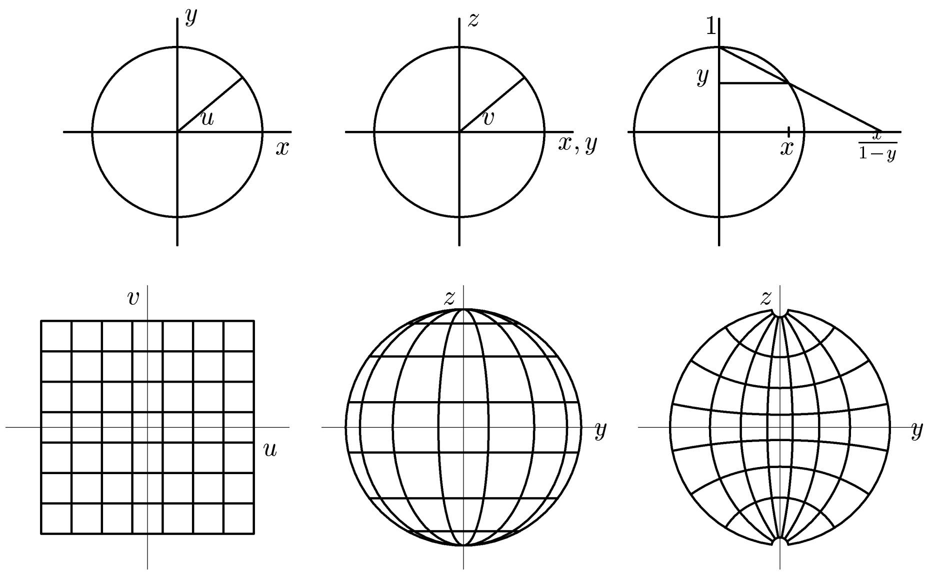
7.3 Lineární algebra

Na prvky aritmetického prostoru $\mathbb{R}_n$ se díváme také jako na vektory. Vektorové prostory se studují abstraktně jako algeraické struktury $(V, \mathbf{o}, +, \cdot)$, kde V je abstraktní množina, $\mathbf{o} \in V$ je vyznačený nulový prvek, $+$ je operace sčítání vektorů a $\cdot$ je operace násobení vektorů reálnými čísly. (Tento znak však většinou vynecháváme; $a \cdot u$ zapisujeme jako au.) Každý aritmetický prostor $\mathbb{R}_n$ je vektorový prostor, definujeme-li sčítání vektorů a jejich násobení reálnými čísly po složkách.

$$(u+v)_i = u_i + v_i, \quad (au)_i = au_i$$

Neprázdná množina $V \subseteq \mathbb{R}_n$ je vektorový podprostor, jestliže součet každých dvou vektorů z V náleží vo V a násobek každého vektoru z V náleží do V, tj.

$$\begin{aligned} u, v \in V \quad &\Rightarrow \quad u+v \in V \\ u \in V,\ a \in \mathbb{R} \quad &\Rightarrow \quad au \in V \end{aligned}$$



Obrázek 7.11: Sférické transformace

Také jednoprvková množina $\{\mathbf{0}\}$ obsahující pouze nulový vektor $\mathbf{0} \in \mathbb{R}_n$ je (triviální) vektorový podprostor $\mathbb{R}_n$.

Je-li $u = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m$, říkáme, že u je lineární kombinace vektorů $u_1, \ldots, u_m \in V$. Pro dané vektory $u_i \in V$ je množina všech jejich lineárních kombinací

$$\mathcal{L}(u_1, \ldots, u_m) = \{a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m : \quad a_i \in \mathbb{R}\}$$

vektorový podprostor V. Například $\mathcal{L}[1,1,1] = \{[a,a,a] : \quad a \in \mathbb{R}\}$ je přímka a $\mathcal{L}([1,1,0],[0,0,1]) = \{[a,a,b] : \quad a, b \in \mathbb{R}\}$ je rovina v třírozměrném prostoru.

Lineární kombinace $a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m$ je netriviální, je-li alespoň jedno a_i různé od nuly. Vektory $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}_n$ jsou lineárně nezávislé, jestliže žádná jejich netriviální lineární kombinace není nulový vektor $\mathbf{0}$. Vektory $u = [1,1,1]$, $v = [0,1,2]$ jsou lineárně nezávislé, protože je-li $au + bv = [a, a+b, a+2b] = \mathbf{0}$, je $a = b = 0$.

Definice 166 *Vektory $u_1, \ldots, u_m$ tvoří bázi vektorového prostoru V, jestliže jsou lineárně nezávislé, a jestliže každý vektor $u \in V$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci.*

Kanonická báze prostoru $\mathbb{R}_n$ je tvořena jednotkovými vektory $\delta_1, \ldots, \delta_n$, kde $(\delta_i)_i = 1$ a $(\delta_i)_j = 0$ pro $j \neq i$. Například v třírozměrném prostoru $\mathbb{R}_3$ je kanonická báze

$$\delta_1 = [1,0,0], \quad \delta_2 = [0,1,0], \quad \delta_3 = [0,0,1].$$

Každý vektor $u = [u_1, \ldots, u_n] \in \mathbb{R}_n$ lze totiž jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci

$$u \quad = \quad [u_1, \ldots, u_n] = [u_1, 0, \ldots, 0] + \cdots + [0, \ldots, 0, u_n] = u_1 \delta_1 + \cdots + u_n \delta_n.$$

Naopak je-li nějaká lineární kombinace jednotkových vektorů nulová, $a_1\delta_1 + \cdots + a_n\delta_n = \mathfrak{o}$, je každé a_i nulové. Triviální vektorový prostor $V = \{\mathfrak{o}\}$ sestává pouze z nulového vektoru. Jeho báze je prázdná množina. Má-li vektorový prostor V konečnou bázi, pak každé dvě jeho báze mají stejný počet prvků a tento počet nazýváme jeho dimenzí. Například dimenze prostoru $\mathcal{L}[1,1,1]$ je 1 a dimenze $\mathcal{L}([1,1,0],[0,0,1])$ je 2.

7.3.1 Lineární formy

Definice 167 *Lineární forma na vektorovém prostoru V je funkce $f : V \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé vektory $u, v \in V$ a každé $a \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \quad f(au) = af(u).$$

Například $f(u) = u_1 + 2u_2$ je lineární forma na $\mathbb{R}_2$ protože $f(u+v) = u_1 + v_1 + 2u_2 + 2v_2 = f(u) + f(v)$ a $f(au) = au_1 + 2au_2 = af(u)$. Lineární funkce $f(u) = u_1 + 2u_2 + 3$ s absolutním členem ale lineární forma není. Obecně pro každá $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ je funkce $f(u) = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ lineární forma na prostoru $\mathbb{R}_n$ a naopak každá lineární forma na $\mathbb{R}_n$ má tento tvar. Položíme-li totiž $a_i = f(\delta_i)$, kde δ_i jsou jednotkové vektory, je

$$f(u) \;=\; f(u_1\delta_1 + \cdots + u_n\delta_n) = u_1f(\delta_1) + \cdots + u_nf(\delta_n) = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$$

Jsou-li $f, g : V \to \mathbb{R}$ lineární formy, je také jejich součet $f + g$ lineární forma na V protože

$$\begin{aligned}
(f+g)(u+v) &= f(u+v) + g(u+v) = f(u) + f(v) + g(u) + g(v) \\
&= (f+g)(u) + (f+g)(v) \\
(f+g)(au) &= f(au) + g(au) = af(u) + ag(u) = a(f+g)(u)
\end{aligned}$$

Také af je lineární forma, takže množina všech lineárních forem na vektorovém prostoru V tvoří vektorový prostor, který nazýváme duální prostor a značíme $\overline{V}$.

Nejjednodušší lineární formy na $\mathbb{R}_n$ jsou projekce $\eta_i : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ definované $\eta_i(u) = u_i$. Je-li $f(u) = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ lineární forma, je $f(u) = a_1\eta_1(u) + \cdots + a_n\eta_n(u)$, takže $f = a_1\eta_1 + \cdots + a_n\eta_n$ je lineární kombinace lineárních forem η_i. Tyto lineární formy jsou lineárně nezávislé. Jestliže totiž pro nějaká $a_i \in \mathbb{R}_n$ platí $a_1\eta_1 + \cdots + a_n\eta_n = 0$, pak pro $u = \delta_i$ dostáváme $0 = a_1\eta_1(\delta_i) + \cdots + a_n\eta_n(\delta_n) = a_i$. To znamená, že projekce $\eta_1, \ldots, \eta_n$ tvoří bázi duálního vektorového prostoru $\overline{\mathbb{R}_n}$, takže tento prostor má dimenzi n. Říkáme, že je to báze duální k bázi $\delta_1, \ldots \delta_n$, protože platí $\eta_i(\delta_i) = 1$ a $\eta_i(\delta_j) = 0$ pro $i \neq j$.

7.3.2 Bilineární formy

Definice 168 *Bilineární forma na vektorovém prostoru V je funkce $f : V \times V \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $u, v, w \in V$, $a \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(u+v, w) = f(u,w) + f(v,w), \quad f(au, v) = af(u,v)$$
$$f(u, v+w) = f(u,v) + f(u,w), \quad f(u, av) = af(u,v)$$

Bilineární forma $f : V \times V \to \mathbb{R}$ je symetrická, jestliže pro každé $u, v \in V$ je $f(u,v) = f(v,u)$.

Je-li f bilineární forma na $\mathbb{R}_n$, položme $a_{ij} = f(\delta_i, \delta_j)$. Pak pro každé $u, v \in \mathbb{R}_n$ je

$$\begin{aligned} f(u,v) &= f(\sum_{i=1}^n u_i\delta_i \, , \, \sum_{j=1}^n v_j\delta_j) = \sum_{i=1}^n u_i f(\delta_i, \sum_{j=1}^n v_j\delta_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j f(\delta_i, \delta_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_i v_j \end{aligned}$$

Bilineární forma f je symetrická právě když její matice $a_{ij} = f(\delta_i, \delta_j)$ je symetrická, tj. $a_{ij} = a_{ji}$. Například skalární součin $f(u,v) = u \cdot v = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$ je symetrická bilineární forma na $\mathbb{R}_n$. Determinant na dvourozměrném prostoru můžeme chápat jako bilineární formu $g(u,v) = u_1v_2 - u_2v_1$. Protože $g(v,u) = -g(u,v)$, není g symetrická; říkáme, že je antisymetrická.

Jsou-li $f, g : V \to \mathbb{R}$ lineární formy, definujeme jejich tenzorový součin $f \otimes g : V \times V \to \mathbb{R}$ vzorcem

$$(f \otimes g)(u,v) = f(u)g(v)$$

To je zřejmě bilineární forma. Speciálně pro projekce $\eta_i : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je $(\eta_i \otimes \eta_j)(u,v) = u_i v_j$. Tato bilineární forma je symetrická právě když $i = j$. Tenzorový součin není komutativní. Pro $i \neq j$ je $\eta_i \otimes \eta_j \neq \eta_j \otimes \eta_i$. Množina bilineárních forem na daném vektorovém prostoru V tvoří vektorový prostor. Součet dvou bilineárních forem je opět bilineární forma a násobek bilineární formy reálným číslem je také bilineární forma. Dimenze tohoto prostoru je n^2 a jeho báze je množina $(\eta_i \otimes \eta_j)_{i,j=1}^n$. Pro každou bilineární formu f je totiž

$$f(u,v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_i v_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (\eta_i \otimes \eta_j)(u,v)$$

takže $f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\eta_i \otimes \eta_j)$.

Definice 169 *Funkce $g : V \to \mathbb{R}$ na vektorovém prostoru se nazývá kvadratická forma, existuje-li bilineární forma $f : V \times V \to \mathbb{R}$ taková, že $g(u) = f(u,u)$.*

Každá kvadratická forma má tvar

$$g(u) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_i u_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} u_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (a_{ij} + a_{ji}) u_i u_j$$

Je to tedy mnohočlen, ve kterém je každý člen druhého stupně. Například funkce $f(u_1, u_2) = u_1 u_2$ na obr. 7.2 a funkce $f(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$ na obr. 7.5 jsou kvadratické formy.

V kvadratické formě vystupují koeficienty a_{ij} a a_{ji} pouze v součtu. Položíme-li $b_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2$, je $h(u,v) = \sum_i \sum_j b_{ij} u_i v_j$ symetrická bilineární forma, která vytváří stejnou kvadratickou formu $h(u,v) = f(u,v) = g(u)$. Každá kvadratická forma je tedy vytvořena jedinou symetrickou bilineární formou. Jsou-li f, g lineární formy, je jejich součin fg kvadratická forma. Speciálně $\eta_i \eta_j(u) = u_i u_j$. Každou kvadratickou formu tedy můžeme psát ve tvaru

$$g = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \eta_i \eta_i + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} \eta_i \eta_j$$

kde $b_{ij} = b_{ji}$. Kvadratické formy opět tvoří vektorový prostor, jehož dimenze je $n(n+1)/2$ a jehož báze jsou kvadratické formy $\eta_i \eta_j$ kde $i \leq j$.

Definice 170 *Říkáme, že symetrická bilineární forma $f : V \times V \to \mathbb{R}$ je pozitivně nebo negativně (semi)definitní, je-li*

1. $(\forall u \in V)(f(u,u) \geq 0)$	*pozitivně semidefinitní*
2. $(\forall u \in V)(f(u,u) \leq 0)$	*negativně semidefinitní*
3. $(\forall u \neq \mathbf{o})(f(u,u) > 0)$	*pozitivně definitní*
4. $(\forall u \neq \mathbf{o})(f(u,u) < 0)$	*negativně definitní*
5. $(\exists u, v \neq \mathbf{o})(f(u,u) < 0 < f(u,v))$	*indefinitní*

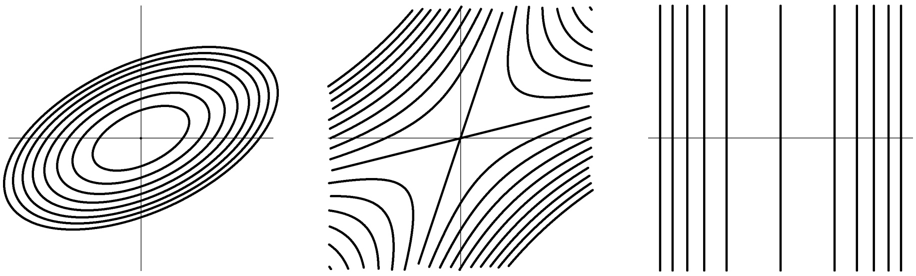
Podobně pro kvadratickou formu.

Skalární součin je příklad pozitivně definitní bilineární formy na $\mathbb{R}_n$ a druhá mocnina normy $f(u) = ||u||^2$ je pozitivně definitní kvadratická forma na $\mathbb{R}_n$. Součin $f(u) = u_1 u_2$ je indefinitní kvadratická forma na $\mathbb{R}_2$. Je totiž $f(1,-1) < 0 < f(1,1)$. Kvadratická forma $f(u) = u_1^2$ na $\mathbb{R}_2$ je pozitivně semidefinitní ale není pozitivně definitní. Pro nenulový vektor $u = [0,1]$ je totiž $f(0,1) = 0$.

Symetrická kvadratická forma dvou proměnných má obecný tvar $g(u_1,u_2) = a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2$. Je-li g pozitivně definitní, je pro $u_2 = 0$ $g(u_1,0) = a_{11}u_1^2 > 0$, tedy $a_{11} > 0$. Dále musí mít g záporný diskriminant $4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} < 0$, tedy

$$a_{11} > 0, \ \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0$$

Vrstevnice pozitivně definitní nebo negativně definitní kvadratické formy jdou elipsy (obr.7.12 vlevo). Pouze nulová vrstevnice sestává z jediného nulového bodu. Nulová vrstevnice indefinitní formy sestává ze dvou různých přímek, které se protínají v nulovém bodě. Tuto přímky rozdělují rovinu na čtyři úhly, ve dvou z nichž je funkce kladná a ve dvou je záporná. Nenulové vrstevnice negativně definitní kvadratické formy jsou hyperboly (obr. 7.12 uprostřed). Jestliže diskrimininat kvadratické formy je nulový, je forma buď pozitivně nebo negativně semidefinitní, ale ne definitní. Její vrstevnice jsou rovnoběžné přímky. (obr. 7.12 vpravo). Pozitivní definitnost kvadratických forem ve vícedimenzionálních prostorech ověřujeme Sylvestrovým kritériem



Obrázek 7.12: Kvadratické formy

Tvrzení 171 (Sylvestrovo kriterium) *Symetrická bilineární forma s maticí a* $= (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ *je pozitivně definitní právě když pro všechna* $1 \le k \le n$ *je* $\det((a_{ij})_{1\le i,j\le k}) > 0$. *Forma* f *je pozitivně semidefinitní právě když všechny tyto nerovnosti jsou neostré. Forma* f *je negativně definitní, právě když pro všechna* $1 \le k \le n$ *je*

$$(-1)^k \cdot \det((a_{ij})_{1\le i,j\le k}) > 0$$

Například symetrická bilineární forma na $\mathbb{R}_3$ s maticí (a_{ij}) je negativně definitní právě když

$$a_{11} < 0, \;\; \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \;\; \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} < 0$$

7.3.3 Skalární součin

Skalární součin na abstraktním vektorovém prostoru V je libovolná symetrická pozitivně definitní bilineární forma $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Na aritmetickém prostoru $\mathbb{R}_n$ je kanonický skalární součin

$$g(u,v) = u \cdot v = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$$

Vektory $u, v \in \mathbb{R}_n$ jsou kolmé, je-li jejich skalární součin nulový, $u \cdot v = 0$. Skalární součin vektoru u se sebou samým je vždy nezáporný $u \cdot u \ge 0$. Normu, neboli velikost vektoru definujeme

$$||u|| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$$

Tvrzení 172 (Schwarzova nerovnost) *Pro každé vektory* $u, v \in \mathbb{R}_n$ *platí*

$$|u \cdot v| \le ||u|| \cdot ||v||$$

Absolutní hodnota skalárního součinu je nejvýše rovna součinu norem vektorů.

Důkaz: Pro každé $t \in \mathbb{R}$ je skalární součin $f(t) = (u + tv) \cdot (u + tv) \ge 0$. To je kvadratická funkce

$$f(t) = (u \cdot u) + 2t(u \cdot v) + t^2(v \cdot v) = ||u||^2 + 2t(u \cdot v) + t^2||v||^2$$

jejíž diskriminant $4(u \cdot v)^2 - 4||u||^2||v||^2 \leq 0$ není kladný. To je již Schwarzova nerovnost. $\square$

Úhel $\angle(u, v) \in [0, \pi]$, který svírají vektory $u, v \in \mathbb{R}_n$ je

$$\angle(u, v) = \arccos \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||}$$

Ze Schwarzovy nerovnosti plyne trojúhelníková nerovnost pro normu

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$$

Je totiž

$$\begin{aligned} ||u + v||^2 &= (u + v) \cdot (u + v) = ||u||^2 + 2(u \cdot v) + ||v||^2 \\ &\leq ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2 = (||u|| + ||v||)^2 \end{aligned}$$

Pomocí normy definujeme vzdálenost dvou bodů $x, y \in \mathbb{R}_n$

$$||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Pro $n = 1$ je $||x - y|| = |x - y|$. Z trojúhelníkové nerovnosti pro normu plyne trojúhelníková nerovnost pro vzdálenosti. Jsou-li $x, y, z \in \mathbb{R}$ tři body (vrcholy trojúhelníku), je

$$||x - y|| + ||y - z|| \geq ||x - z||$$

7.3.4 Lineární zobrazení

Definice 173 *Zobrazení $f : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ je lineární, jestliže pro každé $u, v \in \mathbb{R}_n$ a každé $a \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(u + v) = f(u) + f(v), \quad f(au) = af(u)$$

Zobrazení $f = [f_1, \ldots, f_m]$ je lineární právě když každá jeho složka f_i je lineární forma. Položíme-li $f_j(\delta_i) = a_{ji}$, je $f_j(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} u_i$. To píšeme maticově

$$\begin{bmatrix} f_1(u) \\ \vdots \\ f_m(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

tj. $f(u) = a \cdot u$. Vektor $u \in \mathbb{R}_n$ zapisujeme jako sloupec a násobíme jím matici a zprava. Je-li $g : \mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_p$ lineární zobrazení $g(v) = b \cdot v$ s maticí b, je složené zobrazení $g \circ f(u) = b \cdot a \cdot u$ také lineární a jeho matice je součin matic $b \cdot a$.

$$(b \cdot a)_{ki} = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji}$$

Je-li $f : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ lineární zobrazení s maticí a, je $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathbb{R}_m$ lineární podprostor, který je vytvořen sloupci matice a

$$\mathcal{R}(f) = \mathcal{L}([a_{11}, \dots, a_{m1}], \dots, [a_{1n}, \dots, a_{mn}])$$

Každý sloupec $[a_{1i}, \dots, a_{mi}] = f(\delta_i)$ je totiž obrazem jednotkového vektoru a každý vektor $f(u) \in \mathcal{R}(f)$ je jejich lineární kombinací $f(u) = u_1 f(\delta_1) + \dots + u_n f(\delta_n)$. Dimenzi prostoru $\mathcal{R}(f)$ nazýváme hodností matice a (nebo hodností zobrazení f).

Definice 174 *Říkáme, že matice a (nebo zobrazení f) je regulární, je-li její hodnost maximální možná, tj.* $\dim \mathcal{R}(f) = \min\{n, m\}$.

7.4 Spojitost a limita

Při expanzi do nestandardního geometrického světa je obrazem aritmetického prostoru nestandardní aritmetický prostor

$$\mathbb{R}^*_n = \overbrace{\mathbb{R}^* \times \dots \times \mathbb{R}^*}^{n} = \{x = [x_1, \dots, x_n] : \; x_i \in \mathbb{R}^*\}$$

Dva nestandardní body jsou nekonečně blízké, jsou-li nekonečně blízké všechny jejich odpovídající si složky

$$x \approx y \;\Leftrightarrow\; (\forall i \le n)(x_i \approx y_i) \;\Leftrightarrow\; (\exists p \in \mathbb{N}^\infty)(\forall i \le n)(|x_i - y_i| < \tfrac{1}{p})$$

Nekonečně malé a nekonečně velké vektory tvoří soubory

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^0_n &= \{x \in \mathbb{R}^*_n : \; (\forall i \le n)(x_i \approx 0)\} \\ \mathbb{R}^\infty_n &= \{x \in \mathbb{R}^*_n : \; (\exists i \le n)(x_i \in \mathbb{R}^\infty)\} \end{aligned}$$

Vektor je tedy nekonečně velký, je-li alespoň jedna jeho složka nekonečně velká. Vektor je nekonečně malý, jsou-li všechny jeho složky nekonečně malé. Také nestandardní aritmetický prostor je rozložen na monády. Monádu nulového bodu tvoří nekonečně malé (infinitesimální) vektory z $\mathbb{R}^0_n$, a monádu $x^\bullet$ standardního bodu $x \in \mathbb{R}_n$ všechny body nekonečně blízké. Monáda nekonečna je tvořena všemi nekonečně velkými vektory. Úplné monády jsou tedy soubory

$$\infty = \mathbb{R}^\infty_n, \;\; x^\bullet = \{y \in \mathbb{R}^*_n : \; y \approx x\}, \quad \text{kde} \quad x \in \mathbb{R}_n$$

Každý nestandardní bod leží právě v jediné monádě. Relativizované monády jsou soubory tvaru $X^* \cap a^\bullet$ nebo $X^* \cap \mathbb{R}^\infty_n$, kde $X \subseteq \mathbb{R}_n$ je množina. Prstencová monáda bodu $x \in \mathbb{R}_n$ je

$$x^\circ = \{y \in \mathbb{R}^*_n : \; y \approx x \neq y\}$$

Zobrazení $f : {}_\subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ eukleidovských prostorů při expanzi přejde na zobrazení $f : {}_\subseteq\mathbb{R}^*_n \to \mathbb{R}^*_m$ definované stejnými předpisy jako ve světě standardním.

Definice 175 *Zobrazení $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ je spojité v bodě $x \in \mathcal{D}(f)$, jestliže*

$$(\forall y \in \mathcal{D}(f)^*)(y \approx x \quad \Rightarrow \quad f(y) \approx f(x))$$

Zobrazení f je spojité, je-li spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Operace sčítání a násobení jsou spojitá zobrazení z $\mathbb{R}_2$ (případně z $\mathbb{R}_n$) do $\mathbb{R}_1$. Pro každé $x \in \mathbb{R}_2$ a každé $y \in \mathbb{R}_2^*$ pro které $y \approx x$ je totiž

$$\begin{aligned} |(x_1+x_2)-(y_1+y_2)| &\leq |x_1-y_1|+|x_2-y_2| \in \mathbb{R}^0 \\ |x_1x_2-y_1y_2| &= |(x_1-y_1)x_2+y_1(x_2-y_2)| \\ &\leq |x_1-y_1|\cdot|x_2|+|y_1|\cdot|x_2-y_2| \in \mathbb{R}^0 \end{aligned}$$

Zobrazení $f = [f_1, \dots f_m] : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ je spojité v bodě $x \in \mathcal{D}(f)$ právě když každá jeho složka f_i je spojitá v bodě x. Je totiž $f(y) \approx f(x)$ právě když pro každé i je $f_i(y) \approx f_i(x)$.

Tvrzení 176 *Je-li zobrazení f spojité v bodě x, a je-li zobrazení g spojité v bodě $f(x)$, pak složené zobrazení $g \circ f$ je spojité v bodě x. Složení spojitých zobrazení je spojité.*

Důkaz: Je-li $y \approx x$, je $f(y) \approx f(x)$ a tedy $g(f(y)) \approx g(f(x))$. $\square$

Jsou-li funkce $f, g : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ spojité v bodě x, jsou také funkce $f+g$ a $f \cdot g$ spojité v bodě x. Funkce $f+g$ totiž vznikne složením dvojice $[f,g] : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_2$ s funkcí sčítání (dvou proměnných). Další spojité funkce dostaneme skládáním se spojitými funkcemi jedné proměnné. Například funkce mocniny $f(x,y) = y^x = e^{x \ln y}$ je spojitá na polorovině $\{[x,y] : y > 0\}$. Funkce mocniny je ovšem spojitá i v bodech $[x,0]$, kde $x > 0$. Je-li totiž $x_1 \approx x$, $y_1 \approx 0$, $y_1 \geq 0$, je $y_1^{x_1} \approx 0$. Také každý mnohočlen (dvou a více proměnných) a každá racionální lomená funkce je spojitá.

Definice 177 *Limita funkce $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ na monádě $A \subseteq \mathbb{R}_n^*$ je soubor*

$$\lim_{x \to A} f(x) = \{f(x) : \ x \in A\}$$

pokud $A \subseteq \mathcal{D}(f)^*$ a pokud tento soubor je monáda.

Pro limity používáme obdobné konvence jako u funkcí jedné proměnné. Jsou-li $A \subseteq \mathbb{R}_n^*$, $B \subseteq \mathbb{R}^*$ monády, $a \in \mathbb{R}_n$ a $b \in \mathbb{R}$, píšeme

$$\begin{aligned} \lim_{x \to A} f(x) := B &\quad\Leftrightarrow\quad (\forall y \in A)(f(y) \in B) \\ \lim_{x \to A} f(x) = b &\quad\Leftrightarrow\quad (\forall y \in A)(f(y) \approx b) \\ \lim_{x \to a} f(x) := B &\quad\Leftrightarrow\quad (\forall y \in a^\circ)(f(y) \in B) \end{aligned}$$

Limity počítáme pomocí aritmetických pravidel a srovnáváním s jinými funkcemi.

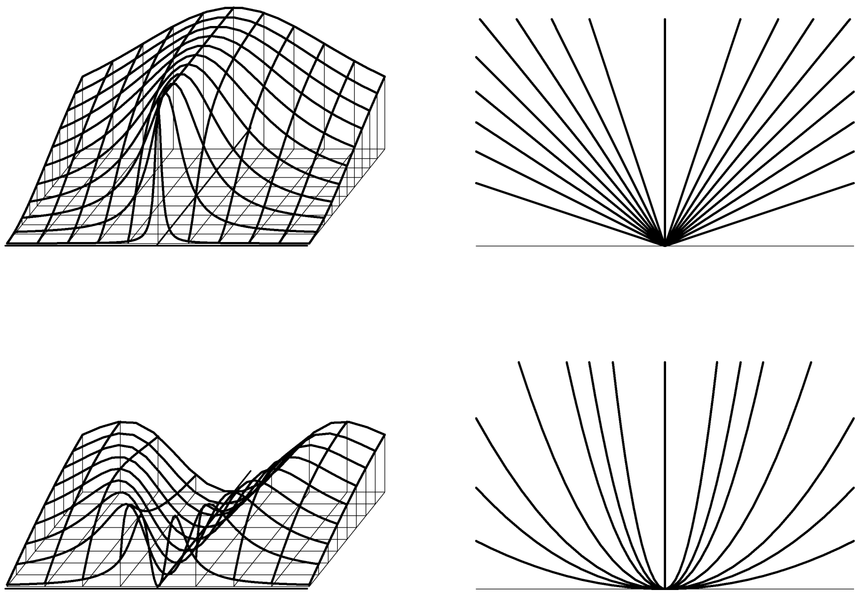
Tvrzení 178
1. Je-li $\lim\limits_{x\to A} f(x) := B$ *a* $\lim\limits_{y\to B} g(y) := C$*, je* $\lim\limits_{x\to A} g\circ f(x) := C$.

2. Je-li $(\forall x)(|f(x)|\le g(x))$ *a* $\lim\limits_{x\to A} g(x) = 0$*, pak* $\lim\limits_{x\to A} f(x) = 0$.

Například $\lim\limits_{\langle x,y\rangle\to\infty} x^2+y^2 := +\infty$, zatímco $\lim\limits_{\langle x,y\rangle\to\infty} x^2-y^2$ neexistuje. Dále

$$\left|\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right| = |xy|\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2}\le |xy|$$

Protože $\lim\limits_{\langle x,y\rangle\to\mathbf{0}} |xy| = 0$, je $\lim\limits_{\langle x,y\rangle\to\mathbf{0}} (x^3y-xy^3)/(x^2+y^2) = 0$.



Obrázek 7.13: Funkce $\frac{y^2}{x^2+y^2}$, $\frac{x^2y}{x^4+y^4}$

Uvažujme limitu funkce $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$ v nulovém bodě. Na ose x je $f(x,0) = 0$, na ose y je $f(0,y) = 1$ a na přímce $y = kx$ je $f(x,kx) = \frac{k^2}{1+k^2}$. Všechny vrstevnice funkce směřují k nulovému bodu (viz obr. 7.13 nahoře). Limita tedy neexistuje, protože pro infinitesimální α náleží $f(\alpha,0)$ a $f(0,\alpha)$ do různých monád.

Limity v $\mathbb{R}_2$ často vyšetřujeme tak, že zkoumáme jak se chovají na polopřímkách vycházejících z daného bodu, a tím je převádíme na limity funkce jedné proměnné. Směrová limita funkce f v bodě $a\in\mathbb{R}_n$ podle vektoru $u\in\mathbb{R}_n$ je $\lim\limits_{t\to 0^+} f(a+tu)/t$. Jestliže $\lim\limits_{x\to a} f(x) := B$, pak také každá směrová limita je v submonádě B. Jestliže některá z těchto směrových limit neexistuje, nebo náleží-li tyto limity do různých monád, hledaná limita neexistuje. Naopak však z existence a rovnosti všech směrových limit ještě neplyne nutně existence limity.

Příklad 179 $\lim_{\langle x,y\rangle \to o} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ *neexistuje ale každá její směrová limita je nulová.*

Je $f(x,0) = f(0,y) = 0$ a pro každé $k \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2 + k^2} = 0.$$

Pro $y = x^2$ je však $\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{1}{2}$, takže limita neexistuje. Vrstevnice funkce jsou paraboly $y = cx^2$ a všechny směřují k nulovému bodu (obr. 7.13 dole).

Definice 180 *Nechť $(x_k)_k$ je posloupnost bodů v $\mathbb{R}_n$ a $A \subseteq \mathbb{R}_n$ monáda. Pak*

$$\lim_{k\to\infty} x_k := A \quad \Leftrightarrow \quad (\forall p \in \mathbb{N}^\infty)(x_p \in A)$$

Posloupnost $(x_k)_k$ je cauchyovská, je-li $x_p \approx x_q$ pro každé $p, q \in \mathbb{N}^\infty$.

Říkáme, že posloupnost je konvergentní, má-li vlastní limitu $\lim_{k\to\infty} x_k = a \in \mathbb{R}_n$, tj. pokud pro každé $p \in \mathbb{N}^\infty$ platí $x_p \approx a$. To platí právě když pro každé $1 \le i \le n$ platí $(x_p)_i \approx a_i$ tedy právě když pro každé i je $\lim_{k\to\infty} (x_k)_i = a_i$. Posloupnost tedy konverguje právě když konvergují všechny její složky. Podobně posloupnost (x_k) v $\mathbb{R}_n$ je cauchyovská právě když $(x_p)_i \approx (x_q)_i$ pro $1 \le i \le n$. I v prostoru $\mathbb{R}_n$ tedy platí Bolzano-Cauchyova věta.

Věta 181 *Posloupnost $(x_k)_k$ v $\mathbb{R}_n$ je konvergentní právě když je cauchyovská.*

7.5 Topologie

Jako definiční obory funkcí více proměnných se objevují různé podmnožiny aritmetického prostoru. Jsou to zejména vícerozměrné intervaly tj. množiny tvaru

$$I_1 \times \cdots \times I_n = \{x \in \mathbb{R}_n : \ x_i \in I_n\}$$

kde $I_i \subseteq \mathbb{R}$ jsou jednorozměrné intervaly. Dvourozměrné intervaly jsou obdélníky jako

$$\langle a,b\rangle = \langle a_1,b_1\rangle \times \langle a_2,b_2\rangle = \{[x,y] : \ a_1 \le x \le b_1, \ \ a_2 \le y \le b_2\}.$$

Mohou být i nevlastní jako kladný kvadrant

$$\langle 0,+\infty) \times \langle 0,+\infty) = \{[x,y] : \ x,y \ge 0\}$$

Dále sem patří poloroviny nebo pásy jako

$$\{[x,y] : \ \ x \ge 0\}, \ \ \{[x,y] : \ \ a < x < b\}.$$

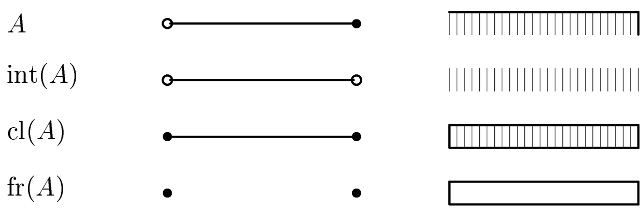
Každá množina $A \subseteq \mathbb{R}_n$ přejde při expanzi na soubor $A^* \subseteq \mathbb{R}_n^*$ definovaný stejnými vztahy jako A. Například nestandardní interval je soubor $(I_1 \times \cdots \times I_n)^* = I_1^* \times \cdots \times I_n^* = \{x \in \mathbb{R}_n^* : \ x_i \in I_n^*\}$.

Definice 182 *Vnitřek* $\mathrm{int}(A)$*, uzávěr* $\mathrm{cl}(A)$ *a hranice* $\mathrm{fr}(A)$ *množiny* $A \subseteq \mathbb{R}_n$ *jsou množiny*

$$\begin{aligned} \mathrm{int}(A) &= \{x \in \mathbb{R}_n : \ x^\bullet \subseteq A^*\}, \\ \mathrm{cl}(A) &= \{x \in \mathbb{R}_n : \ x^\bullet \cap A^* \neq \emptyset\} \\ \mathrm{fr}(A) &= \{x \in \mathbb{R}_n : \ \emptyset \neq x^\bullet \cap A^* \neq x^\bullet\} = \mathrm{cl}(A) \setminus \mathrm{int}(A) \end{aligned}$$

Množina A *je otevřená, je-li* $\mathrm{int}(A) = A$*, a uzavřená, je-li* $\mathrm{cl}(A) = A$*.*

Říkáme, že x je vnitřní bod množiny A nebo že A je okolí bodu x, jestliže $x \in \mathrm{int}(A)$. Zřejmě $\mathrm{int}(A) \subseteq A \subseteq \mathrm{cl}(A)$.



Obrázek 7.14: Topologické operace

Pro polouzavřený interval $(a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}_1$ je $\mathrm{int}(a,b\rangle = (a,b)$, $\mathrm{cl}(a,b\rangle = \langle a,b\rangle$, $\mathrm{fr}(a,b\rangle = \{a,b\}$ (obr. 7.14 vlevo). Pro polouzavřený rovinný interval $A = (a,b\rangle \times (c,d\rangle$ je $\mathrm{int}(A) = (a,b) \times (c,d)$, $\mathrm{cl}(A) = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ a $\mathrm{fr}(A)$ je obvod obdélníka (obr. 7.14 vpravo). Pro jednobodovou množinu $\{x\}$ (v kterékoliv dimenzi) je $\mathrm{int}\{x\} = \emptyset$, $\mathrm{cl}\{x\} = \{x\}$, $\mathrm{fr}\{x\} = \{x\}$. Pro množinu $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ racionálních čísel je $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\mathrm{cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, $\mathrm{fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Pro celou množinu $\mathbb{R}$ je $\mathrm{int}(\mathbb{R}) = \mathrm{cl}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, takže její hranice je prázdná $\mathrm{fr}(\mathbb{R}) = \emptyset$. Definice otevřených a uzavřených množin zobecňuje pojem otevřenosti a uzavřenosti jednorozměrných intervalů. Otevřené intervaly jsou intervaly tvaru (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ a také celá reálná přímka $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$. Uzavřené intervaly jsou intervaly tvaru $\langle a,b\rangle$, $\langle a,+\infty)$, $(-\infty,b\rangle$ a také jednobodová množina $\{a\}$ a celá reálná přímka $\mathbb{R}$. Interval $\langle a,b)$ není ani otevřený ani uzavřený. Další otevřené množiny jsou sjednocení otevřených intervalů jako $(0,1) \cup (2,3)$, nebo i nekonečná sjednocení otevřených intervalů jako $(0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3},\frac{3}{4}) \cup (\frac{4}{5},\frac{5}{6}) \cup \cdots$. Také sjednocení konečně mnoha uzavřených intervalů jako $\langle 0,1\rangle \cup \langle 2,3\rangle$ je uzavřená množina. Sjednocení nekonečného počtu uzavřených intervalů však již uzavřená množina být nemusí. Například $\langle 0,\frac{1}{2}\rangle \cup \langle \frac{2}{3},\frac{3}{4}\rangle \cup \langle \frac{4}{5},\frac{5}{6}\rangle \cup \cdots$ není uzavřená, protože bod 1 do ní nepatří ale v jeho monádě jsou prvky $\frac{p}{p+1}$, které do ní patří. V $\mathbb{R}_2$ je pro osu x, tj. množinu $A = \{\langle x,0\rangle, \ \ x \in \mathbb{R}\}$ $\mathrm{int}(A) = \emptyset$, $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{fr}(A) = A$, je to tedy uzavřená množina. Kartézský součin otevřených intervalů $(a,b) \times (c,d)$ je otevřená množina, kartézský součin uzavřených intervalů $\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ je uzavřená množina.

Ve standardním světě lze pojmy vnitřku uzávěru apod. definovat pomocí systémů okolí určitého jednoduchého tvaru. Krychle se středem $a \in \mathbb{R}_n$ a stranou $2\varepsilon > 0$ a koule se středem $a \in \mathbb{R}_n$ a poloměrem $\varepsilon > 0$ jsou množiny

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(a) &= \{x \in \mathbb{R}_n : (\forall i \leq n)(|x_i - a_i| < \varepsilon)\} \\ B_\varepsilon(a) &= \{x \in \mathbb{R}_n : ||x|| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

Pro každé $\varepsilon > 0$ je krychle $K_\varepsilon(a)$ otevřená množina. Je-li totiž $|x_i - a_i| < \varepsilon$ a $y_i \approx x_i$, je $|y_i - a_i| < \varepsilon$ a tedy $x^\bullet \subseteq K_\varepsilon^*(a)$.

Tvrzení 183 *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}_n$. Pak*

1. $x \in \mathrm{int}(A)$ *právě když* $(\exists\varepsilon > 0)(K_\varepsilon(x) \subseteq A)$

2. $x \in \mathrm{cl}(A)$ *právě když* $(\forall\varepsilon > 0)(K_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset)$

3. $\mathbb{R}_n \setminus \mathrm{int}(A) = \mathrm{cl}(\mathbb{R}_n \setminus A)$

4. $\mathbb{R}_n \setminus \mathrm{cl}(A) = \mathrm{int}(\mathbb{R}_n \setminus A)$

5. A je otevřená právě když $\mathbb{R}_n \setminus A$ je uzavřená.

6. Je-li $A \subseteq B$, je $\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(B)$ *a* $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$.

7. $\mathrm{int}(A)$ *je otevřená.*

8. $\mathrm{cl}(A)$ *je uzavřená.*

Důkaz: 1. Je-li $K_\varepsilon(x) \subseteq A$, je $x^\bullet \subseteq K_\varepsilon(x)^* \subseteq A^*$ a tedy $x \in \mathrm{int}(A)$. Naopak předpokládejme, že pro žádné kladné $m \in \mathbb{N}$ není $K_{1/m}(x)$ částí A, takže existuje bod $x_m \in \mathbb{R}_n \setminus A$, $x_m \in K_{1/m}(x)$. Pro $p \in \mathbb{N}^\infty$ je pak $x_p \approx x$ a $x_p \notin A^*$ takže $x \notin \mathrm{int}(A)$.
2. Jestliže $x \in \mathrm{cl}(A)$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ je $K_\varepsilon(x)^* \cap A^* \supseteq x^\bullet \cap A^* \neq \emptyset$, a tedy $K_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Jestliže pro každé $\varepsilon = \frac{1}{m}$ existuje $x_m \in K_{1/m} \cap A$, pro $p \in \mathbb{N}^\infty$ je $x_p \in x^\bullet \cap A^*$, takže $x \in \mathrm{cl}(A)$.
3. $x \notin \mathrm{int}(A)$ právě když $x^\bullet \cap (\mathbb{R}_n \setminus A^*) \neq \emptyset$ a to platí právě když $x \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}_n \setminus A)$.
4. Obdobně $x \notin \mathrm{cl}(A)$ právě když $x^\bullet \subseteq \mathbb{R}_n \setminus A^*$ a to platí právě když $x \in \mathrm{int}(\mathbb{R}_n \setminus A)$.
5. Plyne bezprostředně z 3 nebo 4.
6. Jestliže $A \subseteq B$ a $x \in \mathrm{int}(A)$, pak $x^\bullet \subseteq A^* \subseteq B^*$, takže $x \in \mathrm{int}(B)$. Je-li $x \in \mathrm{cl}(A)$, je $x^\bullet \cap B^* \supset x^\bullet \cap A \neq \emptyset$, takže $x \in \mathrm{cl}(B)$.
7. Jestliže $x \in \mathrm{int}(A)$, pak existuje $\varepsilon > 0$ pro které $K_\varepsilon(x) \subseteq A$. Protože $K_\varepsilon(x)$ je otevřená, je $x^\bullet \subseteq K_\varepsilon^* = \mathrm{int}(K_\varepsilon(x))^* \subseteq \mathrm{int}(A)^*$, takže $\mathrm{int}(A)$ je otevřená, tj. $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A)$.
8. Přechodem k doplňku podle 3 je $\mathrm{cl}(A) = \mathbb{R}_n \setminus \mathrm{int}(\mathbb{R}_n \setminus A)$ uzavřená množina. □

Tvrzení 184 *Nechť $f : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ je spojité zobrazení. Je-li $U \subseteq \mathbb{R}_m$ otevřená množina, je také $f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R}_n : f(x) \in U\} \subseteq \mathbb{R}_n$ otevřená množina. Je-li $U \subseteq \mathbb{R}_m$ uzavřená, je také $f^{-1}(U)$ je uzavřená.*

Důkaz: Nechť U je otevřená a $x \in f^{-1}(U)$, takže $f(x) \in U$. Je-li $y \approx x$, je $f(y) \approx f(x)$, takže $f(y) \in f(x)^\bullet \subseteq U^*$. To znamená, že $x^\bullet \subseteq (f^{-1}(U))^*$, takže $f^{-1}(U)$ je otevřená. Je-li U uzavřená, je $f^{-1}(U) = \mathbb{R}_n \setminus f^{-1}(\mathbb{R}_m \setminus U)$. Protože

$\mathbb{R}_m \setminus U$ je otevřená, je $f^{-1}(\mathbb{R}_m \setminus U)$ také otevřená a tedy $f^{-1}(U)$ uzavřená. □

Množiny vytvořené spojitými funkcemi a ostrými nerovnostmi jsou otevřené, množiny vytvořené neostrými nerovnostmi jsou uzavřené. Například koule se středem $a \in \mathbb{R}_n$ a poloměrem $r > 0$ je otevřená množina, protože $B_r(c) = f^{-1}(-\infty, r)$, kde $f(x) = ||x - c||$ je spojitá funkce. Její uzávěr je uzavřená koule $\mathrm{cl}(B_r(c)) = f^{-1}(-\infty, r]$. Její hranice je sféra tj. množina $\mathrm{fr}(B_r(c)) = f^{-1}(\{r\})$. Ta je také uzavřená, protože jednobodová množina je uzavřená. Obecněji každá vrstevnice $f^{-1}(c)$ spojité funkce f je uzavřená množina.

V tvrzení 184 je podstatný předpoklad, že funkce f je definována na celém $\mathbb{R}_n$. Jinak bychom totiž dostali každý definiční obor každé spojité funkce $\mathcal{D}(f) = f^{-1}(\mathbb{R}_m)$ jako vzor otevřené množiny. Je-li však $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ spojitá, a množiny $U \subseteq \mathbb{R}$ a $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}_n$ otevřené, je také $f^{-1}(U)$ otevřená. Jsou-li U a $\mathcal{D}(f)$ uzavřené, je také $f^{-1}(U)$ uzavřená.

Obraz $f(U) = \{f(x) : x \in U\}$ otevřené množiny nemusí být otevřená množina a ani obraz uzavřené množiny nemusí být uzavřená množina. Například pro reálnou funkci $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ není $f(-1, 1) = (\frac{1}{2}, 1]$ otevřená a $f[0, +\infty) = (0, 1]$ není uzavřená. Pro vzory těchto množin však $f^{-1}(\frac{1}{2}, 1) = (-1, 0) \cup (0, 1)$ je otevřená a $f^{-1}[\frac{1}{2}, 1] = [-1, 1]$ je uzavřená.

Tvrzení 185 *V prostoru $\mathbb{R}_n$ platí*
1. $\emptyset$ a $\mathbb{R}_n$ jsou otevřené množiny.
2. Průnik dvou otevřených množin je otevřená množina.
3. Sjednocení libovolného souboru otevřených množin je otevřená množina.

Důkaz: Pro otevřené množiny $U, V \subseteq \mathbb{R}_n$ je $(U \cap V)^* = U^* \cap V^*$. Je totiž $z \in U \cap V \Leftrightarrow z \in U \,\&\, z \in V$ a podle principu expanze $z \in (U \cap V)^* \Leftrightarrow z \in U^* \,\&\, z \in V^*$. Je-li $x \in U \cap V$ a $y \approx x$, je $y \in U^*$ i $y \in V^*$ a tedy $y \in (U \cap V)^*$, takže $x^\bullet \subseteq (U \cap V)^*$. Nechť $(U_i)_{i \in I}$ je nějaký soubor otevřených množin a U jeho sjednocení. Pak pro každé i platí $U_i \subseteq U$ a tedy $U_i^* \subseteq U^*$. Je-li $x \in U$, je $x \in U_i$ pro nějaké i. Je-li $y \approx x$, je $y \in U_i^*$ a tedy $y \in U^*$, takže $x^\bullet \subseteq U^*$. □

Definice 186 *Množina $A \subseteq \mathbb{R}_n$ je kompaktní, jestliže pro každé $y \in A^*$ existuje $x \in A$, pro které $y \approx x$. Množina $A \subseteq \mathbb{R}_n$ je omezená, jestliže $A^* \cap \mathbb{R}_n^\infty = \emptyset$.*

Každý jednorozměrný interval $\langle a, b \rangle$ je kompaktní. Interval (a, b) není kompaktní, protože pro infinitesimální α, $a + \alpha \in (a, b)^*$ ale pro žádné $x \in (a, b)$ není $x \approx a + \alpha$. Celý interval $(-\infty, +\infty)$ také není kompaktní, protože pro nekonečné $y \in \mathbb{R}^\infty$ neexistuje žádné $x \in \mathbb{R}$ pro které $y \approx x$. Dvourozměrný uzavřený obdélník $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ je kompaktní.

Množina $A \subseteq \mathbb{R}_n$ je omezená, jestliže A^* neobsahuje žádné nekonečné body. To platí právě když existuje $r > 0$ tak že $A \subseteq K_r(\mathfrak{o})$. Jestliže totiž $A \subseteq K_r(\mathfrak{o})$, pak A^* neobsahuje žádné nekonečné body, protože je neobsahuje $K_r(\mathfrak{o})^*$. Naopak jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje bod $x_n \in A \setminus K_n(\mathfrak{o})$, pak pro $q \in \mathbb{N}^\infty$ je $x_q \in A^*$ nekonečný bod.

Tvrzení 187 *Množina $A \subseteq \mathbb{R}_n$ je kompaktní právě když je uzavřená a omezená.*

Důkaz: Předpokládejme, že A je kompaktní. Nechť $x^\bullet \cap A^* \neq 0$. Pak $x \in A$, takže A je uzavřená. Kdyby A nebyla omezená, pak by pro každé $m \in \mathbb{N}$ existovalo $x_m \in \mathbb{R}_n$, pro které $|(x_m)_{i_m}| > m$ pro nějakou i_m-tou složku. Pro $p \in \mathbb{N}^\infty$ by pak bylo $x_p \in \mathbb{R}_n^\infty$, takže by neexistovalo žádné konečné $x \in A$ pro které $x_p \approx x$. Naopak nechť A je uzavřená a omezená. Nechť $y \in A^*$. Pak y je konečné, takže existuje $x \in \mathbb{R}_n$ pro které $x \approx y$. To znamená $y \in x^\bullet \cap A^* \neq \emptyset$, takže $x \in A$, protože A je uzavřená.

Tvrzení 188 *Každá neprázdná kompaktní množina reálných čísel má největší a nejmenší prvek.*

Důkaz: Nechť $A \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktní. Zvolme $p \in \mathbb{N}^\infty$ a uvažujme body $x_i = i/p$ pro $-p^2 \leq i \leq p^2$. Nechť i je největší index, pro který existuje $y \in A^*$, pro který platí $x_i < y$. Protože A je kompaktní, existuje $x \in A$ pro které $x \approx y$ a x je největší prvek A. Kdyby totiž existovalo $z \in A$ pro které by bylo $x < z$, bylo by také $x_{i+1} < z$ a to je spor. □

Tvrzení 189 *Nechť $f : {}_\subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ je spojité zobrazení a nechť $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ je kompaktní množina. Pak její obraz $f(A) = \{f(x) : \ x \in A\}$ je také kompaktní. Spojitá funkce na kompaktní množině má maximum i minimum.*

Důkaz: Je-li $y \in f(A)^*$, pak existuje $u \in A^*$ pro které $f(u) = y$ a tedy existuje $v \in A$ pro které $v \approx u$. Protože f je spojitá v v, je $f(v) \approx f(u) = y$ a $f(v) \in f(A)$. □

Definice 190 *Zobrazení $f : {}_\subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ je stejnoměrně spojité, jestliže pro každé $x, y \in \mathcal{D}(f)^*$ je $f(x) \approx f(y)$.*

Tvrzení 191 *Spojité zobrazení na kompaktní množině je stejnoměrně spojité.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{D}(f)$ je kompaktní, nechť $x, y \in \mathcal{D}(f)^*$ a $x \approx y$. Pak existuje $z \in \mathcal{D}(f)$, pro které $x \approx z \approx y$. Protože f je spojité v z, je $f(x) \approx f(z) \approx f(y)$. □

Definice 192 *Množina $A \subseteq \mathbb{R}_n$ je (křivkově) souvislá, jestliže pro každé dva body $x, y \in A$ existuje spojitá cesta $f : \langle 0, 1\rangle \to A$ pro kterou $f(0) = x$, $f(1) = y$. Množina $A \subseteq \mathbb{R}_n$ se nazývá oblast, je-li otevřená a souvislá.*

Zřejmě každá n-rozměrná koule a každý n-rozměrný interval je souvislá množina. Jestliže pro danou množinu A najdeme její disjunktní rozklad $A = B \cup C$ a spojitou funkci $g : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ takovou, že $g(x) < 0$ pro každé $x \in B$ a $g(x) > 0$ pro každé $x \in C$, pak A není souvislá. Je-li totiž $f : \langle 0, 1\rangle \to A$ spojitá křivka pro kterou $f(0) \in B$, $f(1) \in C$, pak podle věty o mezihodnotě existuje t pro které $g(f(t)) = 0$, takže $g(t) \notin A$. V $\mathbb{R}_1$ jsou souvislé množiny právě intervaly (včetně jednobodových a prázdných). Množina $\{[x, y] \in \mathbb{R}_2 : \ x^2 - y^2 > 1\}$ omezená dvěmi větvemi hyperboly $x^2 - y^2 = 1$ není souvislá. Každá cesta z bodu $[-2, 0]$ do bodu $[2, 0]$ by totiž musela procházet přes bod osy y, který do této množiny nepatří.

Tvrzení 193 *Je-li f spojité zobrazení a je-li $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ souvislá množina je také $f(A)$ souvislá množina.*

Důkaz: Je-li $x, y \in f(A)$, je $x = f(u)$, $y = f(v)$ pro nějaké $u, v \in A$ a tedy existuje spojitá křivka g z u do v. Složení $f \circ g$ je pak spojitá cesta z x do y.

Cvičení Určete, zda následující množiny jsou otevřené, uzavřené, kompaktní a souvislé

1. $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}_2 : \quad x^2 \leq y \leq x^3 - x\}$
2. $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}_2 : \quad 1 < x^2 + y^2 - z^2 < 3\}$
3. $A = \{[e^t \cos t, e^t \sin t] : \quad t \in (\infty, +\infty)\}$