Kapitola 8

DIFERENCIÁL

8.1 Parciální derivace

Funkci více proměnných můžeme derivovat podle jedné z jejích proměnných tak, že ostatní proměné považujeme za konstanty. Tak dostáváme parciální derivace.

Definice 194 *Parciální derivace funkce* $f : \subseteq \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ *podle* i*-té proměnné v bodě* $x \in \mathcal{D}(f)$ *je*

$$\partial_i f(x) = \lim_{a \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + a, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x)}{a}$$

Speciálně pro funkci $f(x, y)$ dvou proměnných je

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= \lim_{a \to 0} \frac{f(x+a,y) - f(x,y)}{a}, \\ \partial_2 f(x,y) &= \lim_{b \to 0} \frac{f(x,y+b) - f(x,y)}{b} \end{aligned}$$

Parciální derivace $\partial_2 f(x, y)$ je derivace funkce $f(x)$ definované $f(x)(y) = f(x, y)$ v bodě y a parciální derivace $\partial_1 f(x, y)$ je derivace funkce $f(., y)$ definované $f(., y)(x) = f(x, y)$ v bodě x. Parciální derivace $\partial_i f(x)$ může existovat pouze ve vnitřních bodech definičního oboru f. Je to opět funkce n proměnných a $\mathcal{D}(\partial_i f) \subseteq \mathrm{int}(\mathcal{D}(f))$. Můžeme ji opět derivovat podle stejné nebo jiné proměnné a tak dostáváme parciální derivace druhého a vyšších řádů

$$\partial_{ij} f = \partial_j(\partial_i f), \ \ \partial_{ijk} f = \partial_k(\partial_{ij} f).$$

Parciální derivace $\partial_{11} f(x, y)$ je druhá derivace funkce $f(., y)$ v bodě x, parciální derivace $\partial_{22} f(x, y)$ je druhá derivace funkce $f(x)$ v bodě y. Často se parciální derivace značí

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \ \ \partial_{ij} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \ \ \partial_{ii} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Například funkce $f(x,y) = x^2y^3$ má v každém bodě parciální derivace všech řádů

$\partial_1 f(x,y) = 2xy^3, \quad \partial_2 f(x,y) = 3x^2y^2$

$\partial_{11} f(x,y) = 2y^3, \quad \partial_{22} f(x,y) = 6x^2y$

$\partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = 6xy^2,$

$\partial_{111} f(x,y) = 0, \quad \partial_{222} f(x,y) = 6x^2$

$\partial_{112} f(x,y) = \partial_{121} f(x,y) = \partial_{211} f(x,y) = 6y^2$

$\partial_{122} f(x,y) = \partial_{212} f(x,y) = \partial_{221} f(x,y) = 12xy.$

Derivaci funkce jedné proměnné lze určit z jejích hodnot ve dvou infinitesimálně blízkých bodech: $f'(x) \approx (f(x+\alpha) - f(x))/\alpha$. Parciální derivaci $\partial_{12} f$ druhého řádu funkce $f(x,y)$ lze určit z funkčních hodnot ve vrcholech infinitesimálního obdélníka. Nejprve ukážeme analogii věty o přírůstku funkce (obr. 8.1 vlevo).

Tvrzení 195 *Nechť $f(x,y)$ je funkce dvou proměnných, která má parciální derivaci $\partial_{12} f$ v každém bodě obdélníka $\langle x_1, x_2\rangle \times \langle y_1, y_2\rangle$. Pak existuje bod $[x_0, y_0] \in (x_1, x_2) \times (y_1, y_2)$, tak že platí*

$$\frac{f(x_2,y_2) - f(x_2,y_1) - f(x_1,y_2) + f(x_1,y_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} = \partial_{12} f(x_0, y_0)$$

Důkaz: Pro pevná y_1, y_2 uvažujme funkci $h(x) = f(x,y_2) - f(x,y_1)$. Pak $h'(x) = \partial_1 f(x,y_2) - \partial_1 f(x,y_1)$. Podle věty o přírůstku funkce existují $x_0 \in (x_1,x_2)$, $y_0 \in (y_1,y_2)$, pro které

$$\frac{f(x_2,y_2) - f(x_2,y_1) - f(x_1,y_2) + f(x_1,y_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}$$
$$= \frac{h'(x_0)}{y_2 - y_1} = \frac{\partial_1 f(x_0,y_2) - \partial_1 f(x_0,y_1)}{y_2 - y_1} = \partial_{12} f(x_0, y_0) \ \square$$

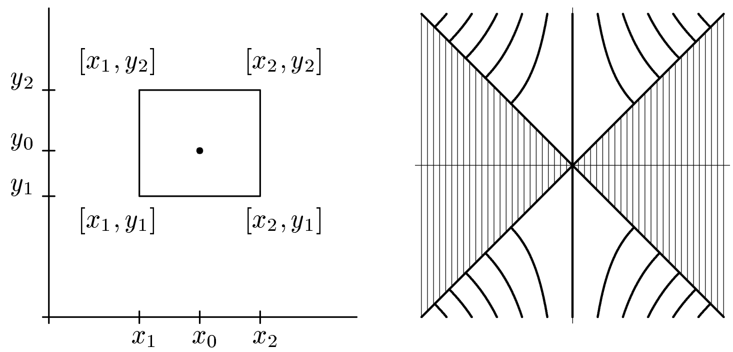
Všimněme si, že pro lineární funkci $f(x,y) = c_0 + c_1x + c_2y$ je

$$f(x_2,y_2) - f(x_2,y_1) - f(x_1,y_2) + f(x_1,y_1) = 0.$$

Tento výraz vyjadřuje odchylku od linearity funkce f. Pro infinitesimální $x_2 - x_1$ a $y_2 - y_1$ odtud dostáváme vyjádření smíšené parciální derivace $\partial_{12} f$.

Tvrzení 196 *Nechť $f(x,y)$ je funkce dvou proměnných. Je-li parciální derivace druhého řádu $\partial_{12} f$ spojitá ve vnitřním bodě $[x,y] \in \operatorname{int} \mathcal{D}(\partial_{12} f)$ svého definičního oboru, pak pro každá nenulová infinitesimální α, β je*

$$\frac{f(x+\alpha, y+\beta) - f(x+\alpha, y) - f(x, y+\beta) + f(x,y)}{\alpha\beta} \approx \partial_{12} f(x,y)$$



Obrázek 8.1: Parciální derivace

Podle tvrzení 195 a podle pricipu expanze pro každé infinitesimální α a β existují infinitesimální α_1, β_1, pro které

$$\frac{f(x+\alpha, y+\beta) - f(x+\alpha, y) - f(x, y+\beta) + f(x, y)}{\alpha\beta}$$

$$= \partial_{12} f(x+\alpha_1, y+\beta_1) \approx \partial_{12} f(x, y) \ \square$$

Věta 197 *Jestliže smíšené parciální derivace $\partial_{12} f$ a $\partial_{21} f$ jsou obě spojité ve vnitřním bodě $[x, y] \in \operatorname{int} \mathcal{D}(\partial_{12} f) \cap \operatorname{int} \mathcal{D}(\partial_{21} f)$ svého definičního oboru, pak se v tomto bodě rovnají.*

Důkaz: Podle tvrzení 196 pro každá infinitesimální nenulová α, β je

$$\partial_{12} f(x, y) \quad \approx \quad \frac{f(x+\alpha, y+\beta) - f(x+\alpha, y) - f(x, y+\beta) + f(x, y)}{\alpha\beta} \approx \partial_{21} f(x, y)$$

Předpoklad spojitosti druhých parciálních derivací je zde podstatný.

Příklad 198 *Funkce*

$$f(x, y) = 0 \quad \textit{pro} \quad |x| \geq |y|$$
$$f(x, y) = xy \quad \textit{pro} \quad |x| < |y|$$

má parciální derivace $\partial_1 f(0, y) = y$, $\partial_2 f(x, 0) = 0$, takže $\partial_{12} f(0, 0) = 1$, $\partial_{21} f(0, 0) = 0$ (obr. 8.1 vpravo).

Funkce f je sice spojitá v $\mathbf{o}$, ale není spojitá v žádném jiném bodě na diagonálách $y = \pm x$. Proto v okolí $\mathbf{o}$ neexistují první a tím méně druhé parciální derivace. Pozměňme tento příklad tak aby funkce na diagonálách byla spojitá a měla tam i spojité derivace. Uvažujme funkci

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \ \text{ pro } \ [x, y] \neq \mathbf{o}, \ \ f(0, 0) = 0$$

Protože $f(x,0) = f(0,y) = 0$, je $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$ a pro $[x,y] \neq \mathbf{0}$ je

$$\partial_1 f(x,y) = y\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad \partial_2 f(x,y) = x\frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

První parciální derivace tedy existují v každém bodě a jsou spojité protože $|\partial_1 f(x,y)| \leq 2|y|$ a $|\partial_2 f(x,y)| \leq 2|x|$. Také druhé parciální derivace zřejmě existují v každém nenulovém bodě. Na osách x, y je $\partial_1 f(0,y) = -y$, $\partial_2 f(x,0) = x$, takže $\partial_{12}(0,0) = -1$ a $\partial_{21} f(0,0) = 1$.

Použijeme-li větu 197 na první parciální derivace $\partial_1 f$ a $\partial_2 f$, vidíme, že také u parciálních derivací třetího a vyšších řádů nezáleží na pořadí, pokud jsou tyto derivace spojité. Například

$$\partial_{112} f(x,y) = \partial_{121} f(x,y) = \partial_{211} f(x,y)$$

$$\partial_{122} f(x,y) = \partial_{212} f(x,y) = \partial_{221} f(x,y)$$

pokud všechny tyto funkce jsou definovány na nějakém okolí bodu $[x,y]$ a jsou v něm spojité.

Cvičení Určete parciální derivace

1. $f(x,y) = y^x$, 2. $f(x,y) = e^{x/y}$
3. $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{y}$, 4. $f(x,y) = \dfrac{e^x - e^y}{x-y}$

8.2 Diferenciál

Parciální derivace funkce zachycují její chování pouze ve směru os. Změníme-li funkci dvou proměnných $f(x_1,x_2)$ libovolným způsobem mimo osy x_1 a x_2, existence ani hodnota obou prvních parciálních derivací v nule se nezmění. $\partial_1 f(0,0)$ totiž závisí pouze na hodnotách f na ose x_1 a $\partial_2 f(0,0)$ závisí pouze na hodnotách f na ose x_2. To ukazuje, že samotné parciální derivace nemohou lokální vlastnosti funkce zachytit.

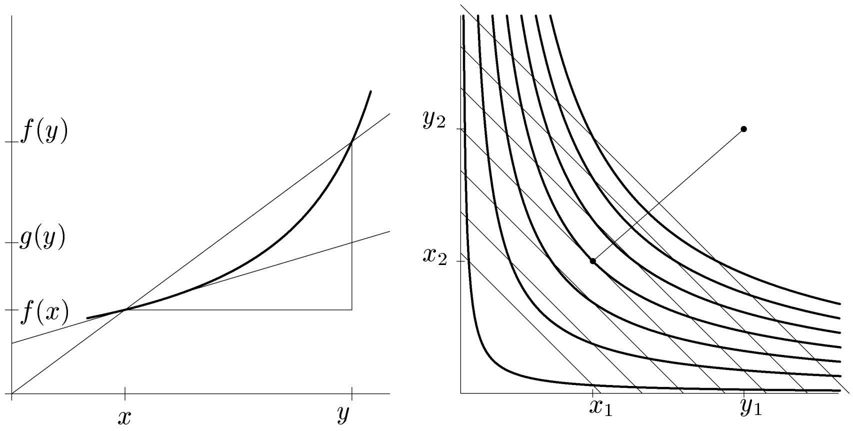
Tak jako funkci jedné proměnné aproximujeme tečnou jejího grafu, funkci dvou proměnných aproximujeme tečnou rovinou jejího grafu. Každá rovina v třírozměrném prostoru, která prochází bodem $[x_1, x_2, f(x_1,x_2)]$ grafu funkce f, má rovnici

$$g(y_1,y_2) = f(x_1,x_2) + A_1(y_1 - x_1) + A_2(y_2 - x_2)$$

Uvažujme přímku spojující bod $[x, f(x)]$ s bodem $[y, f(y)]$ a dále přímku spojující bod $[x, f(x)] = [x, g(x)]$ s bodem $[y, g(y)]$ (obr. 8.2 vlevo). Úhly, které tyto přímky svírají s vodorovnou rovinou jsou

$$\arctan\frac{f(y) - f(x)}{||y-x||}, \quad \arctan\frac{g(y) - g(x)}{||y-x||}$$

Grafy funkcí f a g jsou v bodě $[x, f(x)]$ navzájem tečné právě když tyto úhly jsou pro každé $y \approx x$ nekonečně blízko. Vrstevnice funkcí f a g pak v blízkosti bodu



Obrázek 8.2: Diferenciál

x mají stejný směr a stejnou hustotu (obr. 8.2 vpravo). Protože arctan je spojitá funkce, nastává to právě když

$$\frac{f(x+u)-f(x)}{||u||} \approx \frac{g(x+u)-g(x)}{||u||} = \frac{A_1(x)u_1 + A_2(x)u_2}{||u||}$$

Zde $u = y - x$ je vektor bodu y vzhledem k x. Koeficienty A_1 a A_2 určují sklon tečné roviny a závisí na bodě x. V různých bodech má tečná rovina různý sklon. Funkce $df(x) : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ definovaná

$$df(x)(u) = A_1(x)u_1 + A_2(x)u_2$$

je lineární forma a nazýváme ji diferenciál funkce f v bodě x. Například funkce $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ má v bodě $x = [x_1, x_2]$ diferenciál $df(x)(u) = x_2^2 u_1 + 2x_1 x_2 u_2$. Pro každé $x, u \in \mathbb{R}_2$ je totiž

$$\begin{aligned} \frac{f(x+u)-f(x)}{||u||} &= \frac{(x_1+u_1)(x_2+u_2)^2 - x_1 x_2^2}{||u||} \\ &= \frac{x_2^2 u_1 + 2x_1 x_2 u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} + \frac{x_1 u_2^2 + 2x_2 u_1 u_2 + u_1 u_2^2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \end{aligned}$$

Protože $|u_i| \le \sqrt{u_1^2+u_2^2}$, je pro $u \approx \mathbf{0}$

$$\left| \frac{x_1 u_2^2 + 2x_2 u_1 u_2 + u_1 u_2^2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \right| \le |x_1 u_2| + |2x_2 u_1| + |u_2^2| \approx 0$$

Pro každé pevné $x \in \mathbb{R}_2$ je diferenciál $df(x) : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ lineární forma, tj. funkce dvou proměnných. Na diferenciál se také můžeme dívat jako na funkci čtyř proměnných $df : \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ definovanou $df(x_1, x_2, u_1, u_2) = df(x_1, x_2)(u_1, u_2)$.

Definice 199 *Diferenciál funkce $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in \mathcal{D}(f)$ je lineární forma $df(x)(u) = A_1(x)u_1 + \cdots + A_n(x)u_n$ taková, že pro každý nenulový infinitesimální vektor $u \in \mathbb{R}_n^0$ platí*

$$\frac{f(x+u) - f(x) - df(x)(u)}{||u||} \approx 0$$

Viděli jsme, že pro funkci $f(x) = x_1 x_2^2$ je

$$df(x)(u) = x_2^2 u_1 + 2x_1 x_2 u_2 = \partial_1 f(x_1, x_2)u_1 + \partial_2 f(x_1, x_2)u_2$$

Koeficienty diferenciálu jsou parciální derivace. To platí obecně

Tvrzení 200 *Jestliže funkce $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ má v bodě x diferenciál, pak v tomto bodě má všechny parciální derivace prvního řádu a platí*

$$df(x, u) = \partial_1 f(x)u_1 + \cdots + \partial_n f(x)u_n$$

Důkaz: Je-li $df(x)(u) = A_1(x)u_1 + \cdots + A_n(x)u_n$ diferenciál, je pro nenulové infinitesimální α a vektor $u = \alpha\delta_i$ (δ_i je i-tý jednotkový vektor)

$$\frac{f(x + \alpha\delta_i) - f(x)}{\alpha} \approx \frac{df(x)(\alpha\delta_i)}{\alpha} = A_i(x)$$

takže $\partial_i f(x) = A_i(x)$ □

Tvrzení 201 *Má-li funkce f v bodě x diferenciál, je v něm spojitá.*

Důkaz: Nechť $u \in \mathbb{R}_n^0$ je infinitesimální vektor. Pak

$$f(x+u) - f(x) \quad \approx \quad df(x, u) \approx 0$$

Například funkce $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ nemá v nulovém bodě parciální derivace, takže zde nemá diferenciál. Graf funkce je totiž kuželová plocha, která má v nule hrot (obr. 7.7). Naopak však existemce parciálních derivací ještě nezaručuje existenci diferenciálu. Například funkce $f(x, y) = \mathrm{sgn}(xy)$ má v nule obě parciální derivace nulové, nemá však diferenciál.

Má-li funkce v bodě x diferenciál, má v tomto bodě derivace v každém směru. Každý bod x a nenulový vektor u určuje přímku $h(t) = x + tu$ v $\mathbb{R}_n$ spojující body x a $x + u$. Studujeme-li funkci f pouze na této přímce, dostáváme funkci jedné proměnné

$$g(t) = (f \circ h)(t) = f(x + tu)$$

Graf funkce g vznikne na řezu grafu funkce f vedeném bodem x ve směru u. Přitom se však graf lineárně transformuje tak, že jednotkou délky je $||u||$. Je totiž $h(0) = x$, $h(1) = x + u$. Pro infinitesimální vektor αu je

$$g'(0) \approx \frac{g(\alpha) - g(0)}{\alpha} = \frac{f(x + \alpha u) - f(x)}{||\alpha u||} \cdot ||u|| \approx \frac{df(x, \alpha u)}{||\alpha u||} = df(x, u)$$

Existence diferenciálu je zaručena, má li funkce v bodě x spojité parciální derivace.

Věta 202 *Nechť všechny parciální derivace $\partial_i f$ funkce $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ existují v okolí bodu $x \in (\mathcal{D}(f))$, a nechť jsou v tomto bodě spojité. Pak existuje diferenciál $df(x)$.*

Důkaz: Pro infinitesimální $u \in \mathbb{R}_n^0$ uvažujeme cestu z bodu x do bodu $x+u$, která vede po hranách krychle vytvořené body x a $x+u$. Pro $n=3$ je to cesta

$$[x_1,x_2,x_3] \to [x_1,x_2,x_3+u_3] \to [x_1,x_2+u_2,x_3+u_3] \to [x_1+u_1,x_2+u_2,x_3+u_3]$$

Podle věty o přírůstku funkce existují infinitesimální v_i takové, že platí

$$\begin{aligned}
&f(x_1+u_1,\ldots,x_n+u_n) - f(x_1,\ldots,x_n)\\
&\quad= f(x_1+u_1,\ldots,x_n+u_n) - f(x_1,x_2+u_2,\ldots,x_n+u_n) +\\
&\qquad f(x_1,x_2+u_2,\ldots,x_n+u_n) - f(x_1,x_2,x_3+u_3,\ldots,x_n+u_n) + \cdots\\
&\qquad f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+u_n) - f(x_1,\ldots,x_n)\\
&\quad= \partial_1 f(x_1+v_1,x_2+u_2,\ldots,x_n+u_n)\cdot u_1 +\\
&\qquad \partial_2 f(x_1,x_2+v_2,x_3+u_3,\ldots,x_n+u_n)\cdot u_2 + \cdots\\
&\qquad \partial_n f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+v_n)\cdot u_n
\end{aligned}$$

Protože $\partial_i f$ jsou spojité v bodě x a $|u_i|/||u|| \le 1$, je

$$\frac{f(x+u)-f(x)}{||u||} \approx \frac{\partial_1 f(x)\cdot u_1 + \cdots + \partial_n f(x)\cdot u_n}{||u||} \quad \square$$

Definice 203 *Říkáme, že funkce $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $x \in \mathcal{D}(f)$, jestliže všechny její parciální derivace $\partial_i f$ jsou definovány v nějakém okolí x (tj. $x \in \operatorname{int}\mathcal{D}(\partial_i f)$), a jsou v něm spojité. Říkáme, že funkce f je diferencovatelná, je-li diferencovatelná v každém bodě svého definičního oboru.*

Věta 202 tedy říká, že diferencovatelné funkce mají diferenciál. Dává nám také návod, jak nejsnáze existenci diferenciálu funkce ověřit. Například parciální derivace funkce $f(x) = x_1x_2^2$ jsou spojité funkce $\partial_1(x) = x_2^2$, $\partial_2(x) = 2x_1x_2$, takže funkce f má diferenciál v každém bodě. Mezi diferencovatelností a existencí diferenciálu je však rozdíl.

Příklad 204 *Funkce*

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \quad \textit{pro} \quad [x,y] \ne \mathbf{0},\;\; f(0,0)=0$$

má diferenciál v nulovém bodě, není zde však diferencovatelná.

Důkaz: Funkce má v $\mathbf{0}$ nulový diferenciál $df(0,0,u,v) = 0$, protože pro každé infinitesimální $[u,v] \ne \mathbf{0}$ je

$$\left|\frac{f(u,v)-f(0,0)-df(0,0,u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}}\right| = \sqrt{u^2+v^2}\sin\frac{1}{u^2+v^2} \approx 0$$

Dále je $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$. Pro $[x,y] \neq \mathbf{0}$ je však

$$
\begin{aligned}
\partial_1 f(x,y) &= 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} \\
\partial_2 f(x,y) &= 2y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

Obě parciální derivace existují v každém bodě, v nule však nejsou spojité. □

Uvažujme funkci i-té projekce $\eta_i : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ definovanou $\eta_i(x) = x_i$. Funkce η_i má derivace $\partial_i \eta_i(x) = 1$, $\partial_j \eta_i(x) = 0$ pro $j \neq i$, a tedy má diferenciál $d\eta_i(x,u) = u_i$. Její diferenciál je tedy v každém bodě x stejný $d\eta_i(x)(u) = u_i$. Běžně se funkce η_i značí x_i podle pravé strany své definující rovnice, tedy $x_i(x) = x_i$. V této rovnosti se symbol x_i vyskytuje ve dvou různých významech. Jednou jako znak pro funkci, jednou jako znak pro hodnotu proměnné. Diferenciál i-té projekce je pak $dx_i(x,u) = dx_i(x)(u) = u_i$. Protože diferenciál je v každém bodě x stejný, proměnnou x zde vynecháváme a píšeme $dx_i(u) = u_i$. Funkce $dx_i : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ jsou tedy projekce, které tvoří bázi duálního prostoru $\overline{\mathbb{R}_n}$. Diferenciál obecné funkce f je lineární kombinace těchto projekcí

$$
\begin{aligned}
df(x,u) &= \partial_1 f(x) \cdot dx_1(u) + \cdots + \partial_n f(x) \cdot dx_n(u) \\
df(x) &= \partial_1 f(x) \cdot dx_1 + \cdots + \partial_n f(x) \cdot dx_n \\
df &= \partial_1 f \cdot dx_1 + \cdots + \partial_n f \cdot dx_n
\end{aligned}
$$

To jsou rovnosti, které platí pro každou dvojici x, u. Parciální derivace $\partial_i f$ však závisí pouze na proměnných x a diferenciály projekcí dx_i závisí pouze na proměnných u. Podobně jako i-tou projekci značíme x_i, i jiné funkce značíme algebraickým výrazem, který je definuje. Tak pro funkci $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ píšeme $df = d(x^2 + 3y^2) = 2x\,dx + 6y\,dy$, a podobně $d(x+y) = dx + dy$, $d(xy) = y\,dx + x\,dy$, $d(\frac{x}{y}) = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2}$, $d(x^y) = yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy$. Diferenciály počítáme podle podobných formálních pravidel jako derivace.

Tvrzení 205

1. $d(f+g)(x) := df(x) + dg(x)$

2. $d(fg)(x) := f(x)dg(x) + g(x)df(x)$

3. $d(1/g)(x) := -dg(x)/g^2(x)$.

Důkaz: Pro infinitesimální vektor u je

$$\frac{(f+g)(x+u) - (f+g)(x)}{||u||} \approx \frac{df(x,u) + dg(x,u)}{||u||}$$

takže $d(f+g)(x,u) = df(x,u) + dg(x,u)$. Pro součin funkcí je

$$
\begin{aligned}
\frac{(fg)(x+u) - (fg)(x)}{||u||} &= f(x+u)\frac{g(x+u) - g(x)}{||u||} + \frac{f(x+u) - f(x)}{||u||} g(x) \\
&\approx \frac{f(x)dg(x,u) + df(x,u)g(x)}{||u||}
\end{aligned}
$$

takže $d(fg)(x,u) = f(x)dg(x,u) + g(x)df(x,u)$. Nakonec

$$\frac{1}{||u||}\left(\frac{1}{g(x+u)} - \frac{1}{g(x)}\right) \quad = \quad -\frac{g(x+u)-g(x)}{||u||} \cdot \frac{1}{g(x+u)g(x)} \approx -\frac{dg(x,u)}{g^2(x)||u||}, \quad \square$$

V tvrzení 205 jsou na obou stranách rovností funkce proměnné u. Jako rovnosti funkcí proměnných x, u lze psát

$$d(f+g) = df + dg, \quad d(fg) = f\,dg + g\,df, \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$$

8.2.1 Diferenciál funkce jedné proměnné

Reálná funkce f jedné proměnné má v bodě x diferenciál právě když zde má derivaci, a její diferenciál je pak $df(x,u) = df(x)(u) = f'(x)u$. Pro každé nenulové infinitesimální u je totiž

$$\frac{f(x+u)-f(x)}{|u|} \approx f'(x) \cdot \mathrm{sgn}(u) = \frac{f'(x)u}{|u|}$$

Derivace funkce jedné proměnné se často vyjadřuje jako podíl diferenciálů. Je totiž

$$\frac{df}{dx}(x,u) = \frac{df(x,u)}{dx(x,u)} = \frac{f'(x)u}{u} = f'(x)$$

To zapisujeme

$$\frac{df}{dx} = f'(x), \quad df = f'(x)\,dx$$

Pro diferenciál složené a inverzní funkce platí vzorce formálně jednodušší než pro derivace

Tvrzení 206 *Nechť f, g jsou reálné funkce. Pak*

$$d(f \circ g)(x) := df(g(x)) \circ dg(x)$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} d(f \circ g)(x)(u) &= (f \circ g)'(x) \cdot u = f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot u \\ &= df(g(x))\Big(dg(x)(u)\Big) = (df(g(x)) \circ dg(x))(u) \quad \square \end{aligned}$$

Diferenciál složené funkce je tedy složení jejích diferenciálů. Skládáme-li totiž lineární formy na jednodimenzionálním prostoru, násobíme jejich koeficienty. Je-li $f(x) = ax$ a $g(x) = bx$, je $(f \circ g)(x) = abx$. To vysvětluje, proč derivace složené funkce je součin derivací. Podobně diferenciál inverzní funkce vznikne inverzí diferenciálu.

Tvrzení 207 *Nechť f je v bodě x diferencovatelná a $f'(x) \neq 0$. Pak inverzní funkce má v bodě $f(x)$ diferenciál*

$$df^{-1}(f(x)) = (df(x))^{-1}$$

Důkaz:
$$df^{-1}(f(x))(u) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot u = \frac{u}{f'(x)} = (df(x))^{-1}(u)$$
Označíme-li totiž $h = df(x)$ lineární formu $h(a) = au$, kde $a = f'(x)$, je její inverzní funkce lineární forma $h^{-1}(u) = u/a$. □

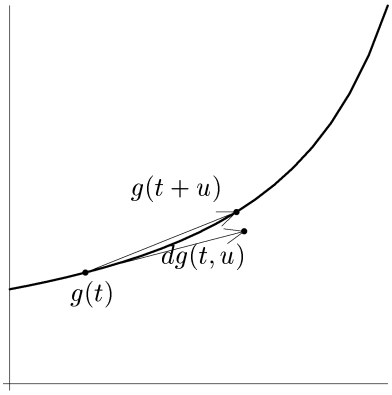
Vzorce pro diferenciál složené a inverzní funkce budeme postupně zobecňovat na funkce více proměnných a na zobrazení mezi aritmetickými prostory různých dimenzí.

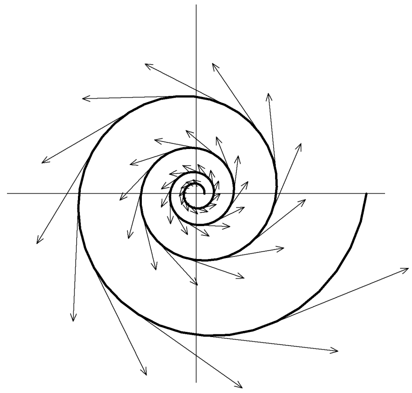
Cvičení. Určete diferenciály funkcí

1. $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$
2. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$
3. $f(x,y) = x \cdot e^y$
4. $f(x,y) = e^x \cos y$

8.2.2 Diferenciál složené funkce

Uvažujme rovinnou křivku $g(t) = [g_1(t), g_2(t)]$. Její graf je množina
$$\mathcal{G}(g) = \{[t, g_1(t), g_2(t)] : \ t \in \mathbb{R}\}$$
v třírozměrném prostoru. Každá přímka, která prochází bodem grafu $[t, g_1(t), g_2(t)]$ má rovnici
$$h(s) = [g_1(t) + A_1(s-t), g_2(t) + A_2(s-t)]$$
$h(s)$ je tečná přímka, pokud pro každé $s \approx t$, $s \neq t$ je
$$\frac{g(s) - g(t)}{s-t} \approx \frac{h(s) - h(t)}{s-t} = [A_1, A_2]$$
Odtud $A_1 = g_1'(t)$, $A_2 = g_2'(t)$. Píšeme-li $u = t - s$, a definujeme-li diferenciál $dg(t)(u) = [g_1'(t)u, g_2'(t)u]$, je tedy
$$\frac{g(t+u) - g(t) - dg(t)(u)}{u} \approx \mathbf{0}$$
Diferenciál zobrazení $g : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_n$ v bodě t je lineární zobrazení (přímka) $dg(t) : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_n$. Diferenciál v bodě t existuje právě když každá složka g_i má v bodě t derivaci. Jako derivaci g v bodě t označujeme vektor jejích derivací
$$g'(t) = dg(t,1) = [g_1'(t), \ldots, g_n'(t)]$$
Diferenciál určuje nejen tečný vektor k grafu křivky v prostoru R_{n+1} ale, v případě že je nenulový, také tečný vektor k obrazu křivky v prostoru $\mathbb{R}_n$. Je-li $dg(t,u)$ nenulový, je úhel mezi vektory $g(t+u) - g(t)$ a $dg(t,u)$ stejný jako úhel mezi vektory
$$v = \frac{g(t+u) - g(t)}{u}, \ \ w = \frac{dg(t,u)}{u} = dg(t,1)$$





Obrázek 8.3: Diferenciál křivky

Tyto vektory již infinitesimální nejsou, a $\cos \angle(v,w) = \frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||} \approx 1$, takže $\angle(v,w) \approx 0$ (obr. 8.3 vlevo). Speciálně $g'(t) = dg(t,1)$ je tečný vektor k g v t. Interpretujeme-li křivku jako záznam pohybu v rovině a $g(t)$ jako pozici v čase t, je $g'(t)$ vektor rychlosti v čase t. Lineární podprostor $\mathcal{R}(dg(t)) = \mathcal{L}(g'(t))$ se nazývá tečný prostor g v bodě t. Je-li v bodě t $g'(t) = \mathbf{o}$, dráha v bodě $g(t)$ může ale nemusí mít tečný vektor. To nastává například u cykloidy, kardioidy nebo astroidy.

Pro křivku $g(t) = [e^{at}\cos t, e^{at}\sin t]$ je $g'(t) = [a\cos t - \sin t, a\sin t + \cos t]e^{at}$. Pro $a = 0$ se jedná o kružnici s poloměrem 1 a její tečný vektor $[-\sin t, \cos t]$ je kolmý na polohový vektor $g(t)$. Pro $a > 0$ je to geometrická spirála a úhel mezi tečným vektorem a průvodičem je konstantní. Je totiž $||g(t)|| = e^{at}$, $||g'(t)|| = e^{at}\sqrt{a^2+1}$ a

$$\angle(g(t), g'(t)) \quad = \quad \arccos \frac{g(t) \cdot g'(t)}{||g(t)|| \cdot ||g'(t)||} = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \operatorname{arccot} a$$

Tvrzení 208 *Nechť* $g : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_n$ *je křivka a* $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_1$ *funkce* n *proměnných. Nechť* g *má diferenciál v bodě* t *a* f *má diferenciál v bodě* $g(t)$*. Pak složená funkce*

$$h(t) = f \circ g(t) = f(g_1(t), \ldots, g_n(t))$$

má v bodě t *diferenciál* $dh(t) = df(g(t)) \circ dg(t)$ *a derivaci*

$$\begin{aligned} h'(t) &= \partial_1 f(g(t)) \cdot g_1'(t) + \cdots + \partial_n f(g(t)) \cdot g_n'(t) \\ &= df(g_1(t), \ldots, g_n(t), g_1'(t), \ldots, g_n'(t)) \end{aligned}$$

Důkaz: Pro infinitesimální nenulové α položme $\beta_i = g_i(t+\alpha) - g_i(t)$. Je-li vektor $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_n]$ roven nule, je $g_i'(t) = 0$ a $f(g(t+\alpha)) = f(g(t))$, takže $h'(t) = 0 = df(g(t), g'(t))$. Je-li vektor β nenulový, je

$$\begin{aligned} \frac{f(g(t+\alpha)) - f(g(t))}{\alpha} &= \frac{f(g(t)+\beta) - f(g(t))}{||\beta||} \cdot \frac{||\beta||}{\alpha} \approx \frac{df(g(t),\beta)}{||\beta||} \cdot \frac{||\beta||}{\alpha} \\ &= df(g(t), \tfrac{\beta}{\alpha}) \approx df(g(t), g'(t)) \quad \square \end{aligned}$$

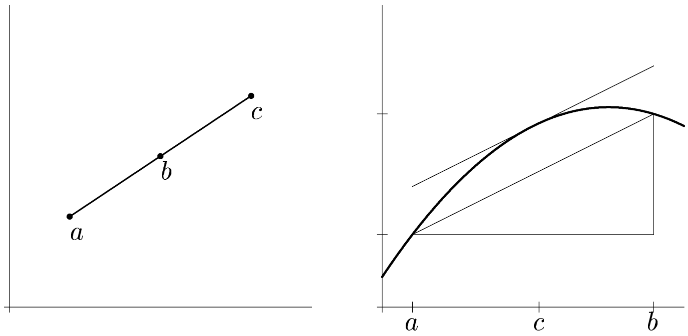
Speciálně pro funkci dvou proměnných $f(x) = x_1 x_2$ je složená funkce $h(t) = f \circ g(t) = g_1(t)g_2(t)$. Protože $df(x) = x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2$, dostáváme odtud vzorec pro diferenciál součinu $d(g_1 g_2) = g_2 dg_1 + g_1 dg_2$. Pro funkci $f(x,y) = x^y$ dostáváme vzorec na derivaci mocniny funkcí

$$(g(x)^{h(x)})' = h(x)g(x)^{h(x)-1}g'(x) + g(x)^{h(x)} \ln g(x) \cdot g'(x)$$

Vyšetřujeme-li funkci f dvou proměnných na kružnici $x = \cos t$, $y = \sin t$, platí pro složenou funkci $h(t) = f(\cos t, \sin t)$

$$h'(t) = -\partial_1 f(\cos t, \sin t) \cdot \sin t + \partial_1 f(\cos t, \sin t) \cdot \cos t$$

Například pro $f(x,y) = y^4 - x^4$ je $h'(t) = 4\cos^3 t \sin t + 4\sin^3 t \cos t = 4\cos t \sin t$.



Obrázek 8.4: Věta o přírůstku funkce

Tvrzení 209 (Věta o přírůstku funkce) *Nechť $a, b \in \mathbb{R}_n$ a nechť funkce f má diferenciál ve všech bodech úsečky spojující body a, b. Pak existuje bod této úsečky $c = a + t(b-a)$, kde $t \in (0,1)$, pro který platí*

$$f(b) - f(a) = df(c, b-a).$$

Důkaz (obr. 8.4): Položme $g(t) = a + (b-a)t$. složená funkce $h(t) = f(g(t))$ má diferenciál $dh(t,u) = df(g(t), b-a)$. Podle věty o přírůstku funkce aplikované na h je

$$f(b) - f(a) = h(1) - h(0) = h'(t) = df(g(t), b-a)$$

Předpokládejme, že křivka $g : \subseteq\mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_n$ je vrstevnice, nebo část vrstevnice $f^{-1}(c)$ funkce $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_1$, to znamená, že $f(g(t)) = c$ je konstantní funkce. Označme grad $f(x)$ vektor parciálních derivací funkce f

$$\operatorname{grad} f(x) = [\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x)]$$

Protože derivace složené funkce $f \circ g$ je nulová, v každém bodě t je

$$\operatorname{grad} f(g(t)) \cdot g'(t) \quad = \quad \partial_1 f(g(t)) \cdot g_1'(t) + \cdots + \partial_n f(g(t)) \cdot g_n'(t) = (f \circ g)'(t) = 0$$

Skalární součin gradientu f s vektorem derivací g je tedy nulový, gradient funkce f je kolmý na její vrstevnice.

8.2.3 Diferenciál zobrazení

Uvažujme zobrazení $f : _{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ z n-rozměrného prostoru do m-rozměrného prostoru. Zobrazení je dáno m-ticí $f = [f_1, \ldots, f_m]$ reálných funkcí n proměnných, tedy

$$f(x_1, \ldots, x_n) = [f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)]$$

Jeho diferenciál definujeme formálně stejně jako v případě funkcí n proměnných a n-rozměrných cest. Připomeňme, že zobrazení $g : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ je lineární, jestliže $g(au + bv) = ag(u) + bg(v)$ pro každé vektory $u, v \in \mathbb{R}_n$ a reálná čísla $a, b \in \mathbb{R}$.

Definice 210 *Diferenciál zobrazení $f : _{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ v bodě $x \in \mathcal{D}(f)$ je lineární zobrazení $df(x) : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ takové, že pro každý infinitesimální nenulový vektor $u \in \mathbb{R}_n^0$ platí*

$$\frac{f(x+u) - f(x)}{||u||} \approx \frac{df(x)(u)}{||u||}$$

Tato rovnost platí právě když platí pro každou složku, a tedy právě když každá funkce f_j má diferenciál $df_j(x)(u) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_j(x) u_i$. Diferenciál zobrazení f je pak

$$df(x)_j(u) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_j(x) u_i \quad \text{neboli} \quad df(x)_j = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_j(x)\, dx_i$$

Matice diferenciálu se nazývá Jacobiova matice nebo Jacobián

$$\partial f(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \ldots & \partial_n f_1(x) \\ & \vdots & \\ \partial_1 f_m(x) & \ldots & \partial_n f_m(x) \end{bmatrix}$$

tj. $\partial f(x)_{ji} = \partial_i f_j(x)$. Pomocí maticového násobení pak lze psát

$$df(x)(u) = df(x, u) = \partial f(x) \cdot u$$

Vektory $u \in \mathbb{R}_n$ jsou zde sloupcové a násobí se maticí zprava.

$$\begin{bmatrix} df_1(x,u) \\ \vdots \\ df_m(x,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \ldots & \partial_n f_1(x) \\ & \vdots & \\ \partial_1 f_m(x) & \ldots & \partial_n f_m(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Pro funkci $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je její Jacobián řádkový vektor jejích parciálních derivací (gradient), pro křivku $g : \subseteq\mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_n$ je její Jacobián sloupcový vektor derivací jejich složek

$$\partial f(x) = [\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x)], \quad \partial g(t) = \begin{bmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_n'(t) \end{bmatrix}$$

Pro kvadratickou rovinnou transformaci $f(x,y) = [x|x|, y|y|]$ je

$$\partial f(x,y) = \begin{bmatrix} 2|x| & 0 \\ 0 & 2|y| \end{bmatrix}, \quad df(x,y,u,v) = [2|x|u, 2|y|v]$$

Sférické souřadnice $f(u,v) = [\cos u \cos v, \sin u \sin v, \sin v]$ mají Jacobián

$$\partial f(u,v) = \begin{bmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ 0 & \cos v \end{bmatrix}$$

Věta 211 *Nechť zobrazení $g : \subseteq\mathbb{R}_p \to \mathbb{R}_n$ má diferenciál v bodě $x \in \mathbb{R}_p$ a zobrazení $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ má diferenciál v bodě $g(x) \in \mathbb{R}_n$. Pak složené zobrazení $h = f \circ g : \subseteq\mathbb{R}_p \to \mathbb{R}_m$ má v bodě x diferenciál $dh(x) = df(g(x)) \circ dg(x)$ s Jacobiánem $\partial h(x) = \partial f(g(x)) \cdot \partial g(x)$.*

$$dh(x) : \mathbb{R}_p \xrightarrow{dg(x)} \mathbb{R}_n \xrightarrow{df(g(x))} \mathbb{R}_m$$

Důkaz: Je $h_k(x_1, \ldots, x_p) = f_k(g_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_p))$ takže

$$\begin{aligned} dh_k(x,u) &= \sum_{i=1}^{p} \partial_i h_k(x_1, \ldots, x_p) \cdot u_i = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_k(g(x)) \cdot \partial_i g_j(x) \cdot u_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} (\partial f(g(x)))_{kj} \cdot (\partial g(x))_{ji} \cdot u_i \\ &= (\partial f(g(x)) \cdot \partial g(x) \cdot u)_k = df_k(g(x))\Big(dg(x)(u)\Big) \ \Box \end{aligned}$$

Polární transformace a její inverze jsou zobrazení $g, f : \subseteq\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ definované

$$\begin{aligned} g(u,v) &= [x,y] = [u \cos v, u \sin v] \\ f(x,y) &= [u,v] = [\sqrt{x^2+y^2}, \arctan \frac{y}{x}] \end{aligned}$$

Jejich Jacobiány jsou

$$\partial g(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{bmatrix}, \quad \partial f(x,y) \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

Dosadíme-li do $\partial f(x,y)$ za x a y, dostáváme

$$\partial f(g(u,v)) = \begin{bmatrix} \cos v & \sin v \\ \frac{-\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u} \end{bmatrix}$$

Vidíme, že $\partial f(g(u,v)) \cdot \partial g(u,v)$ je jednotková matice, protože zobrazení $f(g(u,v)) = [u,v]$ je identita.

Cvičení Určete Jacobiány

1. $f(x,y,z) = [xy+1, x^2-y^2+z, z-x]$
2. $g(x,y) = [x^2+y^2, \ln x + \ln y, \frac{x}{y}]$
3. $h = f \circ g$ v bodě $[1,1]$.

8.3 Diferenciály vyšších řádů

Diferenciál druhého řádu funkce $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ získáme z diferenciálu $df(x,u)$ diferencováním podle x při pevném u. Pro pevné $u \in \mathbb{R}_n$ označme $df(.,u) : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ funkci danou předpisem $df(.,u)(x) = df(x,u)$.

Definice 212 *Funkce $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ má v bodě $x \in \mathcal{D}(f)$ bilineární diferenciál $D^2f : \subseteq\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$, jestliže pro každé $u,v \in \mathbb{R}_n$ je*

$$D^2 f(x,u,v) = d\Big(df(.,u)\Big)(x,v)$$

Protože $df(.,u)(x) = \partial_1 f(x) \cdot u_1 + \cdots + \partial_n f(x) \cdot u_n$, má f bilineární diferenciál, právě když každá parciální derivace $\partial_i f(x)$ má diferenciál

$$d(\partial_i f)(x,v) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{ij} f(x) \cdot v_j$$

Odtud

$$D^2 f(x,u,v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_{ij} f(x) \cdot v_j \right) u_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_{ij} f(x) \cdot u_i \cdot v_j$$

Pro pevné $x \in \mathbb{R}_n$ dostáváme bilineární formu $D^2 f(x) : \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ definovanou $D^2 f(x)(u,v) = D^2 f(x,u,v)$. Připomeňme, že tenzorový součin $dx_i \otimes dx_j : \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je dán předpisem

$$(dx_i \otimes dx_j)(u,v) = dx_i(u) \cdot dx_j(v) = u_i v_j.$$

takže

$$D^2 f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_{ij} f(x)\, dx_i \otimes dx_j$$

Vzhledem ke kanonické bázi $(dx_i \otimes dx_j)_{i,j=1}^n$ prostoru bilineárních forem tvoří souřadnice bilineárního diferenciálu Hesseovu matici, neboli Hessián $(\partial^2 f(x))_{ij} = \partial_{ij} f(x)$

$$\partial^2 f(x) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(x) & \dots & \partial_{1n} f(x) \\ & \vdots & \\ \partial_{n1} f(x) & \dots & \partial_{nn} f(x) \end{bmatrix}$$

Pokud parciální derivace $\partial_i f$ mají spojité parciální derivace, tj. pokud existují spojité parciální derivace druhého řádu, mají $\partial_i f$ diferenciál a tedy f má bilineární diferenciál. V tomto případě je také $\partial_{ij} f(x) = \partial_{ji} f(x)$, takže Hessián je symetrická matice. To motivuje následující definici.

Definice 213 *Funkce $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je v bodě $x \in \mathcal{D}(f)$ k-diferencovatelná, jestliže všechny její parciální derivace řádu k jsou definovány v nějakém okolí bodu x a jsou v x spojité. Říkáme, že funkce f je k-diferencovatelná, je-li k-diferencovatelná v každém bodě svého definičního oboru.*

Tvrzení 214 *Nechť funkce $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je 2-diferencovatelná v bodě $x \in \mathcal{D}(f)$. Pak v tomto bodě existuje bilineární diferenciál a je symetrický, tj. pro každé $u, v \in \mathbb{R}_n$ je $D^2 f(x, v, u) = D^2 f(x, u, v)$.*

Důkaz plyne z věty o 202 o existenci diferenciálu a z věty 197 o záměně pořadí parciálních derivací. □

Tvrzení 215 *Nechť $x, u, v \in \mathbb{R}_n$ a nechť $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ má bilineární diferenciál v každém bodě rovnoběžníku $\{x + tu + sv : \ 0 \leq t, s \leq 1\}$. Pak existují $s, t \in (0, 1)$ takové, že*

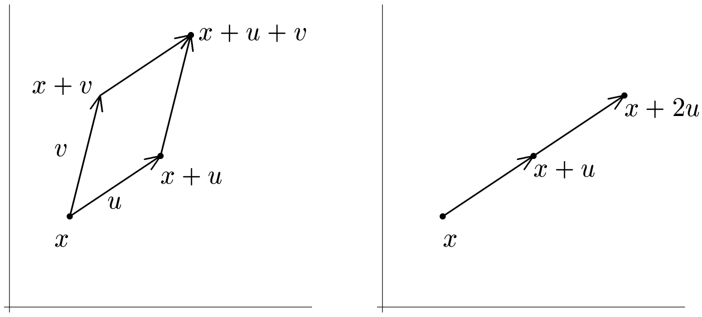
$$f(x + u + v) - f(x + u) - f(x + v) + f(x) = D^2 f(x + su + tv, u, v)$$

Důkaz (viz obr. 8.5 vlevo): Pro pevné v uvažujme funkci $g(y) = f(y + v) - f(y)$. Pak existují $s, t \in (0, 1)$, tak že

$$\begin{aligned} f(x+u+v) - f(x+u) - f(x+v) + f(x) &= g(x+u) - g(x) = dg(x+su, u) \\ &= df(x+su+v, u) - df(x+su, u) \\ &= d\Big(df(., u)\Big)(x+su+tv, v) \\ &= D^2 f(x+su+tv, u, v) \end{aligned}$$

Tvrzení 216 *Nechť $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je 2-diferencovatelná v bodě x. Pak pro každé nenulové infinitesimální vektory $u, v \in \mathbb{R}_n^0$ platí*

$$\frac{f(x+u+v) - f(x+u) - f(x+v) + f(x)}{||u|| \cdot ||v||} \approx \frac{D^2 f(x, u, v)}{||u|| \cdot ||v||}$$



Obrázek 8.5: Bilineární diferenciál

Důkaz: Podle principu expanze pro infinitesimální vektory $u, v \in \mathbb{R}_n^*$ existují $s, t \in (0,1)^*$, pro které

$$\begin{aligned}\frac{f(x+u+v) - f(x+u) - f(x+v) + f(x)}{||u|| \cdot ||v||} &= D^2 f(x + su + tv, \tfrac{u}{||u||}, \tfrac{v}{||v||}) \\ &\approx D^2 f(x, \tfrac{u}{||u||}, \tfrac{v}{||v||})\end{aligned}$$

Speciálním případem této věty je tvrzení 84 i tvrzení 196.

Určeme diferenciály kvadratické formy $f(x) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j$ vytvořené symetrickou bilineární formou $F(x,y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$.

$$\begin{aligned} df(x,u) &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \right) u_k = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i u_j = 2F(x,u) \\ D^2 f(x,u,v) &= 2 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} u_j \right) v_k = 2F(u,v) \end{aligned}$$

Podobně pro kubickou formu $f(x) = \sum_{ijk} a_{ijk} x_i x_j x_k$ vytvořenou trilineární formou $F(x,y,z) = \sum_{ijk} a_{ijk} x_i y_j z_k$ je

$$\begin{aligned} df(x,u) &= 3F(x,x,u), \\ D^2 f(x,u,v) &= 6F(x,u,v), \\ D^3 f(x,u,v,w) &= 6F(u,v,w) \end{aligned}$$

Definice 217 *Nechť $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je k-diferencovatelná v bodě x. Její k-lineární diferenciál v bodě x je k-lineární forma $D^k f(x) : \mathbb{R}_{kn} \to \mathbb{R}$ daná předpisem*

$$D^k f(x)(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \partial_{i_1 \ldots i_k} f(x) (u_1)_{i_1} \cdots (u_k)_{i_k}$$

Například 3-lineární diferenciál je

$$D^3 f(x)(u,v,w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \partial_{ijk} f(x) u_i v_j w_k$$

Tvrzení 216 lze zobecnit i pro k-lineární diferenciály. Například je-li f 3-diferencovatelná funkce, je

$$\frac{f(x+u+v+w) - f(x+u+v) - f(x+u+w) - f(x+v+w)}{||u|| \cdot ||v|| \cdot ||w||}$$
$$+ \frac{f(x+u) + f(x+v) + f(x+w) - f(x)}{||u|| \cdot ||v|| \cdot ||w||} \approx \frac{D^3 f(x,u,v,w)}{||u|| \cdot ||v|| \cdot ||w||}$$

Definice 218 *Nechť $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je k-diferencovatelná v bodě x. Její k-tý diferenciál v x je funkce $d^k f(x) : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ daná předpisem*

$$d^k f(x)(u) = D^k f(x, \underbrace{u, \cdots, u}_{k})$$

Druhý diferenciál je kvadratická forma

$$d^2 f(x,u) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{ij} f(x) \cdot u_i u_j$$

Třetí diferenciál je kubická forma

$$d^3 f(x,u) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \partial_{ijk} f(x) \cdot u_i u_j u_k$$

Pro 2-diferencovatelnou funkci dvou proměnných je

$$\begin{aligned}
d^2 f(x,y,u,v) &= \partial_{11} f(x,y) \cdot u^2 + 2\partial_{12} f(x,y) \cdot uv + \partial_{22} f(x,y) \cdot v^2 \\
d^3 f(x,y,u,v) &= \partial_{111} f(x,y) \cdot u^3 + 3\partial_{112} f(x,y) \cdot u^2 v + \\
&\quad 3\partial_{122} f(x,y) \cdot uv^2 + \partial_{222} f(x,y) \cdot v^3 \\
d^k f(x,y,u,v) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial_{1^j 2^{k-j}} f(x,y) \cdot u^j v^{k-j}
\end{aligned}$$

Zde $\partial_{1^j 2^{k-j}} f(x,y)$ znamená parciální derivaci f řádu n: j-krát podle x a $(k-j)$-krát podle y. Položíme-li v tvrzení 216 $v = u$, dostáváme vzorce pro diferenciál druhého řádu (obr. 8.5 vpravo), a podobně pro diferenciály vyšších řádů

$$\begin{aligned}
d^2 f(x,u) &\approx \frac{f(x+2u) - 2f(x+u) + f(x)}{||u||^2} \\
d^3 f(x,u) &\approx \frac{f(x+3u) - 3f(x+2u) + 3f(x+u) - f(x)}{||u||^3} \\
d^k f(x,u) &\approx \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f(x+ju)/||u||^k
\end{aligned}$$

Diferenciál k-tého řádu lze chápat jako směrovou derivaci k-tého řádu. Pro pevný bod x a vektor u uvažujme funkci $g(t) = f(x+tu)$. Má-li f v bodě $x+tu$ diferenciál, je

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x+tu) \cdot u_i = df(x+tu,u) \\
g''(t) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_{ij} f(x+tu) u_i u_j = d^2 f(x+tu,u) \\
g^{(m)}(t) &= d^m f(x+tu,u)
\end{aligned}$$

a speciálně pro $t = 0$ je $g^{(m)}(0) = d^m f(x,u)$. Z tohoto vztahu plyne zobecnění Taylorovy věty na funkce n proměnných. Taylorovy mnohočleny $P_k : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ diferencovatelné funkce $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ v bodě $c \in \mathbb{R}_n$ jsou

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= f(c) \\
P_1(x) &= f(c) + df(c, x-c) \\
P_2(x) &= f(c) + df(c, x-c) + \tfrac{1}{2} d^2 f(c, x-c) \\
P_k(x) &= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} d^j f(c, x-c)
\end{aligned}$$

Taylorova řada ∞-diferencovatelné funkce je

$$P_\infty(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} d^j f(c, x-c)$$

Speciálně pro funkci $f(x,y)$ dvou proměnných je její Taylorova řada v nulovém bodě

$$\begin{aligned}
P_\infty(x,y) = \; & f(\mathbf{0}) + \partial_1 f(\mathbf{0}) \cdot x + \partial_2 f(\mathbf{0}) \cdot y + \\
& \tfrac{1}{2}\partial_{11} f(\mathbf{0}) \cdot x^2 + \partial_{12} f(\mathbf{0}) \cdot xy + \tfrac{1}{2}\partial_{22} f(\mathbf{0}) \cdot y^2 + \\
& \tfrac{1}{6}\partial_{111} f(\mathbf{0}) \cdot x^3 + \tfrac{1}{2}\partial_{112} f(\mathbf{0}) \cdot x^2 y + \\
& \qquad \tfrac{1}{2}\partial_{122} f(\mathbf{0}) \cdot xy^2 + \tfrac{1}{6}\partial_{222} f(\mathbf{0}) \cdot y^3 + \cdots
\end{aligned}$$

tedy

$$P_\infty(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial_{1^k 2^{n-k}} f(\mathbf{0})}{k!(n-k)!} \cdot x^k y^{n-k}$$

Určeme Taylorův rozvoj funkce $f(x,y) = y^x$. Je $\partial_1 f(x,y) = y^x \ln y$, $\partial_2 f(x,y) = xy^{x-1}$. Označme

$$Q_n(x) = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

Pak

$$\partial_{2^n} f(x,y) = Q_n(x) y^{x-n}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{12^n} f(x,y) &= (Q_n'(x) + Q_n(x)\ln y) y^{x-n} \\
\partial_{1^2 2^n} f(x,y) &= (Q_n''(x) + 2Q_n'(x)\ln y + Q_n(x)\ln^2 y) y^{x-n} \\
&\vdots \\
\partial_{1^m 2^n} f(x,y) &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} Q_n^{(m-k)}(x) \ln^k(y) y^{x-n}
\end{aligned}$$

Speciálně pro $x = y = 1$ je $\partial_{1^m 2^n} f(1,1) = Q_n^{(m)}(1)$ takže rozvoj obecné mocniny $(1+y)^{1+x}$ kolem bodu $\langle 1, 1\rangle$ je

$$P_\infty(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k^{(n-k)}(1)}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}$$

Rozvoj do čtvrtého řádu je

$$P_4(x,y) = 1 + y + xy - \frac{x^2 y}{2} + xy^2 + \frac{x^3 y}{3}$$

Věta 219 *Taylorova věta Nechť $x, u \in \mathbb{R}_n$ a nechť f je $(k+1)$-diferencovatelná v každém bodě $x + tu$, kde $t \in \langle 0, 1\rangle$. Pak existuje $t \in (0,1)$, pro které*

$$f(x+u) = f(x) + df(x,u) + \cdots + \frac{1}{k!} d^k f(x,u) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(x+tu, u)$$

Důkaz: Pro funkci $g(t) = f(x+tu)$ je $g^{(m)}(t) = d^m f(x+tu, u)$ pro $0 < m \le k+1$. Dále $g(1) = f(x+u)$ a $g^{(m)}(0) = d^m f(x,u)$. Podle Taylorovy věty existuje t pro které

$$\begin{aligned}
f(x+u) - f(x) - df(x,u) - \frac{1}{2} d^2 f(x,u) - \cdots - \frac{1}{k!} d^k f(x,u) & \\
= g(1) - g(0) - g'(0) - \frac{1}{2} g''(0) - \cdots - \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) & \\
= \frac{g^{(k+1)}(t)}{(k+1)!} = \frac{d^{k+1} f(x+tu, u)}{(k+1)!} &
\end{aligned}$$

Tvrzení 220 *Nechť f je k-diferencovatelná v bodě x. Pak pro každý nenulový infinitesimální vektor u platí*

$$\frac{f(x+u) - f(x) - df(x,u) - \frac{1}{2} d^2 f(x,u) - \cdots - \frac{1}{k!} d^k f(x,u)}{||u||^k} \approx 0$$

Důkaz: Podle předcházející věty použité pro $k-1$ pro každé $u \in \mathbb{R}_n^*$ existuje $t \in (0,1)^*$ tak že

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+u) - f(x) - df(x,u) - \frac{1}{2} d^2 f(x,u) - \cdots - \frac{1}{k!} d^k f(x,u)}{||u||^k} \\
&= \frac{d^k f(x+tu, \frac{u}{||u||}) - d^k f(x, \frac{u}{||u||})}{k!} \approx 0
\end{aligned}$$

protože $d^k f(x,u)$ je spojitá funkce. □

8.4 Lokální extrémy

Definice 221 *Funkce* $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $x \in \mathcal{D}(f)$ *lokální maximum, jestliže pro každý infinitesimální vektor* u*, pro který* $x + u \in \mathcal{D}(f)^*$*, je* $f(x + u) \leq f(x)$*. Podobně definujeme lokální minimum a ostré lokální extrémy.*

Tvrzení 222 *Nechť* f *má v bodě* x *lokální extrém a nechť existuje diferenciál* $df(x)$*. Pak je tento diferenciál nulový, tj.* $\partial_i f(x) = 0$ *pro* $1 \leq i \leq n$*.*

Důkaz: Není-li $df(x)$ nulový, existuje nenulový vektor $u \in \mathbb{R}_n$, pro který $df(x, u) < 0$. Pro infinitesimální $\alpha \neq 0$ je podle tvrzení 220

$$\frac{f(x + \alpha u) - f(x)}{||\alpha u||} \approx \frac{df(x, \alpha u)}{||\alpha u||} = df(x, \tfrac{u}{||u||}) \cdot \operatorname{sgn}(\alpha)$$

Odtud pro α kladné $f(x + \alpha u) < f(x) < f(x - \alpha u)$, takže f nemá v x ani lokální minimum ani lokální maximum. □

V okolí bodů, ve kterých je první diferenciál nulový soudíme na průběh funkce z druhého diferenciálu. Připomeňme, že kvadratická forma $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ je pozitivně definitní, má-li v nule ostré lokální minimum, negativně definitní, má-li v nule ostré lokální maximum a indefinitní, nemá-li v nule ani minimum ani maximum. Pozitivní definitnost lze ověřit Sylvestrovým kriteriem. Na obr. 7.12 jsou vrstevnice pozitivně definitní (vlevo) a indefinitní (vpravo) kvadratické formy.

Tvrzení 223 *Nechť* f *je* 2*-diferencovatelná v bodě* x *a* $df(x) = 0$*.*
1. Je-li $d^2f(x)$ *pozitivně definitní, má* f *v* x *ostré lokální minimum.*
2. Je-li $d^2f(x)$ *negativně definitní, má* f *v* x *ostré lokální maximum.*
3. Je-li $d^2f(x)$ *indefinitní, nemá* f *v* x *lokální extrém.*

Důkaz: 1. Nechť $d^2f(x)$ je pozitivně definitní. Pro každý nenulový infinitesimální vektor u je podle tvrzení 220

$$\frac{f(x + u) - f(x)}{||u||^2} \approx \frac{d^2f(x, u)}{2||u||^2} = \frac{1}{2}d^2f(x, \tfrac{u}{||u||}) \approx d^2f(x, v) > 0$$

kde $v \approx u/2||u||$ je standardní nenulový vektor. Z toho plyne $f(x + u) > f(x)$.
2. Je-li $d^2f(x)$ negativně definitní, je $-d^2f(x)$ pozitivně definitní.
3. Nechť $d^2f(x)$ je indefinitní. Pak existují standardní nenulové vektory u, v takové, že $d^2f(x, u) < 0 < d^2f(x, v)$. Pro nenulové infinitesimální vektory αu a αv je pak

$$\frac{f(x + \alpha u) - f(x)}{\alpha^2||u||^2} \approx \frac{d^2f(x, u)}{2||u||^2} < 0 < \frac{d^2f(x, v)}{2||u||^2} \approx \frac{f(x + \alpha v) - f(x)}{\alpha^2||v||^2}$$

takže $f(x + \alpha u) < 0 < f(x + \alpha v)$. □

V případě, že $d^2f(x)$ je pozitivně semidefinitní, nelze o maximech funkce nic říci. Všechny tři funkce

$$f_1(x,y) = x^4 + y^4, \;\; f_2(x) = -x^4 - y^4, \;\; f_3(x,y) = x^4 - y^4$$

mají v nule druhý diferenciál nulový, tedy pozitivně semidefinitní. Přitom f_1 má v nule ostré minimum, f_2 má v nule ostré maximum a f_3 nemá v nule ani minimum ani maximum.

Hledejme extrémy funkce $f(x,y) = xy(x+y-1)$ (obr. 7.6). Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 2xy + y^2 - y = 0 \\ \partial_2 f(x,y) &= 2xy + x^2 - x = 0 \end{aligned}$$

Odečtením těchto rovnic dostáváme $(y-x)(y-x-1) = 0$. Je-li $y = x$, je $x - 3x^2 = 0$ takže buď $x = y = 0$ nebo $x = y = \frac{1}{3}$. Je-li $y = 1 - x$, je $x(1-x) = 0$, takže buď $x = 0, y = 1$ nebo $x = 1, y = 0$. První diferenciál je tedy nulový v bodech $[0,0]$, $[0,1]$, $[1,0]$, $[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Matice druhých derivací (Hessián) $\partial_{ij} f(x,y)$ a druhý diferenciál tedy jsou

$$\begin{aligned} \partial^2 f(x,y) &= \begin{bmatrix} 2y & 2x+2y-1 \\ 2x+2y-1 & 2x \end{bmatrix} \\ d^2 f(x,y,u,v) &= 2yu^2 + (4x+4y-2)uv + 2xv^2 \end{aligned}$$

V nulových v bodech $[0,0]$, $[1,0]$, $[0,1]$, $[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ prvního diferenciálu je

$$\begin{aligned} d^2 f(0,0,u,v) &= -2uv, \\ d^2 f(1,0,u,v) &= 2uv + v^2, \\ d^2 f(0,1,u,v) &= 2uv + u^2, \\ d^2 f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, u, v) &= \tfrac{2}{3}(u^2 + uv + v^2) \end{aligned}$$

V bodech $[0,0]$, $[1,0]$, $[0,1]$ je druhý diferenciál indefinitní, funkce zde nemá extrém. V bodě $[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ je druhý diferenciál pozitivně definitní, funkce zde má ostré lokální minimum $-\frac{1}{27}$.

Funkce $f(x,y) = xy\ln(x+y)$ je definována na polorovině $x + y > 0$. Parciální derivace jsou

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= y\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y} = 0 \\ \partial_2 f(x,y) &= x\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y} = 0 \end{aligned}$$

Odečtením těchto rovnic dostáváme $(y-x)\ln(x+y) = 0$ Je tedy buď $x = y = \frac{1}{2\sqrt{e}}$ nebo $x + y = 1$ a $xy = 0$, takže buď $x = 0, y = 1$ nebo $x = 1, y = 0$. Druhé derivace jsou

$$\partial^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{y}{x+y} + \frac{y^2}{(x+y)^2} & \ln(x+y) + \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2} \\ \ln(x+y) + \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2} & \frac{x}{x+y} + \frac{x^2}{(x+y)^2} \end{bmatrix}$$

Druhé diferenciály v nulových bodech $[0,1]$, $[1,0]$, $[\frac{1}{2\sqrt{e}}, \frac{1}{2\sqrt{e}}]$ jsou

$$\begin{aligned} d^2 f(1,0,u,v) &= 2(u^2 - 2uv), \\ d^2 f(0,1,u,v) &= 2(v^2 - 2uv), \\ d^2 f(\tfrac{1}{2\sqrt{e}}, \tfrac{1}{2\sqrt{e}}, u, v) &= \tfrac{1}{4}(3u^2 + 2uv + 3v^2) \end{aligned}$$

V bodech $[1,0]$ a $[0,1]$ je druhý diferenciál indefinitní. V bodě $[\frac{1}{2\sqrt{e}}, \frac{1}{2\sqrt{e}}]$ je druhý diferenciál pozitivně definitní, takže zde funkce má lokální minimum.

Příklad 224 *Pro kladná čísla $a_1, \ldots, a_n$ má funkce*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \frac{x_i}{a_i}$$

ostré lokální minimum v bodě $x = a/e$.

Důkaz: První derivace $\partial_i f(x) = 1 + \ln x_i - \ln a_i$ jsou nulové pro $x_i = a_i/e$. Druhé derivace jsou $\partial_{ij} f(x) = 0$ pro $i \neq j$ a $\partial_{ii} f(x) = 1/x_i$. To je diagonální matice s kladnými členy, která je pozitivně definitní.

Příklad 225 (Lineární regrese) *Pro dané funkce f_1, f_2 jedné reálné proměnné hledejme jejich lineární kombinaci $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ která nejlépe vystihuje naměřená data $[x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]$.*

Uvažujme vektory

$$u_1 = [f_1(x_1), \cdots, f_1(x_n)], \quad u_2 = [f_2(x_1), \cdots, f_2(x_n)], \quad v = [y_1, \cdots, y_n]$$

Součet čtverců odchylek je funkce koeficientů a_1, a_2

$$S(a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} (a_1 f_1(x_i) + a_2 f_2(x_i) - y_i)^2$$

Parciální derivace podle a_j je

$$\begin{aligned} \partial_j S(a_1, a_2) &= \sum_{i=1}^{n} 2(a_1 f_1(x_i) + a_2 f_2(x_i) - y_i) f_j(x_i) \\ &= 2a_1(u_1 \cdot u_j) + 2a_2(u_2 \cdot u_j) - 2(v \cdot u_j) \end{aligned}$$

Pro koeficienty a_1, a_2 dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_1(u_1 \cdot u_1) + a_2(u_2 \cdot u_1) &= v \cdot u_1 \\ a_1(u_1 \cdot u_2) + a_2(u_2 \cdot u_2) &= v \cdot u_2 \end{aligned}$$

Pokud jsou vektory u_1, u_2 lineárně nezávislé, je determinant této rovnice $||u_1||^2||u_2||^2 - (u_1 \cdot u_2)^2 > 0$ kladný (Schwarzova nerovnost), takže soustava má jediné řešení. Druhé parciální derivace funkce S jsou

$$\begin{aligned} \partial_{jk} S(a_1, a_2) &= 2\sum_{i=1}^{n} f_j(x_i) f_k(x_i) = 2(u_j \cdot u_k) \\ \partial^2 S(a_1, a_2) &= 2\begin{bmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot u_2 \\ u_2 \cdot u_1 & u_2 \cdot u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ze Schwarzovy nerovnosti plyne, že druhý diferenciál je pozitivně definitní, takže v bodě $[a_1, a_2]$, který je řešením lineární soustavy, má funkce S ostré lokální minimum.

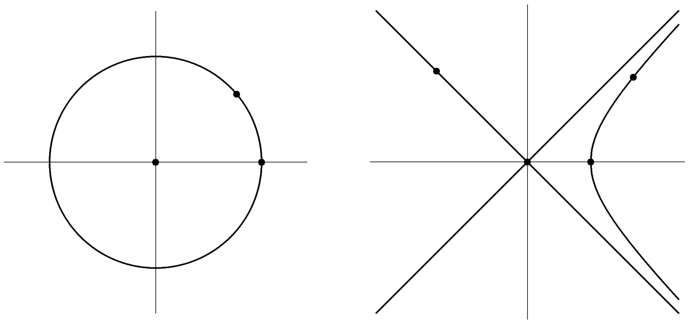
Cvičení. Najděte extrémy funkcí

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
2. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$
3. $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$
4. $f(x,y) = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - \sqrt{x^2+y^2}$
5. $f(x,y) = xy + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{3y}$
6. $f(x,y) = xy\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}}$
7. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$
8. $f(x,y.z) = xy + z(1 - x - 2y - 3z)$
9. $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$
10. $f(x,y,z) = xyz(1 - x - y - z)$

8.5 Implicitní funkce

Je-li reálná funkce $f = g^{-1}$ inverzní k funkci g, je každé $y = f(x)$ řešení rovnice $x - g(y) = 0$. Obecněji uvažujeme funkci dvou proměnných $F(x,y)$ a z rovnice $F(x,y) = 0$ se snažíme vypočítat y. To znamená, že hledáme funkci f tak, aby platilo $F(x, f(x)) = 0$. Graf funkce f je pak nulová vrstevnice $F^{-1}(0)$ funkce F, nebo její část. Říkáme, že rovnice $F(x,y) = 0$ je implicitní vyjádření závislosti y na x, zatímco funkce $y = f(x)$ tuto závislost vyjadřuje explicitně. Počet řešení rovnice $F(x, y) = 0$ většinou závisí na x. Řešení proto hledáme v lokálním tvaru. Předpokládáme, že známe jeden nulový bod funkce $F(a, b) = 0$ a hledáme funkci f, pro kterou $f(a) = b$ a $F(x, f(x)) = 0$ v nějakém okolí bodu a.

Jestliže $F(x, y) = a_1 x + a_2 y + a_3$ je lineární funkce, je řešením $y = f(x) = -(a_1 x + a_3)/a_2$, pokud ovšem $a_2 \neq 0$. To znamená, že funkce F musí na y opravdu záviset. V obecném případě je to vyjádřeno podmínkou $\partial_2 F(x, y) \neq 0$.



Obrázek 8.6: Existence implicitních funkcí

Pro funkci $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ (obr. 8.6 vlevo) je $y = f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Je-li $[a, b]$ bod kružnice, pro který $\partial_2 F(a, b) = 2b \neq 0$, existuje v okolí a jediná funkce $y = f(x)$ splňující rovnici, pro kterou $f(a) = b$. Pro bod $[1, 0]$, kde $\partial_2 F(1, 0) = 0$, taková funkce neexistuje, protože pro $x > 1$ rovnice $F(x, y) = 0$ nemá řešení. Nulová vrstevnice funkce $F(x, y) = x^2 + y^2$ sestává z jediného (nulového bodu). Zde je $\partial_2 F(x, y) = 2y = 0$, a řešení $y = f(x)$ v okolí $x = 0$ neexistuje

Pro funkci $F(x, y) = x^2 - y^2$ (obr. 8.6 vpravo) existuje v okolí každého nenulového bodu jediné řešení buď $y = x$ nebo $y = -x$. V nulovém bodě, kde je $\partial_2 F(x, y) = -2y = 0$, se však dvě vrstevnice kříží, a možná řešení jsou celkem čtyři:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = |x|, \quad f_4(x) = -|x|.$$

Pro funkci $F(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ existuje řešení $y = \sqrt{x^2 - 1}$ v okolí každého bodu mimo osu x .

Předpokládejme, že F je diferencovatelná funkce, a že také funkce f splňující $F(x, f(x)) = 0$ je diferencovatelná. Derivací této identity dostáváme $\partial_1 F(x, f(x)) + \partial_2 F(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0$ a odtud $f'(x) = -\partial_1 F(x, f(x))/\partial_2 F(x, f(x))$. Derivaci funkce f lze tedy vypočítat z parciálních derivací funkce F. Také tento vzorec předpokládá, že druhá parciální derivace F je nenulová. Ukazuje nám sklon vrstevnic funkce F.

Tvrzení 226 *Nechť $F : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce dvou proměnných (na otevřené množině). Nechť pro každé $x \in \mathbb{R}$ je množina $\{y \in \mathbb{R} : [x, y] \in \mathcal{D}(F)\}$*

interval a pro každé $[x, y] \in \mathcal{D}(F)$ je $\partial_2 F(x, y) > 0$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje nejvýše jedno $y = f(x) \in \mathbb{R}$, pro které $F(x, y) = 0$. Definiční obor funkce f je otevřená množina a f má spojitou derivaci

$$f'(x) = -\frac{\partial_1 F(x, f(x))}{\partial_2 F(x, f(x))}$$

Důkaz (obr. 8.7 vlevo): Pro pevné x je funkce $F(x)$ definovaná $F(x)(y) = F(x, y)$ rostoucí a její definiční obor je interval, takže existuje nejvýše jediné $y = f(x)$ pro které $F(x, y) = 0$. Tím je funkce f definována. Nechť $x \in \mathcal{D}(f)$, $y = f(x)$ a α je nenulové infinitesimální. Položme

$$\beta_1 = \frac{-\partial_1 F(x,y)}{\partial_2 F(x,y)}\alpha - \alpha, \quad \beta_2 = \frac{-\partial_1 F(x,y)}{\partial_2 F(x,y)}\alpha + \alpha$$

Odtud

$$\frac{F(x+\alpha, y+\beta_1)}{\sqrt{\alpha^2+\beta_1^2}} \approx \frac{\partial_1 F(x,y)\alpha + \partial_2 F(x,y)\beta_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta_1^2}} = -\frac{\partial_2 F(x,y)}{\sqrt{1+\beta_1^2/\alpha^2}}$$

Protože β_1/α je konečné, není $-\frac{\partial_2 F(x,y)}{\sqrt{1+\beta_1^2/\alpha^2}}$ infinitesimální. Protože je záporné, je $F(x+\alpha, y+\beta_1) < 0$. Podobně $F(x+\alpha, y+\beta_2) > 0$. Podle věty o mezihodnotě existuje $\beta \in (\beta_1, \beta_2)$ pro které $F(x+\alpha, y+\beta) = 0$, takže $f(x+\alpha) = y+\beta$ a přitom β je infinitesimální. Ukázali jsme tedy, že $\mathcal{D}(f)$ je otevřená a f je spojitá. Protože

$$0 = \frac{F(x+\alpha, y+\beta)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \approx \frac{\partial_1 F(x,y)\alpha + \partial_2 F(x,y)\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\partial_2 F(x,y)}{\sqrt{1+\beta^2/\alpha^2}}\left(\frac{\partial_1 F(x,y)}{\partial_2 F(x,y)} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

a protože $\partial_2 F(x,y)/\sqrt{1+\beta^2/\alpha^2}$ není infinitesimální, je

$$-\frac{\partial_1 F(x, f(x))}{\partial_2 F(x, f(x))} \approx \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f^*(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} \approx f'(x)$$

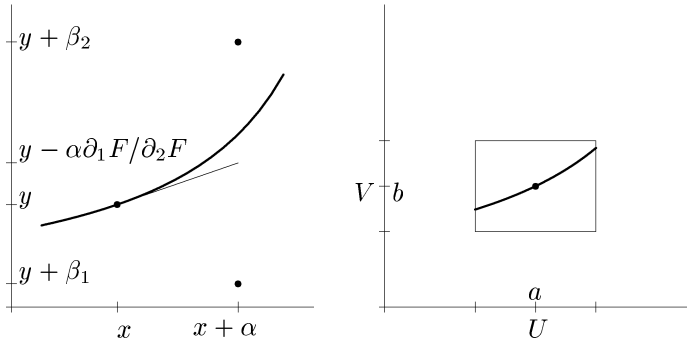
takže f je diferencovatelná. □

Má-li funkce F spojité parciální derivace druhého řádu, můžeme derivovat vzorec pro $f'(x)$ a tak získat vzorec pro druhou derivaci funkce f:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{(\partial_{11}F + \partial_{12}F \cdot f')\partial_2 F - \partial_1 F(\partial_{21}F + \partial_{22}F \cdot f')}{(\partial_2 F)^2} \\ &= -\frac{\partial_{11}F \cdot (\partial_2 F)^2 - 2\partial_{12}F \cdot \partial_1 F \cdot \partial_2 F + \partial_{22}F \cdot (\partial_1 F)^2}{(\partial_2 F)^3} \end{aligned}$$

Zde se všechny parciální derivace funkce F vyhodnocují v bodě $(x, f(x))$. Podobně lze odvodit vzorec pro třetí a vyšší derivaci funkce f. Je-li F k-diferencovatelná, je také f k-diferencovatelná.

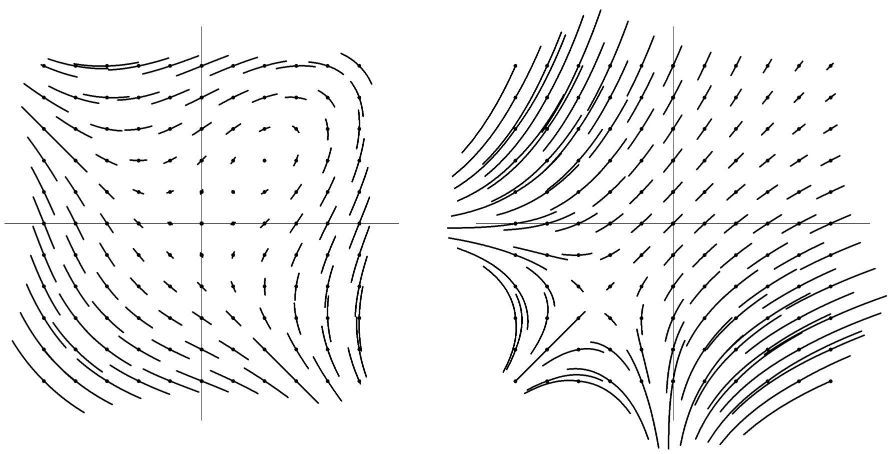
Věta o implicitní funkci má též lokální verzi, kde se hledá řešení pouze v okolí daného bodu $[a, b]$, kde $F(a, b) = 0$.



Obrázek 8.7: Implicitní funkce

Tvrzení 227 *Nechť F je funkce dvou proměnných, která je diferencovatelná v bodě $[a,b] \in \mathbb{R}_2$, $F(a,b)=0$ a $\partial_2 F(a,b) \neq 0$. Pak existují otevřené intervaly $a \in U \subseteq \mathbb{R}$, $b \in V \subseteq \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y = f(x)$, pro které $F(x,y) = 0$. Funkce $f : U \to V$ je diferencovatelná a v každém bodě $x \in U$ je $f'(x) = -\partial_1 F(x,f(x))/\partial_2 F(x,f(x))$.*

Důkaz (obr. 8.7 vpravo): Nechť $\partial_2 F(a,b) > 0$. Ze spojitosti parciálních derivací plyne, že existují otevřené intervaly $a \in U_0 \subseteq \mathbb{R}$, $b \in V \subseteq \mathbb{R}$, takové, že parciální derivace $\partial_2 F$ je na $U_0 \times V$ kladná. Podle předcházející věty existuje jediná implicitní funkce f s otevřeným definičním oborem $U = \mathcal{D}(f) \subseteq U_0$. $\square$



Obrázek 8.8: Derivace implicitních funkcí

Je-li $F(x,y)$ funkce dvou proměnných, a je-li $f(x)$ vrstevnice $F^{-1}(c)$ funkce F, je $F(x,f(x)) = c$. Pro derivaci f dostáváme nezávisle na c vždy stejnou rovnici $\partial_1 F(x,f(x)) + \partial_2 F(x,f(x))f'(x) = 0$. Alternativně tento vztah vyjádříme diferencováním rovnosti $F(x,y)=c$

$$\partial_1 F(x,y)\,dx+\partial_2 F(x,y)dy=0.$$

Pokud je v daném bodě alespoň jedna parciální derivace je nenulová, má v tomto bodě vrstevnice tečný vektor $[\partial_2 F(x,y),-\partial_1 F(x,y)]$. Opět vidíme, že vrstevnice funkce jsou kolmé na její gradient $[\partial_1 F(x,y),\partial_2 F(x,y)]$.

Descartova křivka je nulová vrstevnice funkce $F(x,y)=x^3+y^3-3xy$. Každá vrstevnice této funkce splňuje rovnici $(x^2-y)dx+(y^2-x)dy=0$ (obr. 8.8 vlevo). Pro funkci $F(x,y)=ye^{-x}-xe^{-y}$ je

$$(e^{-x}+xe^{-y})\,dy=(e^{-y}+ye^{-x})\,dx$$

Nulová vrstevnice je diagonála $y=x$. Na ose y je $F(0,y)=y$ a $\frac{dy}{dx}=e^{-y}+y$. Tato funkce má minimum v počátku, kterým prochází diagonála jako nulová vrstevnice pod úhlem $\frac{\pi}{4}$. Všechny ostatní vrstevnice prochází osou y pod větším úhlem. Podobně na ose x je $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+e^{-x}}$. Všechny nenulové vrstevnice prochází osou x pod úhlem menším než $\frac{\pi}{4}$ (obr. 8.8 vpravo).

Větu o implicitní funkci zobecníme na případ, kdy F je funkce $n+1$ proměnných. Zapisujeme ji opět $F(x,y)$, kde $x\in\mathbb{R}_n$ a $y\in\mathbb{R}$. Implicitní funkce f je nyní funkce n proměnných splňující $F(x,f(x))=0$. Podmínkou její existence je nenulovost parciální derivace F podle poslední proměnné.

Tvrzení 228 *Nechť $F:\subseteq\mathbb{R}_{n+1}\to\mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce $n+1$ proměnných, jejíž definiční obor je otevřená množina. Nechť pro každé $x\in\mathbb{R}_n$ je množina $\{y\in\mathbb{R}:[x,y]\in\mathcal{D}(F)\}$ interval a pro každé $[x,y]\in\mathcal{D}(F)$ je $\partial_{n+1}F(x,y)>0$. Pak pro každé $x\in\mathbb{R}_n$ existuje nejvýše jedno $y=f(x)\in\mathbb{R}$, pro které $F(x,y)=0$. Funkce f je diferencovatelná na otevřené množině. Její diferenciál je*

$$df(x)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial_i F(x,f(x))}{\partial_{n+1}F(x,f(x))}\cdot dx_i$$

Důkaz: Pro pevné x je funkce $F(x)$ rostoucí na intervalu, takže existuje nejvýše jediné $y=f(x)$, pro které $F(x,y)=0$. To znamená, že f je funkce. Nechť $x\in\mathcal{D}(f)$, $y=f(x)$ a $u\in\mathbb{R}^0_n$ je nenulový infinitesimální vektor. Položme

$$\beta_1=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial_i F(x,y)}{\partial_{n+1}F(x,y)}u_i-||u||,\ \ \beta_2=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial_i F(x,y)}{\partial_{n+1}F(x,y)}u_i+||u||$$

Pak

$$\frac{F(x+u,y+\beta_1)}{||[u,\beta_1]||}\ \approx\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial_i F(x,y)u_i}{||[u,\beta_1]||}+\frac{\partial_{n+1}F(x,y)\beta_1}{||[u,\beta_1]||}=-\frac{\partial_{n+1}F(x,y)\cdot||u||}{||[u,\beta_1]||}$$

Protože $\beta_1/||u||$ není nekonečné, není $||u||/||[u,\beta_1]||$ infinitesimální, takže $F(x+u, y+\beta_1) < 0$ a podobně $0 < F(x+u, y+\beta_2)$. Existuje tedy jediné infinitesimální β, pro které $F(x+u, y+\beta) = 0$, takže $f(x+u) = y+\beta$. Ukázali jsme, že $\mathcal{D}(f)$ je otevřená a f je spojitá. Protože $F(x+u, y+\beta) = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{F(x+u,y+\beta)}{||[u,\beta]||} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_i F(x,y) u_i}{||[u,\beta]||} + \frac{\partial_{n+1} F(x,y)\beta}{||[u,\beta]||} \\ &= \partial_{n+1} F(x,y) \cdot \frac{||u||}{||[u,\beta]||} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_i F(x,y)}{\partial_{n+1} F(x,y)} \cdot \frac{u_1}{||u||} + \frac{\beta}{||u||} \right) \end{aligned}$$

Protože $\frac{[u,\beta]}{||u||}$ je konečné, není $\frac{||u||}{||[u,\beta]||}$ infinitesimální, takže

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_i F(x,y)}{\partial_{n+1} F(x,y)} \cdot \frac{u_i}{||u||} \approx \frac{\beta}{||u||} \approx \frac{f(x+u) - f(x)}{||u||}$$

To znamená, že funkce f má v bodě x diferenciál. Protože

$$\partial_i f(x) = -\frac{\partial_i F(x, f(x))}{\partial_{n+1} F(x, f(x))}$$

je f diferencovatelná □

Tvrzení 229 *Nechť F je funkce $n+1$ proměnných, která má v okolí bodu $[a,b] \in \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1$ spojité parciální derivace, $F(a,b) = 0$ a $\partial_{n+1} F(a,b) \neq 0$. Pak existují otevřené množiny $a \in U \subseteq \mathbb{R}_n$ a $b \in V \subseteq \mathbb{R}_1$, takové že pro každé $x \in U$ existuje jediné $y = f(x) \in V$ pro které $F(x,y) = 0$. Funkce f je diferencovatelná a její diferenciál je*

$$df(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_i F(x,y)}{\partial_{n+1} F(x,y)} \cdot dx_i$$

Důkaz: Ze spojitosti parciálních derivací plyne, že existuje otevřená množina $U_0 \subseteq \mathbb{R}_n$, a otevřený interval $b \in V \subseteq \mathbb{R}_1$ na které má parciální derivace $\partial_{n+1} F$ stále stejné znaménko. Podle předcházející věty existuje jediná implicitní funkce f s otevřeným definičním oborem $U = \mathcal{D}(f) \subseteq U_0$. □

8.6 Soustavy implicitních funkcí

V dalším zobecnění věty o implicitní funkci se jedná o řešení dvou rovnic o dvou neznámých. Uvažujme zobrazení $F : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_2$ a řešme soustavu rovnic

$$F_1(x, y_1, y_2) = 0, \quad F_2(x, y_1, y_2) = 0$$

pro neznámé y_1, y_2. Je-li $\partial_3 F_2 \neq 0$, existuje funkce $y_2 = g(x, y_1)$, pro kterou $F_2(x, y_1, g(x, y_1)) = 0$. Pro funkci G definovanou $G(x, y_1) = F_1(x, y_1, g(x, y_1))$

najdeme implicitní funkci $y_1 = f_1(x)$, pro kterou $G(x, f_1(x)) = 0$. Položíme-li $f_2(x) = g(x, f_1(x))$, je $F(x, f(x)) = 0$, tj.

$$F_1(x, f_1(x), f_2(x)) = 0, \quad F_2(x, f_1(x), f_2(x)) = 0$$

Podmínka existence obou implicitních funkcí je $\partial_3 F_2 \neq 0$ a

$$\begin{aligned} 0 &\neq \partial_2 G = \partial_2 F_1 + \partial_3 F_1 \cdot \partial_2 g = \partial_2 F_1 - \partial_3 F_1 \cdot \partial_2 F_2 / \partial_3 F_2 \\ 0 &\neq \det \begin{bmatrix} \partial_2 F_1 & \partial_3 F_1 \\ \partial_2 F_2 & \partial_3 F_2 \end{bmatrix} / \partial_3 F_2 \end{aligned}$$

Pro řešení dané soustavy rovnic ale stačí již nenulovost determinantu, tj. regularita matice $\partial_{i+1} F_j$, kde $i, j = 1, 2$. Je-li totiž $\partial_3 F_2 = 0$, řešíme rovnici nejprve podle y_1 a potom teprve podle y_2. Je-li determinant nenulový, je vždy buď $\partial_3 F_2 \neq 0$ nebo $\partial_2 F_2 \neq 0$. Derivace funkcí f_1 a f_2 vypočítáme ze soustavy lineárních rovnic, kterou obdržíme derivováním vztahu $F(x, f(x)) = 0$

$$\begin{aligned} \partial_2 F_1(x, f(x)) \cdot f_1'(x) + \partial_3 F_1(x, f(x)) \cdot f_2'(x) &= -\partial_1 F_1(x, f(x)) \\ \partial_2 F_2(x, f(x)) \cdot f_1'(x) + \partial_3 F_2(x, f(x)) \cdot f_2'(x) &= -\partial_1 F_2(x, f(x)) \end{aligned}$$

maticově

$$\begin{bmatrix} \partial_2 F_1(x, f(x)) & \partial_3 F_1(x, f(x)) \\ \partial_2 F_2(x, f(x)) & \partial_3 F_2(x, f(x)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(x, f(x)) \\ \partial_1 F_2(x, f(x)) \end{bmatrix}$$

Protože matice soustavy je regulární, má tato soustava jediné řešení

$$\begin{bmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial_2 F_1(x, f(x)) & \partial_3 F_1(x, f(x)) \\ \partial_2 F_2(x, f(x)) & \partial_3 F_2(x, f(x)) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(x, f(x)) \\ \partial_1 F_2(x, f(x)) \end{bmatrix}$$

Podobně je-li $F : \subseteq \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}_2$, má soustava

$$F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

řešení $y_1 = f_1(x_1, x_2)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2)$ pokud je regulární matice $\partial_{i+2} F_j$, kde $i, j = 1, 2$. Odtud určíme parciální derivace funkcí f_1, f_2

$$\begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial_3 F_1 & \partial_4 F_1 \\ \partial_3 F_2 & \partial_4 F_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \partial_1 F_1 & \partial_2 F_1 \\ \partial_1 F_2 & \partial_2 F_2 \end{bmatrix}$$

Je-li $F : \subseteq \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}_3$, má soustava tří rovnic

$$F_1(x, y_1, y_2, y_3) = 0, \quad F_1(x, y_1, y_2, y_3) = 0, \quad F_1(x, y_1, y_2, y_3) = 0$$

řešení $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $y_3 = f_3(x)$, pokud je regulární matice $\partial_{i+1} F_j$, kde $i, j = 1, 2, 3$. Derivací rovností $F_i(x, f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = 0$ pro $i = 1, 2, 3$ dostáváme

$$\partial_2 F_i \cdot f_1' + \partial_3 F_i \cdot f_2' + \partial_4 F_i \cdot f_3' = -\partial_1 F_i$$

Odtud určíme derivace funkcí f_i

$$\begin{bmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \partial_2 F_1 & \partial_3 F_1 & \partial_4 F_1 \\ \partial_2 F_2 & \partial_3 F_2 & \partial_4 F_2 \\ \partial_2 F_3 & \partial_3 F_3 & \partial_4 F_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \partial_1 F_1 \\ \partial_1 F_2 \\ \partial_1 F_3 \end{bmatrix}$$

V obecném případě máme zobrazení $F : \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_m$ a hledáme zobrazení $f : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$, které pro každé $x \in \mathbb{R}_n$ splňuje $F(x, f(x)) = 0$. To je m rovnic

$$F_k(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0, \quad k = 1, \ldots, m$$

pro m neznámých $f_1(x), \ldots f_m(x)$. Derivujeme-li k-tou rovnici podle x_i, dostaneme

$$\partial_i F_k(x, f(x)) + \sum_{j=1}^{m} \partial_{n+j} F_k(x, f(x)) \cdot \partial_i f_j(x) = 0, \quad k = 1, \ldots, m$$

Pro každé $i \leq n$ to je soustava m rovnic pro m neznámých $\partial_i f_1(x), \ldots, \partial_i f_m(x)$. Maticově

$$\begin{bmatrix} \partial_{n+1} F_1, \ldots, \partial_{n+m} F_1 \\ \vdots \\ \partial_{n+1} F_m, \ldots, \partial_{n+m} F_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_1 f_1, \ldots, \partial_n f_1 \\ \vdots \\ \partial_1 f_m, \ldots, \partial_n f_m \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \partial_1 F_1, \ldots, \partial_n F_1 \\ \vdots \\ \partial_1 F_m, \ldots, \partial_n F_m \end{bmatrix}$$

Pro zobrazení

$$\begin{array}{rlrl} F(x): & \mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_m & F(x)(y) = & F(x, y) \\ F(., y): & \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m & F(., y)(x) = & F(x, y) \end{array}$$

to znamená

$$\partial F(x)(f(x)) \cdot \partial f(x) = -\partial F(., f(x))(x)$$

Je-li matice $\partial F(x)(f(x))$ regulární, lze tuto rovnost zleva vynásobit maticí k ní inverzní a dostaneme $\partial f(x) = -\left(\partial F(x)(f(x))\right)^{-1} \cdot \partial F(., f(x))(x)$.

Věta 230 *Nechť zobrazení $F : \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_m$ je diferencovatelné v bodě $[a, b] \in \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_m$ a nechť matice $\partial F(a)(b)$ (typu $m \times m$) je regulární. Pak existují otevřené množiny $a \in U \subseteq \mathbb{R}_n$ a $b \in V \subseteq \mathbb{R}_m$ takové, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y = f(x)$ pro které $F(x, f(x)) = 0$. Zobrazení $f : U \to V$ je diferencovatelné a v každém $x \in U$ platí*

$$\partial f(x) = -\Big(\partial F(x)(f(x))\Big)^{-1} \cdot \partial F(., f(x))(x)$$

Důkaz: Větu dokážeme nejprve pro případ, že matice parciálních derivací $\partial F(a)(b)$ je jednotková, tj. $\partial_{n+i} F_j(a, b) = \delta_{ij}$. Větu jsme již dokázali pro $m = 1$ (tvrzení 229). Předpokládejme, že věta platí pro $m - 1 \geq 1$ a dokažme, že platí pro m. Je tedy $F : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_m$, $a \in \mathbb{R}_n$, $b \in \mathbb{R}_{m-1}$, $c \in \mathbb{R}_1$, $F(a, b, c) = 0$. Protože $\partial_{n+m} F_m(a, b, c) = 1$, existují otevřené množiny $a \in U_0 \subseteq \mathbb{R}_n$, $b \in V_0 \subseteq R_{m-1}$ a

$c \in W_0 \subseteq \mathbb{R}_1$ takové, že pro každé $[x, y] \in U_0 \times V_0$ existuje jediné $z = g(x, y)$, pro které $F_m(x, y, g(x, y)) = 0$ a g je diferencovatelné. Pro $i = 1, \cdots, m-1$ je

$$\begin{aligned} \partial_{n+i} F_m(x, y, g(x, y)) + \partial_{n+m} F_m(x, y, g(x, y)) \cdot \partial_{n+i} g(x, y) &= 0 \\ \partial_{n+i} F_m(a, b, c) + \partial_{n+m} F_m(a, b, c) \cdot \partial_{n+i} g(a, b) &= 0 \end{aligned}$$

Protože $\partial_{n+i} F_m(a, b, c) = 0$, je $\partial_{n+i} g(a, b) = 0$. Pro $[x, y] \in U_0 \times V_0$ položme

$$G_j(x, y) = F_j(x, y, g(x, y)), \ \ j = 1, \ldots, m-1.$$

Pak

$$\begin{aligned} \partial_{n+i} G_j(x, y) &= \partial_{n+i} F_j(x, y, g(x, y)) + \partial_{n+m} F_j(x, y, g(x, y)) \partial_{n+i} g(x, y) \\ \partial_{n+i} G_j(a, b) &= \partial_{n+i} F_j(a, b, c) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Podle indukčního předpokladu věta platí pro zobrazení $G : _{\subseteq}\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_{m-1} \to \mathbb{R}_{m-1}$, takže existují otevřené množiny $a \in U \subseteq U_0$, $b \in V_1 \subseteq V_0$ takové, že pro každé $x \in U$ existuje jediné $y = h(x) \in V_1$, pro které $G(x, h(x)) = 0$ a h je diferencovatelné. Položme $V = V_1 \times W_0 \subseteq \mathbb{R}_m$. Pak pro každé $x \in U$ existuje jediné

$$[y, z] \in V = [h(x), g(x, h(x))] = f(x) \in V$$

pro které $F_j(x, f(x)) = G_j(x, h(x)) = 0$ pro $j < m$ a $F_m(x, f(x)) = 0$. Je tedy $F(x, f(x)) = 0$ a f je diferencovatelné. Tím je věta dokázána pro případ kdy $\partial F(a)(b)$ je jednotková matice. V obecném případě, kdy matice $\partial F(a)(b)$ je regulární ale ne nutně jednotková, uvažujme zobrazení

$$H(x) = (\partial F(a)(b))^{-1} \cdot F(x).$$

Pak $H(a, b) = 0$ a H má v $[a, b]$ jednotkovou matici parciálních derivací. Existují tedy otevřené množiny $a \in U \subseteq \mathbb{R}_n$ a $b \in V \subseteq \mathbb{R}_m$ takové, že pro každé $x \in U$ existuje jediné $y = f(x) \in V$ pro které $H(x, f(x)) = \mathbf{0}$ a tedy $F(x, f(x)) = F(a)(b) \cdot H(x, f(x)) = \mathbf{0}$.

Z věty o implicitním zobrazení plyne, že vrstevnice $F^{-1}(c)$ můžeme parametrizovat, vyjádřit je jako obrazy diferencovatelných zobrazení. Připomeňme, že matice A typu $n \times m$ je regulární, má-li maximální možnou hodnost $\min(m, n)$.

Definice 231 *Zobrazení $F : _{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ je regulární v bodě $x \in \mathcal{D}(f)$, má-li v x diferenciál s regulárním Jacobiánem $\partial f(x)$. Zobrazení F je regulární, je-li regulární v každém bodě svého definičního oboru.*

Cesta $g : _{\subseteq}\mathbb{R} \to \mathbb{R}_n$ je regulární, jestliže pro každé $t \in \mathcal{D}(g)$ je vektor $[g_1'(t), \ldots, g_n'(t)]$ nenulový. Funkce $f : _{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je regulární, má-li v každém bodě nenulový gradient. Geometrická spirála $g(t) = [e^t \cos t, e^t \sin t]$ je regulární v každém bodě. Cykloida $f(t) = [t - \sin t, 1 - \cos t]$ je regulární v každém bodě $t \neq 2k\pi$. Funkce $f(x, y) = xy$ je regulární v každém bodě kromě počátku. Funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 + x + y$ je regulární v každém bodě.

Je-li funkce $F(x,y)$ v bodě $[a,b]$ regulární a $F(a,b)=0$, lze vrstevnici $F^{-1}(0)$ v okolí bodu $[a,b]$ vyjádřit jako křivku. Buď je $\partial_2 F(a,b)\neq 0$ a pak existuje funkce $y=f(x)$ pro kterou $F(x,f(x))=0$ nebo $\partial_1 F(a,b)\neq 0$ a pak existuje funkce $x=g(y)$, pro kterou $F(g(y),y)=0$. Obecný případ vyjadřuje následující věta.

Věta 232 (regulární parametrizace) *Nechť $F:\mathbb{R}_{n+m}\to\mathbb{R}_m$ je regulární zobrazení, $c\in\mathcal{D}(F)$ a $F(c)=\mathbf{0}$. Pak existuje otevřená množina $c\in W\subseteq\mathcal{D}(F)$, a prosté regulární zobrazení $g:\mathbb{R}_n\to\mathbb{R}_{n+m}$ na otevřené množině, pro které $F\circ g=\mathbf{0}$, $\mathcal{R}(g)=W\cap F^{-1}(\mathbf{0})$.*

Důkaz: Protože $\partial F(c)$ je regulární, alespoň m jejích sloupců je lineárně nezávislých. Předpokládejme, že jsou to sloupce $n+1,\ldots,n+m$. Položme $c=[a,b]$. Podle věty o implicitní funkci existují otevřené množiny $a\in U$, $b\in V$ a implicitní funkce $f:U\to V$. Pro funkci $g=[\delta,f]:U\to U\times V=W$ je $F\circ g=\mathbf{0}$. Protože pro každé $x\in U$ existuje jediné $y\in V$ pro které $[x,y]\in W$, je $\mathcal{R}(g)=\mathcal{D}(F)\cap F^{-1}(\mathbf{0})$. Protože $\partial g(.,f(a))(a)$ je jednotková matice, je g regulární zobrazení v a, takže je regulární i v nějakém okolí a.

Věta 233 (Inverzní zobrazení) *Nechť zobrazení $g:\,_{\subseteq}\mathbb{R}_n\to\mathbb{R}_n$ je regulární v bodě $b\in\mathcal{D}(g)$. Pak existuje otevřená množina $b\in V\subseteq\mathcal{D}(g)$, na které je g prostá, $U=g(V)$ je otevřená a g zúžená na V má inverzní funkci f, která má v každém $x\in U$ diferenciál*

$$df(x)=\Big(dg(f(x))\Big)^{-1}.$$

Důkaz: Položme $a=g(b)$ a pro $x\in\mathbb{R}_n$, $y\in\mathcal{D}(g)$ $F(x,y)=g(y)-x$. Pak je $F(a,b)=g(b)-a=\mathbf{0}$, $\partial F(a)(b)=\partial g(b)$ je regulární, takže existují otevřené množiny $a\in U\subseteq\mathbb{R}_n$ a $b\in V_0\subseteq\mathbb{R}_n$ takové, že pro každé $x\in U$ existuje jediné $y=f(x)\in V$, pro které $F(x,y)=\mathbf{0}$. Odtud $g(y)=x$, tedy $g(f(x))=x$ a f je diferencovatelná. Protože g je spojitá, je množina $V=g^{-1}(U)=\{y\in\mathbb{R}_n : g(y)\in U\}$ otevřená. Je-li $y\in V$, pak pro $g(y)\in U$ existuje jediné $y_0=f(g(y))$ pro které $g(y_0)=g(y)$, takže $y=y_0$. Pro každé $y\in V$ je tedy $f(g(y))=y$. Protože $dg(f(x))\circ df(x)$ je jednotková matice, je $df(x)=(dg(f(x)))^{-1}$.

Věta 234 *Nechť $g:\,_{\subseteq}\mathbb{R}_n\to\mathbb{R}_n$ je prosté regulární zobrazení. Pak $\mathcal{R}(g)$ je otevřená, a inverzní funkce f má v každém bodě $x\in\mathcal{R}(g)$ diferenciál $df(x)=(dg(f(x)))^{-1}$.*

Důkaz: Je-li g prostá, má inverzní funkci f. Je-li $a\in\mathcal{R}(f)$, pak inverzní funkce existuje na okolí a, takže $a\in\mathrm{int}\mathcal{R}(f)$. □

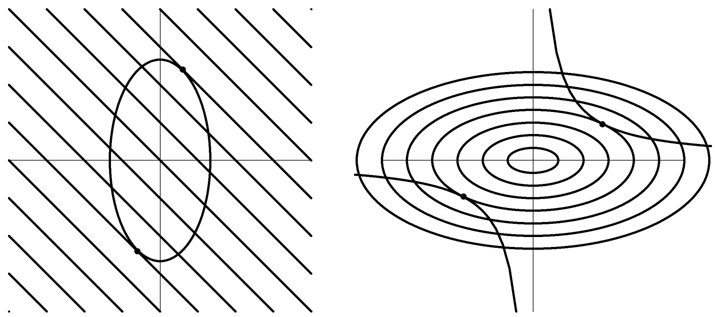
Pro kvadratickou rovinnou transformaci $g(x,y)=[x|x|,y|y|]$ je $\det\partial g(x,y)=|xy|$, takže $g(x,y)$ je regulární v každém bodě mimo osy x a y a má zde inverzní diferencovatelnou transformaci $f(x,y)=g^{-1}(x,y)=[\sqrt{|x|}\cdot\mathrm{sgn}(x),\sqrt{|y|}\cdot\mathrm{sgn}(y)]$, jejíž diferenciál je

$$df(x,y,u,v)=\frac{u\cdot\mathrm{sgn}(x)}{2\sqrt{|x|}}+\frac{v\cdot\mathrm{sgn}(y)}{2\sqrt{|y|}}$$

Pro polární transformace $f(x,y)=[x\cos y,x\sin y]$ je $\det\partial f(x,y)=x$, takže je regulární pro $x\neq 0$.

8.7 Vázané extrémy

Lokální extrémy diferencovatelné funkce $f : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_1$ hledáme ve vnitřních bodech jejího definičního oboru podle kriteria nulového diferenciálu. Funkce však může mít také lokální extrémy v hraničních bodech svého definičního oboru, tak jako reálné funkce na uzavřeném intervalu. Hranice definičního oboru je často vymezena křivkou v dvourozměrném prostoru nebo plochou v třírozměrném prostoru, která je dána jako vrstevnice $g^{-1}(0)$ nějaké funkce g. Uvažujme funkce dvou proměnných $f(x,y)$, $g(x,y)$, jejichž vrstevnice jsou hladké křivky. Má-li f na $g^{-1}(0)$ lokální extrém v bodě $[a,b]$, musí být obě vrstevnice v tomto bodě navzájem tečné. Protínají-li se totiž pod nenulovým úhlem, protíná $g^{-1}(0)$ v okolí daného bodu vrstevnice f jak s menší tak s větší hodnotou. To ekvivalentně znamená, že $\operatorname{grad} g$ musí mít stejný směr jako $\operatorname{grad} f$.



Obrázek 8.9: Vázané extrémy

Hledejme extrémy funkce $f(x,y) = x + y$ na elipse s poloosami 1 a 2 tj. na nulové vrstevnici funkce $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4$ (obr. 8.9 vlevo). Dosadíme-li do f $y = \pm 2\sqrt{1-x^2}$, znamená to najít lokální extrémy funkce $h(x) = x + 2\sqrt{1-x^2}$ (případně $h(x) = x - 2\sqrt{1-x^2}$). Derivací dostaneme podmínku $h'(x) = 1 - 2x/\sqrt{1-x^2}$ a odtud $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y = \frac{4}{\sqrt{5}}$. V tomto bodě je $\partial g(x,y) = [8x, 2y] = [\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}}]$ a $\partial f(x,y) = [x,y] = [1,1]$, takže $\partial g(x,y)$ je násobkem $\partial f(x,y)$.

Extrém funkce $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ na hyperbole $g(x,y) = xy - 1 = 0$ hledáme tak, že vypočteme $y = 1/x$ z vazebné podmínky a hledáme extrém funkce $h(x) = x^2 + 4/x^2$. Z rovnice $0 = h'(x) = 2x - 8/x^3$ dostáváme $x = \pm\sqrt{2}$, $y = \pm\sqrt{2}/2$. V těchto bodech je $\partial g = [y,x] = [\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}]$ a $\partial f = [2x, 8y] = [\pm 2\sqrt{2}/2, \pm 4\sqrt{2}]$ (obr. 8.9 vpravo).

Definice 235 *Funkce $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ má lokální minimum na množině $M \subseteq \mathcal{D}(f)$ v bodě $x \in M$, jestliže pro každé $y \in M^*$ pro které $y \approx x$ je $f(y) \geq f(x)$. Podobně pro další typy lokálních extrémů.*

Tvrzení 236 *Nechť diferencovatelná funkce $f(x,y)$ má lokální extrém na množině $g^{-1}(0)$ v bodě $[a,b]$ nechť g je v $[a,b]$ regulární. Pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, takové, že*

$$[\partial_1 f(a,b), \partial_2 f(a,b)] = \lambda[\partial_1 g(a,b), \partial_2 g(a,b)]$$

Důkaz: Podle předpokladu je vektor $[\partial_1 g(a,b), \partial_2 g(a,b)\rangle$ nenulový, takže alespoň jedna jeho složka je nenulová. Předpokládejme, že $\partial_2 g(a,b) \neq 0$. Pak existuje implicitní funkce $y = h(x)$, pro kterou $g(x,h(x)) = 0$, $h(a) = b$ a $h'(x) = -\frac{\partial_1 g(x,h(x))}{\partial_2 g(x,h(x))}$. Jestliže f má lokální extrém na $g^{-1}(0)$ v $[a,b]$, je pro $F(x) = f(x,h(x))$,

$$\begin{aligned} 0 &= F'(x) = \partial_1 f(x,h(x)) + \partial_2 f(x,h(x))h'(x) \\ &= \partial_1 f(x,h(x)) + \partial_2 f(x,h(x)) \frac{-\partial_1 g(x,h(x))}{\partial_2 g(x,h(x))} \\ &= \det \left[\begin{array}{cc} \partial_1 f(x,h(x)) & \partial_2 f(x,h(x)) \\ \partial_1 g(x,h(x)) & \partial_2 g(x,h(x)) \end{array} \right] \Big/ \partial_2 g(x,h(x)) \end{aligned}$$

Řádky této matice jsou tedy lineárně závislé, tj. existují c_1, c_2 z nichž je alespoň jedno nenulové tak, že $c_1 \partial_i f(a,b) + c_2 \partial_i g(a,b) = 0$ pro $i = 1,2$. Je-li $c_1 = 0$ je také $c_2 = 0$, protože $\operatorname{grad} g(a,b)$ je nenulový. To znamená, že $c_1 \neq 0$, takže $\lambda = -c_2/c_1$. □

Uvažujme nyní funkce tří proměnných $f, g : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$. Má- li f lokální extrém na ploše $g^{-1}(0)$ v bodě b, pak plochy $g^{-1}(0)$ a $f^{-1}(f(b))$ musí mít stejnou tečnou rovinu. To znamená opět, že $\operatorname{grad} f$ je násobkem $\operatorname{grad} g$. Nakonec předpokládejme, že $g : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_2$. Je-li $g(b) = \mathbf{o}$ a je-li g regulární v bodě b, je $g^{-1}(\mathbf{o})$ v okolí bodu b křivka. Funkce $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$ má na $g^{-1}(\mathbf{o})$ lokální extrém v bodě b, jestliže tečný vektor $g^{-1}(\mathbf{o})$ je v tečné rovině plochy $f^{-1}(f(b))$. Označme $N_f(b)$ lineární podprostor $\mathbb{R}_3$ vytvořený normálou ke grafu f v bodě b a $T_b(f)$ tečný podprostor grafu v bodě f.

$$N_f(b) = \mathcal{L}[\partial_1 f(b), \partial_2 f(b), \partial_3 f(b)]; \ \ T_f(b) = \{u \in \mathbb{R}_3 : \ df(b,u) = 0\}$$

Tečný prostor $T_f(b) = N_f(b)^\perp$ je ortogonální doplněk normálového prostoru a naopak $N_f(b) = T_f(b)^\perp$. Pro zobrazení $g = [g_1, g_2] : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_2$ je

$$T_g(b) = T_{g_1}(b) \cap T_{g_2}(b), \ \ N_g(b) = N_{g_1}(b) \oplus N_{g_2}(b)$$

Podmínka lokálního extrému $T_g(b) \subseteq T_f(b)$ je tedy ekvivalentní

$$N_f(b) \subseteq N_g(b) = N_{g_1}(b) \oplus N_{g_2}(b)$$

To znamená, že gradient f v bodě b je lineární kombinací gradientů g_i v bodě b.

Tvrzení 237 *Nechť $n > m$, $g : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ je diferencovatelné zobrazení, $b \in \mathcal{D}(g)$, $g(b) = \mathbf{o}$ a g je regulární v b. Jestliže diferencovatelná funkce $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_1$ má lokální extrém na množině $g^{-1}(\mathbf{o})$ v bodě b, pak vektor* $\operatorname{grad} f(b)$ *je lineární kombinace gradientů* $\operatorname{grad} g_i(b)$, *tj. existují $\lambda_1, \dots \lambda_m$, pro která*

$$\partial_i f(b) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \partial_i g_j(b), \ \ i = 1, \dots, n$$

Důkaz: Podle věty 232 existuje parametrizace $h : \mathbb{R}_{n-m} \to \mathbb{R}_n$ množiny $g^{-1}(\mathbf{o})$ v nějakém okolí bodu b, tj. $g \circ h = \mathbf{o}$. Je-li $h(a) = b$, je $\partial h(a)$ regulární matice a $\partial g(b) \cdot \partial h(a) = \mathbf{o}$, Má-li f lokální extrém na $g^{-1}(\mathbf{o})$ v bodě b, má $f \circ h$ lokální extrém v bodě a, takže $\partial f(b) \cdot \partial h(a) = \mathbf{o}$.

$$\begin{bmatrix} \partial_1 g_1(b) & \dots & \partial_n g_1(b) \\ & \vdots & \\ \partial_1 g_m(b) & \dots & \partial_n g_m(b) \\ \partial_1 f(b) & \dots & \partial_n f(b) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_1 h_1(a) & \dots & \partial_{n-m} h_1(a) \\ & \vdots & \\ \partial_1 h_n(a) & \dots & \partial_n h_{n-m}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Protože matice $\partial h(b)$ má hodnost $n - m$ a matice $\partial g(b)$ má hodnost m, je $\partial f(b)$ lineární kombinace řádků matice $\partial g(b)$. □

Úloha najít lokální extrém funkce f na g^{-1} znamená najít $x \in \mathbb{R}_n$ a $\lambda \in \mathbb{R}_m$ tak že platí

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \partial_i g_j(x) &= \partial_i f(x), \; i = 1, \dots, n \\ g_j(x) &= c_j, \; j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

To je $n + m$ rovnic pro $n + m$ neznámých $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Koeficienty λ_i se nazývají Lagrangeovy multiplikátory.

Příklad 238 *Nechť $a_1, \dots, a_n$ jsou kladná čísla, jejichž součet je jedna. Funkce n proměnných*

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \ln \frac{x_i}{a_i}$$

má na rovině $x_1 + \dots + x_n = 1$ lokální extrém v bodě $x = a$.

Vazebná funkce je $g(x) = x_1 + \cdots x_n - 1$. Podmínka extrému je $\partial_i f(x) = \lambda \partial_i g(x)$, tedy $-\ln \frac{x_i}{p_i} = \lambda$. Odtud $x_i = e^{-\lambda-1} a_i$. Sečteme-li tyto rovnosti, dostaneme $\lambda = -1$ a tedy $x_i = a_i$.

Cvičení Najděte lokální extrémy f na množině $g^{-1}(\mathbf{o})$.

1. $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$, $\quad g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 25$
2. $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, $\quad g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$
3. $f(x,y,z) = xy + yz$, $\quad g(x,y,z) = [x^2 + y^2 - 2, y + z - 2]$
4. $f(x,y,z) = x + y + z^2$ $\quad g(x,y,z) = [x + y + z - 1, x^2 - y^2 - 1]$
5. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ $\quad g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$