Kapitola 9

INTEGRACE

9.1 Integrály závislé na parametru

Ve vzorci pro objem tělesa $V = \int_a^b P(x)\,dx$ můžeme plochu $P(x)$ opět určit integrací. Uvažujme těleso umístěné tak, že jeho první souřadnice jsou v mezích $\langle a, b\rangle$ a jeho druhé souřadnice jsou v mezích $\langle c, d\rangle$. Uvažujme přímku rovnoběžnou s osou z vedenou bodem se souřadnicemi $[x, y]$ a označme $L(x, y)$ celkovou délku jejího průniku s uvažovaným tělesem. Pak plocha řezu rovinou kolmou na osu x je $P(x) = \int_c^d L(x, y)\,dy$, takže celkový objem je

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d L(x, y)\,dy \right) dx.$$

Vzorec platí za předpokladu, že pro každé pevné x je $L(x, y)$ spojitá funkce y, a že také $P(x)$ je spojitá funkce. K tomu stačí, aby L byla spojitá funkce.

Tvrzení 239 *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}_n$ je kompaktní množina a $f : A \times \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce $n + 1$ proměnných. Pro $x \in A$ položme*

$$g(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$$

Pak $g : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pro každé $x \in A^*$ a každé infinitesimální dělení $(y_i)_{i=0}^p$ intervalu $\langle c, d\rangle$ je

$$g(x) \approx \sum_{i=0}^{p-1} f(x, y_i)(y_{i+1} - y_i)$$

Důkaz: Pro $x_1, x_2 \in A$ existuje podle věty o střední hodnotě $y \in \langle c, d\rangle$ pro které

$$g(x_2) - g(x_1) = \int_c^d (f(x_2, y) - f(x_1, y))\,dy = (d - c)(f(x_2, y) - f(x_1, y))$$

Podle principu expanze pro každá nestandardní $x_2 \approx x_1$ existuje $y \in \langle c,d\rangle^*$, pro které

$$g(x_2) - g(x_1) = (d-c)(f(x_2,y) - f(x_1,y))$$

Protože spojitá funkce na kompaktní množině, je stejnoměrně spojitá, je $f(x_2,y) \approx f(x_1,y)$ a tedy $g(x_2) \approx g(x_1)$, takže g je (stejnoměrně) spojitá. Pro každé $x \in A^*$ a každé dělení $(y_i)_{i=0}^p$ intervalu $\langle c,d\rangle$ existuje $x_0 \in A$ pro které $x \approx x_0$, takže

$$g(x) \quad \approx \quad g(x_0) \approx \sum_{j=1}^{p} f(x_0,y_i)(y_{i+1}-y_i) \approx \sum_{j=1}^{p} f(x,y_i)(y_{i+1}-y_i)$$

Tvrzení 240 *Nechť $f, \partial_1 f : \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \to \mathbb{R}$ jsou spojité. Pak funkce $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ má spojitou derivaci $g'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x,y)\,dy$.*

Důkaz: Funkce $h(x) = \int_c^d \partial_1 f(x,y)\,dy$ je spojitá. Pro každé $x_1 \neq x_2$ z intervalu $\langle a,b\rangle$ existuje $y \in \langle c,d\rangle$ pro které

$$\begin{aligned} \frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1} - h(x_1) \quad &= \quad \int_c^d \left(\frac{f(x_2,y)-f(x_1,y)}{x_2-x_1} - \partial_1 f(x_1,y) \right) dy \\ &= \quad \frac{1}{d-c} \left(\frac{f(x_2,y)-f(x_1,y)}{x_2-x_1} - \partial_1 f(x_1,y) \right) \end{aligned}$$

Podle principu expanze to platí i pro $x_1 \in \langle a,b\rangle$, $x_2 \in \langle a,b\rangle^*$, $x_2 \approx x_1$, takže $g'(x_1) = h(x_1)$. □

Věta 241 (Fubiniova věta) *Nechť f je spojitá funkce na obdélníku $A = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Pak*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_A f(x,y)\,dP$$

Tuto společnou hodnotu nazýváme dvojným integrálem funkce f na obdélníku A.

Důkaz: Položme $f_2(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, $f_1(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$. Pro $p \in \mathbb{N}^\infty$ uvažujme intervalová dělení $x_i = a + i(b-a)/p$, $y_i = c + i(d-c)/p$. Podle tvrzení 239

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx \quad &\approx \quad \sum_{i=0}^{p-1} f_2(x_i)(x_{i+1}-x_i) \\ &\approx \quad \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{p-1} f(x_i,y_j)(y_{i+1}-y_i)(x_{i+1}-x_i) \\ &\approx \quad \sum_{j=0}^{p-1} f_1(y_i)(y_{i+1}-y_i) \approx \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy \end{aligned}$$

Podobně můžeme počítat dvojné integrály na složitějších rovinných útvarech. Nechť $h_1, h_2 : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a $h_1(x) \leq h_2(x)$. Uvažujme množinu (obr. 9.8 vpravo)

$$A = \{[x, y] : a \leq x \leq b,\ \ h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

a položme $F(x, t) = f(x, h_1(x) + t(h_2(x) - h_1(x)))$. Je-li f na A spojitá, je funkce

$$g(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y)\, dy = \int_0^1 F(x, t)(h_2(x) - h_1(x))\, dt$$

spojitá, a integrál f na množině A tedy definujeme

$$\int_A f(x, y)\, dP = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Podobně pro spojitou funkci $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ na třírozměrném intervalu $A = \langle a, b\rangle = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \langle a_3, b_3\rangle$ definujeme prostorový integrál

$$\int_A f\, dV = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1$$

V této integraci nezáleží na pořadí, protože pro každá infinitesimální dělení $(x_i)_{i=0}^p$, $(y_j)_{j=0}^q$ a $(z_k)_{k=0}^r$ je

$$\int_A f\, dV \approx \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{r-1} f(x_i, y_j, z_k)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k)$$

Například funkce $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ je nulová na osách x a y a na přímce $x + y = 1$, tj na obvodu trojúhelníka s vrcholy $[0, 0]$, $[0, 1]$ a $[1, 0]$. Objem tělesa mezi rovinou xy a grafem funkce nad tímto trojúhelníkem je

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy(1 - x - y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[x(1 - x)\frac{y^2}{2} - x\frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 x(1 - x)^3\, dx = \frac{1}{6} \left[\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{120} \end{aligned}$$

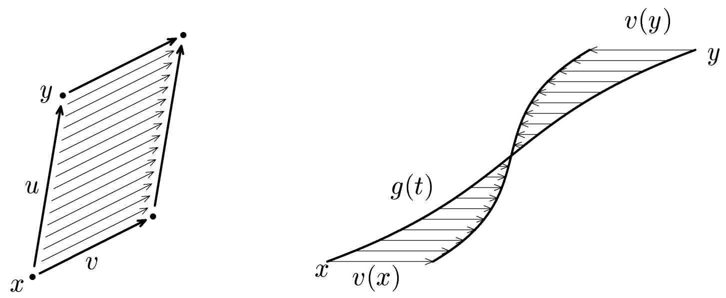
Nechť $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na obdélníku $A = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a uvažujme substituci $x = g(u)$, $y = h(v)$, kde $g : \langle a_0, b_0\rangle \to \langle a, b\rangle$, $h : \langle c_0, d_0\rangle \to \langle c, d\rangle$ jsou diferencovatelné funkce. Pak

$$\begin{aligned} \int_A f\, dP &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx \\ &= \int_{a_0}^{b_0} \left(\int_{c_0}^{d_0} f(g(u), h(v)) \cdot h'(v)\, dv \right) g'(u)\, du = \int_{A_0} F dP \end{aligned}$$

kde $A_0 = \langle a_0, b_0\rangle \times \langle c_0, d_0\rangle$ a $F(u,v) = f(g(u), h(v)) \cdot g'(u) \cdot h'(v)$. To je zobecnění věty o substituci pro dvojný integrál. Pro obecnou rovinnou transformaci $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ však již nelze tento postup použít a ani množiny A a A_0 nemusí být obdélníky. Proto uvažujeme obecněji rovinný integrál na oblastech omezených diferencovatelnými křivkami.

9.2 Diferenciální formy

Uvažujme kapalinu, která se pohybuje v tenké vrstvě po rovinném povrchu v různých místech s různou rychlostí. V každém místě se přitom může ztrácet (prosakovat dnem) nebo přibývat. Rychlost proudění kapaliny v bodě x nechť je vektor $v(x) = [v_1(x), v_2(x)]$. Předpokládáme, že tato rychlost je v čase konstantní, proudění je stacionární. Uvažujme dále v této rovině nějakou křivku a určeme, jaké množství kapaliny proteče napříč touto křivkou za jednotku času.



Obrázek 9.1: Tok přes orientovanou úsečku a cestu

Jedná-li se o úsečku spojující body x a y a je-li rychlost kapaliny v na této úsečce konstantní, pak kapalina, která za jednotku času úsečkou proteče, vyplní rovnoběžník, jehož jedna strana je úsečka xy a druhá strana je vektor v (obr. 9.1 vlevo). Obsah tohoto rovnoběžníku je $|v_1u_2 - v_2u_1|$, kde $u = y - x$. Chceme-li rozlišit ve kterém směru kapalina přes úsečku proteče, chápeme ji jako orientovanou, tj. jako umístění vektoru $u = y - x$ v bodě x. Teče-li kapalina zleva doprava, bereme tok s kladným znaménkem, v opačném případě se záporným znaménkem. Průtok kapaliny je pak $v_1u_2 - v_2u_1$. Není-li rychlost v rovině konstantní, je průtok kapaliny křivkou roven obsahu rovinného obrazce, který tato kapalina vyplní, případně záporně vzatému obsahu, teče-li kapalina přes křivku zprava doleva (obr. 9.1 vpravo). Definujme funkci $\varphi : \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(x,u) = -v_2(x)u_1 + v_1(x)u_2$$

Pro každý infinitesimální vektor u umístěný v bodě x je tok kapaliny přes u roven $\varphi(x,u)$. Funkce φ je lineární ve druhé proměnné. Takové objekty nazýváme diferenciální formy.

Definice 242 *Diferenciální forma (prvního řádu) na $\mathbb{R}_n$ je spojitá funkce $\varphi : U \times \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$, kde $U \subseteq \mathbb{R}_n$, která je lineární v druhé proměnné, tj. pro každé $x \in U$, $u, v \in \mathbb{R}_n$, $a, b \in \mathbb{R}$ platí*

$$\varphi(x, au + bv) = a\varphi(x, u) + b\varphi(x, v)$$

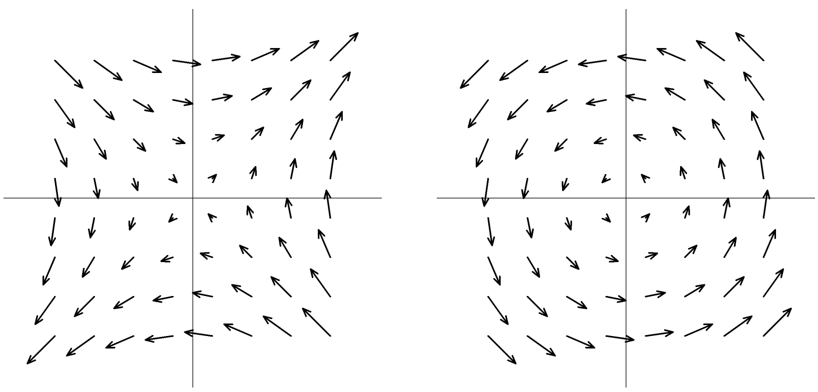
Jako definiční obor φ označujeme $\mathcal{D}(\varphi) = U$. Pro každé $x \in U$ je $\varphi(x) : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ lineární forma, takže diferenciální formu můžeme chápat jako spojité zobrazení $\varphi : U \to \overline{\mathbb{R}_n}$, kde $\overline{\mathbb{R}_n}$ je prostor lineárních forem na $\mathbb{R}_n$. Položíme-li $\varphi_i(x) = \varphi(x, \delta_i)$, kde δ_i je i-tý jednotkový vektor, můžeme každou diferenciální formu vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \varphi(x, u) &= \varphi_1(x) \cdot u_1 + \cdots + \varphi_n(x) \cdot u_n \\ \varphi(x) &= \varphi_1(x) \cdot dx_1 + \cdots + \varphi_n(x) \cdot dx_n \end{aligned}$$

Speciálně diferenciál diferencovatelné funkce $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je diferenciální forma $df(x) = \partial_1 f(x) \cdot dx_1 + \cdots + \partial_n f(x) \cdot dx_n$, existují však diferenciální formy, které nejsou diferenciálem žádné funkce. Je-li totiž $\varphi(x, u) = df(x, u)$ a je-li funkce f 2-diferencovatelná, pak pro složky $\varphi_i(x) = \partial_i f(x)$ platí

$$\partial_j \varphi_i(x) = \partial_{ij} f(x) = \partial_{ji} f(x) = \partial_i \varphi_j(x)$$

Například diferenciální forma $y\,dx + x\,dy$ je diferenciálem funkce xy (obr.9.2 vlevo), zatímco diferenciální forma $\varphi(x, y) = -y\,dx + x\,dy$ (obr. 9.2 vpravo) diferenciálem žádné funkce není, protože $\partial_2 \varphi_1(x, y) = -1$ a $\partial_1 \varphi_2(x, y) = 1$. Na obr.9.2 znázorňujeme diferenciální formy vektorovým polem $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$, které je vytváří.



Obrázek 9.2: Diferenciální formy

9.3 Křivkový integrál

Nechť $g = [g_1, g_2] : \langle t_0, t_1 \rangle \to \mathbb{R}_2$ je diferencovatelná rovinná křivka. Každé infinitesimální dělení $(s_i)_{i=0}^{p-1}$ intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$ určuje infinitesimální lomenou cestu, která sestává z vektorů $g(s_{i+1}) - g(s_i)$ umístěných v bodech $g(s_i)$. Je-li cesta g diferencovatelná, tok přes tuto lomenou cestu je

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} \varphi(g(s_i), g(s_{i+1}) - g(s_i)) &= \sum_{i=0}^{p-1} \varphi(g(s_i), \tfrac{g(s_{i+1})-g(s_i)}{s_{i+1}-s_i}) \cdot (s_{i+1} - s_i) \\ &\approx \sum_{i=0}^{p-1} \varphi(g(s_i), g'(s_i))(s_{i+1} - s_i) \\ &\approx \int_{t_0}^{t_1} \varphi(g(t), g'(t))\, dt\end{aligned}$$

Definice 243 *Křivkový integrál diferenciální formy* $\varphi : _{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \overline{\mathbb{R}_n}$ *po diferencovatelné křivce* $g : \langle t_0, t_1 \rangle \to \mathcal{D}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}_n$ *je*

$$\int_g \varphi = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(g(t), g'(t))\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(g(t)) \cdot g_j'(t) \right) dt$$

Je-li $g : \langle t_0, t_1 \rangle \to \mathbb{R}_n$ diferencovatelná křivka, a je-li $h : \langle s_0, s_1 \rangle \to \langle t_0, t_1 \rangle$ diferencovatelná funkce pro kterou $h(s_0) = t_0$, $h(s_1) = t_1$, je složená funkce $f = g \circ h$ opět diferencovatelná křivka, která má stejný obraz $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(g)$ jako křivka g. Říkáme, že f je reparametrizace g. Podle věty o substituci je integrál diferenciální formy po obou těchto křivkách stejný:

$$\begin{aligned}\int_g \varphi &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(g(t)) \cdot g_j'(t) \right) dt \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(g(h(s))) \cdot g_j'(h(s)) \right) h'(s)\, ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(f(s)) \cdot f_j'(s) \right) ds = \int_f \varphi\end{aligned}$$

To platí i v případě, že funkce h není prostá, takže složená křivka $g \circ h$ se v některých úsecích vrací zpět. Je-li však $h(s_0) = t_1$, $h(s_1) = t_0$, je

$$\int_g \varphi = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(g(t)) \cdot g_j'(t) \right) dt = \int_{s_1}^{s_0} \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(f(s)) \cdot f_j'(s) \right) ds = -\int_f \varphi$$

Křivkový integrál diferenciální formy se tedy nezmění při reparametrizaci, která zachovává směr. Při reparametrizaci v opačném směru křivkový integrál mění znaménko.

Výpočet křivkového integrálu je zvláště jednoduchý v případě, že diferenciální forma je diferenciál $\varphi = dF$, kde $F : _{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných. Pro každou diferencovatelnou křivku $g : \langle t_0, t_1 \rangle \to \mathbb{R}_n$ je

$$\int_g dF \quad = \quad \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} \partial_j F(g(t)) \cdot g_j'(t)\, dt = [F(g(t))]_{t_0}^{t_1} = F(g(t_1)) - F(g(t_0))$$

Integrál je tedy dán rozdílem hodnot funkce F v krajních bodech $a = g(t_0)$, $b = g(t_1)$ křivky g. Po každé křivce, která probíhá od a do b, je stejný. To zapisujeme

$$\int_a^b dF = F(b) - F(a)$$

Je-li g uzavřená křivka, tj. je-li $g(t_1) = g(t_0)$, je integrál dF po g nulový. Pro diferenciální formy, které nejsou diferenciálem, to platit nemusí. Například diferenciální forma $\varphi(x,y) = -ydx + xdy$ v dvourozměrném prostoru je dána vektorovým polem, které je v každém bodě $[x,y]$ kolmé na polohový vektor $[x,y]$ (obr.9.2 vpravo). Integrál po kružnici $g(t) = [r\cos t, r\sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$ je pak

$$\int_g \varphi \quad = \quad \int_0^{2\pi} (-g_2(t)g_1'(t) + g_1(t)g_2'(t)) = \int_0^{2\pi} r^2\, dt = 2\pi r^2$$

V jednorozměrném prostoru má diferenciální forma tvar $\varphi(x,u) = \varphi_1(x)u$, kde φ_1 je spojitá funkce. Základní věta analýzy říká, že každá diferenciální forma na intervalu je diferenciálem funkce F k φ_1 primitivní. Viděli jsme, že v dvourozměrném prostoru podobné tvrzení neplatí.

Vzorec na výpočet křivkového integrálu lze chápat jako převedení tohoto integrálu do jednorozměrného prostoru tak, že se složí diferenciální forma φ s cestou g a vznikne diferenciální forma v jednorozměrném prostoru. Při tomto skládání se však na místo druhé proměnné dosazuje diferenciál. Operaci skládání uvažujeme obecněji pro zobrazení g z vícerozměrného prostoru.

Definice 244 *Složení diferenciální formy $\varphi : _{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \overline{\mathbb{R}_n}$ s diferencovatelným zobrazením $g : _{\subseteq}\mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_n$ je diferenciální forma $\psi = \varphi \circ g$ v $\mathbb{R}_m$ daná předpisem*

$$\psi(y,u) = \phi(g(y), dg(y,u)), \quad \psi(y) = \varphi(g(y)) \circ dg(y)$$

$$\psi(y) : \mathbb{R}_m \xrightarrow{dg(y)} \mathbb{R}_n \xrightarrow{\varphi(g(y))} \mathbb{R}$$

Snadno nahlédneme, že ψ je lineární v druhé souřadnici, takže je to diferenciální forma. Je-li $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, dx_i$, vypočítáme složenou formu $\psi = \varphi \circ g$ tak, že dosadíme $x_i = g_i(y_1, \ldots, y_m)$.

$$\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(g(y))\, dg_i(y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varphi_i(g(y)) \cdot \partial_j g_i(y)\, dy_j$$

Speciálně je-li $m = 1$, a $g : \langle t_0, t_1\rangle \to \mathbb{R}_n$, je

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(g(t))g_i'(t), \quad \int_g \varphi = \int_{t_0}^{t_1} \varphi \circ g$$

Tvrzení 245 *Nechť $f : \subseteq\mathbb{R}_p \to \mathbb{R}_m$, $g : \subseteq\mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_n$ jsou diferencovatelná zobrazení a $\varphi : \subseteq\mathbb{R}_n \to \overline{\mathbb{R}_n}$ je diferenciální forma. Pak*

$$(\varphi \circ g) \circ f = \varphi \circ (g \circ f)$$

Důkaz: Označme $h = g \circ f : \subseteq\mathbb{R}_p \to \mathbb{R}_n$. Pak

$$\begin{aligned}(\varphi \circ g) \circ f(z,u) &= (\varphi \circ g)(f(z), df(z,u)) = \varphi(g(f(z)), dg(f(z), df(z,u))) \\ &= \varphi(h(z), dh(z,u)) = \varphi \circ h(z,u) \quad \square\end{aligned}$$

Například pro diferenciální formu $\varphi(x,y) = -y\,dx + x\,dy$ a zobrazení $x = u\cos v$, $y = u \sin v$ je složená diferenciální forma

$$\begin{aligned}\psi(u,v) &= -u\sin v(\cos v\,du - u\sin v\,dv) + u\cos v(\sin v\,dv + u\cos v\,dv) \\ &= u^2 dv\end{aligned}$$

9.3.1 Carnotův cyklus

Uvažujme ideální plyn uzavřený v nádobě. Je-li tento systém izolovaný od vnějších vlivů (tepelně a mechanicky) dospěje po určitém čase do rovnovážného stavu. Tento stav charakterizujeme stavovými proměnnými tlakem p a objemem v, tedy bodem kladného kvadrantu $M = \{[p,v] : p, v > 0\}$. Další veličiny, které systém charakterizují, chápeme jako funkce na M. Například podle stavové rovnice je (absolutní) teplota T je dána funkcí

$$T(p,v) = pv/kN,$$

kde N je počet molekul plynu a k je tzv. Boltzmannova konstanta. Změnou vnějších podmínek se mění stav systému. Mezi tyto změny patří ochlazování nebo zahřívání systému a stlačování nebo rozpínání. Přitom systém přijímá nebo odevzdává teplo, případně koná nebo je na něm vykonávána práce. Práce a teplo jsou diferenciální formy. Jejich množství závisí na cestě, kterou systém prochází ve stavovém prostoru. Konvenčně se s kladným znaménkem bere práce systémem vykonaná a teplo systémem přijaté. Práce je diferenciální forma $w = p\,dv$. Její složky jsou $w_1(p,v) = 0$, $w_2(p,v) = p$, takže $\partial_2 w_1 = 0 \neq 1 = \partial_1 w_2$. Diferenciální forma w tedy není diferenciálem žádné funkce. Práce vykonaná systémem po nějaké cestě $g : \langle t_0, t_1\rangle \to M$ je

$$W = \int_g w = \int_{t_0}^{t_1} p(t)v'(t)\,dt$$

kde $p(t)$ a $v(t)$ je tlak a objem systému v čase t.

První zákon termodynamiky postuluje, že existuje stavová veličina energie $E = E(p, v)$, jejíž změna (tj. diferenciál) je roven rozdílu přijatého tepla a vykonané práce $dE = q - w$. Pro jednoatomární plyn je

$$\begin{aligned} E(p,v) &= \frac{3}{2}kNT(p,v) = \frac{3}{2}pv \\ dE(p,v) &= \frac{3}{2}p\,dv + \frac{3}{2}v\,dp \end{aligned}$$

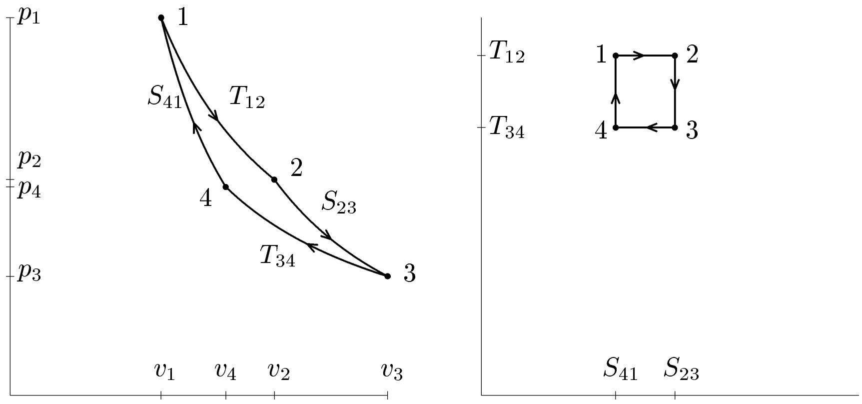
takže diferenciální forma přijatého tepla je

$$q = dE + w = \frac{5}{2}p\,dv + \frac{3}{2}v\,dp$$

Tepelné stroje jsou založeny na cyklickém pohybu ve stavovém prostoru. Projde-li systém po uzavřené cestě g, pak pro přijaté teplo a vykonanou práci platí

$$Q - W = \int_g q - \int_g w = \int_g dE = 0$$

Tepelný stroj tedy buď přeměňuje práci na teplo nebo teplo na práci.



Obrázek 9.3: Carnotův cyklus

Na obr. 9.3 vlevo je uzavřená trajektorie Carnotova cyklu. Dráhy 12 a 34 představují děj rozpínání a stlačování při stálých teplotách $T_{12} > T_{34}$. Jsou to hyperboly s rovnicí $pv = kNT$. Dráhy 23 a 41 představují adiabatický děj, při kterém se nevyměňuje teplo, Adiabatický děj má rovnici $q = 0$, jejíž integrací dostáváme $\frac{5}{2}\ln v + \frac{3}{2}\ln p = konst$, tj. $v^5p^3 = konst$. Pro tlaky a objemy v mezních stavech Carnotova cyklu dostáváme

$$p_1v_1 = p_2v_2,\;\; p_2^3v_2^5 = p_3^3v_3^5,\;\; p_3v_3 = p_4v_4,\;\; p_4^3v_4^5 = p_1^3v_1^5$$

$$\frac{v_1}{v_2}\cdot\frac{v_3}{v_4} = \frac{p_2}{p_3}\cdot\frac{p_4}{p_1} = \left(\frac{v_3}{v_2}\cdot\frac{v_1}{v_4}\right)^{\frac{5}{3}} \quad\Rightarrow\quad \frac{v_1v_3}{v_2v_4} = \frac{p_2p_4}{p_1p_3} = 1$$

Vzhledem k adiabatičnosti dějů 23 a 41 je celkové přijaté teplo $Q = Q_{12} + Q_{34}$. Cestu 12 vyjádříme funkcí $p = knT/v$, $v = v$.

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \int_{v_1}^{v_2} \frac{5}{2}\frac{kNT_{12}}{v}dv + \frac{3}{2}vd\left(\frac{kNT_{12}}{v}\right) = kNT_{12}\int_{v_1}^{v_2} \frac{5}{2}\frac{dv}{v} + \frac{3v}{2}\cdot\frac{-dv}{v^2} \\ &= kNT_{12}\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v} = kNT_{12}\ln\frac{v_2}{v_1} > 0 \end{aligned}$$

Obdobně $Q_{34} = kNT_{34}\ln(v_4/v_3) = -kNT_{34}\ln(v_2/v_1) < 0$. Celková práce $W = \int_K pdv$ je plocha uzavřená křivkou K a je rovna rozdílu $W = Q_{12} - (-Q_{34})$ přijatého a odevzdaného tepla. Při průběhu cyklu ve směru hodinových ručiček je kladná, v opačném směru je záporná.

Teplo Q_{34} je ztrátové: snižuje účinnost tepelného stroje. Účinnost se definuje jako poměr vykonané práce k přijatému teplu Q_{12}

$$\eta = \frac{W}{Q_{12}} = \frac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{12}} = 1 + \frac{Q_{34}}{Q_{12}} = 1 - \frac{T_{34}}{T_{12}} < 1$$

Maximální (jednotkové) účinnosti by se dosahovalo př $T_{34} = 0$. Naskýtá se otázka, zda ztrátové teplo Q_{34} lze vyloučit, zda lze konstruovat tepelný stroj, který by celé přijaté teplo přeměnil na práci. Zákon zachování energie takovou možnost nevylučuje.

Neuskutečnitelnost takového stroje (perpetuum mobile druhého druhu) formuluje druhý zákon termodynamiky. Říká, že existuje kladná funkce teploty $f(T)$, taková, že diferenciální forma $q/f(T) = dS$ je diferenciálem nějaké stavové funkce S, která se nazývá entropie. Z toho potom plyne, že v uzavřeném cyklu nemůže být q všude kladná. Přijímá-li tepelný stroj teplo, musí ho také odevzdávat. V případě ideálního plynu je $f(T) = T$ a entropie je

$$S(p,v) = kN\left(\frac{5}{2}\ln v + \frac{3}{2}\ln p - \frac{5}{2}\ln N + C\right)$$

kde C je konstanta. Je totiž

$$dS = \frac{q}{T} = kN\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{dv}{v} + \frac{3}{2}\cdot\frac{dp}{p}\right)$$

Pro popis termodynamických dějů lze zvolit i jinou dvojici proměnných a všechny ostatní vyjádřit pomocí nich. Například v proměnných T, S je Carnotův cyklus obdélník (obr. 9.3 vpravo). Při izotermickém ději se nemění teplota T a při adiabatickém ději se nemění entropie S.

Cvičení Určete křivkové integrály

1. $\int_g (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$
2. $\int_g (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y_2)\,dy$
3. $\int_g (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$

po cestách

a. $g(t) = [r\cos t, r\sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$
b. $g(t) = [at, bt]$, $t \in \langle 0, 1\rangle$
c. $[a,c] \to [b,c] \to [b,d] \to [a,d] \to [a,c]$.

9.3.2 Jordanovy křivky

Uvažujme funkci arg, která nenulovém bodu v rovině přiřazuje úhel, který jeho průvodič svírá s osou x. Jeji definiční obor je $\mathcal{D}(\arg) = \mathbb{R}_2 \setminus \{\langle x, 0\rangle :\ x \geq 0\}$ a

$$\arg(x,y) = u \ \Leftrightarrow\ 0 \leq u < 2\pi,\ \ \cos u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ \sin u = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Argument lze vyjádřit různým způsobem pomocí cyklometrických funkcí, vždy však jen v nějaké části definičního oboru. Například

$$\begin{array}{lcll} \arg(x,y) & = & \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \geq 0 \\ \arg(x,y) & = & 2\pi - \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \leq 0 \\ \arg(x,y) & = & \pi - \arctan\frac{y}{x} & x < 0 \end{array}$$

V každé z těchto oblastí je diferenciál argumentu

$$\rho(x,y) = d\arg(x,y) = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2},\ \ \mathcal{D}(\rho) = \mathbb{R}_2 \setminus \{\mathfrak{o}\}$$

Tato diferenciální forma je kromě počátku definována v celé rovině i na ose x. Její integrál podle každé kružnice $g(t) = [r\cos t, r\sin t]$ se středem v počátku je

$$\int_g \rho = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{r^2}\,dt = 2\pi$$

Pro obecnou diferencovatelnou křivku neprocházející počátkem je křivkový integrál ρ celočíselný násobek 2π. Tento násobek udává, kolikrát křivka oběhne počátek. Přitom oběh proti směru hodinových ručiček se počítá kladně, oběh po směru hodinových ručiček záporně.

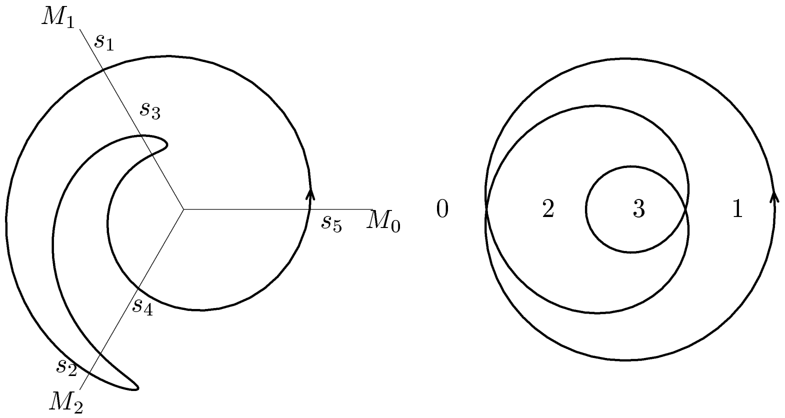
Tvrzení 246 *Nechť $g : \langle t_0, t_1\rangle \to \mathbb{R}_2$ je uzavřená diferencovatelná křivka neprocházející počátkem. Pak*

$$\frac{1}{2\pi}\int_g \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = k \in \mathbb{Z}$$

je celé číslo

Důkaz: Pro $j = 0, 1, 2$ uvažujme paprsky

$$M_j = \{[r\cos\tfrac{2j\pi}{3}, r\sin\tfrac{2j\pi}{3}] :\ r \geq 0\}$$



Obrázek 9.4: Index bodu vzhledem ke křivce

a spojité větve argumentu $\arg_j$ s definičním oborem $\mathcal{D}(\arg_j) = \mathbb{R}_2 \setminus M_j$, pro které $\frac{2j}{3}\pi < \arg_j(x,y) < \frac{2j+6}{3}\pi$. Diferenciál každé z těchto funkcí se na svém definičním oboru rovná diferenciální formě ρ. Jestliže křivka g je celá obsažena v definičním oboru některé $\arg_j$, je její křivkový integrál nulový. Jestliže tento případ nenastává, sestrojíme posloupnost s_j časů průchodů křivky g přes jednotlivé paprsky M_j (obr.9.4 vlevo). Množina $g^{-1}(M_0 \cup M_1 \cup M_2)$ je uzavřená a má tedy nejmenší prvek s_1. Nechť $u_1 \in \{0,1,2\}$ a $g(s_1) \in M_{u_1}$. Podobně s_2 je první časový okamžik $s_2 > s_1$ pro který $g(s_2) \in (M_0 \cup M_1 \cup M_2) \setminus M_{u_1}$, tj. křivka prochází některým z dalších dvou paprsků kromě M_{u_1}. Indukcí tak sestrojíme posloupnosti $s_j \in \langle t_0, t_1\rangle$, $s_{j+1} > s_j$, $u_j \in \{0,1,2\}$, pro které $g(s_j) \in M_{u_j}$, $u_j \neq u_{j+1}$. Kdyby posloupnost s_j byla nekonečná, měla by limitu s, a v tomto s by křivka procházela nulovým bodem. Obě posloupnosti jsou tedy konečné. Označme k jejich délku. Dále označme $v_j \in \{0,1,2\}$ takové že $u_j \neq v_j \neq u_{j+1}$, $u_k \neq v_k \neq u_1$. Pak v časovém intervalu $\langle s_j, s_{j+1}\rangle$ je křivka g v definičním oboru argumentu $\arg_{v_j}$, a v časovém intervalu $\langle s_k, t_1\rangle \cup \langle t_0, s_1\rangle$ je křivka v definičním oboru argumentu $\arg_{v_k}$. Existují tedy $k_j \in \{-1,0,1\}$, pro které

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_g \rho &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k}\int_{s_j}^{s_{j+1}} d\arg_{v_j} = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k} \arg_{v_j}(g(s_{j+1})) - \arg_{v_j}(g(s_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{k}\frac{u_{j+1}-u_j+3k_j}{3} = \sum_{j=1}^{k} k_j \in \mathbb{Z} \;\square\end{aligned}$$

protože buď $\arg(g(s_j)) = \frac{2\pi}{3}u_j$ nebo $\arg(g(s_j)) = \frac{2\pi}{3}u_j + 2\pi$ a obdobně pro $\arg(g(s_{i+1}))$.
$\square$

Počet oběhů křivky lze počítat nejen vzhledem k počátku, ale vzhledem k libovolnému bodu, který na křivce g neleží.

Definice 247 *Index bodu $[a,b] \in \mathbb{R}_2$ vzhledem k diferencovatelné uzavřené křivce*

$g : \langle t_0, t_1 \rangle \to \mathbb{R}_2$, která bodem $[a,b]$ neprochází, je

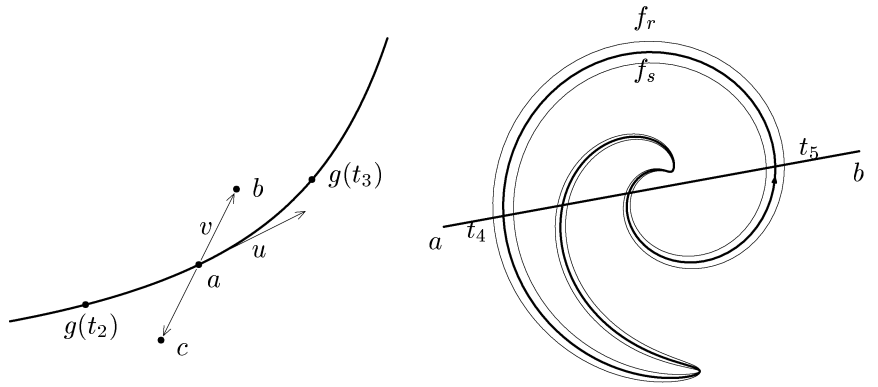
$$\operatorname{ind}_g(a,b) = \frac{1}{2\pi} \int_g \frac{-(y-b)\,dx + (x-a)\,dy}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Podle tvrzení 246 je index bodu vzhledem k uzavřené křivce celé číslo.

Tvrzení 248 *Pro pevnou uzavřenou diferencovatelnou rovinnou křivku g je* $\operatorname{ind}_g(a,b)$ *spojitá funkce.*

Důkaz: Integrand je spojitá funkce proměnné $[a,b]$. □

Je-li $M \subseteq \mathbb{R}_2 \setminus \mathcal{R}(g)$ souvislá množina, je index ind_g na M konstantní (obr. 9.4 vpravo).



Obrázek 9.5: Jordanova věta

Tvrzení 249 *Nechť g je uzavřená křivka, která má v bodě $a = g(t)$ nenulovou derivaci $u = g'(t) \neq \mathbf{o}$ a tímto bodem žádný jiný bod křivky neprochází ($g(s) \neq a$ pro $s \neq t$). Nechť v je vektor, jehož úhel od u (proti směru hodinových ručiček) je kladný a menší než π. Pak pro každé kladné infinitesimální α je*

$$\operatorname{ind}_g(a + \alpha v) = \operatorname{ind}_g(a - \alpha v) + 1$$

Důkaz: Označme $b = a + \alpha v$, $c = a - \alpha v$ (obr. 9.5 vlevo). Existují $t_2 < t < t_3$ takové, že úsek cesty g od $g(t_2)$ do $g(t_3)$ je celý j ak v úhlu $\varphi = \angle(g(t_2), b, g(t_3))$, tak v úhlu $\psi = \angle(g(t_3), c, g(t_2))$ a přitom $0 < \varphi, \psi < \pi$. Označme f úsek křivky g od t_2 do t_3 a h úsek cesty g od t_3 do t_1.

$$\int_h \frac{-(x_2-b_2)\,dx_1 + (x_1-b_1)\,dx_2}{(x_1-b_1)^2 + (x_2-b_2)^2} \approx \int_h \frac{-(x_2-c_2)\,dx_1 + (x_1-c_1)\,dx_2}{(x_1-c_1)^2 + (x_2-c_2)^2}$$

protože $b \approx a \approx c$ a h bodem a neprochází. Protože b i c jsou infinitesimálně blízko a, je $\varphi + \psi \approx 2\pi$. Protože f leží v definiční oblasti argumentů se středy v b a v c, je

$$\begin{aligned} \int_f \frac{-(x_2 - b_2)\,dx_1 + (x_1 - b_1)\,dx_2}{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2} &\approx \varphi, \\ \int_f \frac{-(x_2 - c_2)\,dx_1 + (x_1 - c_1)\,dx_2}{(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2} &\approx -\psi \end{aligned}$$

takže $\operatorname{ind}_g(b) - \operatorname{ind}_g(c) = 1$. □

Definice 250 *Jordanova křivka je diferencovatelná uzavřená křivka* $g : \langle t_0, t_1 \rangle \to \mathbb{R}_2$*, která je prostá na* $\langle t_0, t_1)$ *(a ovšem* $g(t_0) = g(t_1)$*), a která má nulovou derivaci v nejvýše konečném počtu bodů* $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$*.*

Věta 251 (Jordanova věta) *Nechť* $g : \langle t_0, t_1 \rangle \to \mathbb{R}_2$ *je Jordanova křivka. Pak* $\mathbb{R}_2 \setminus \mathcal{R}(g)$ *je sjednocením právě dvou souvislých komponent, z nichž právě jedna je omezená.*

Pro pevné r položme $f_r(t) = [g_1(t) - rg_2'(t), g_2(t) + rg_1'(t)]$ (obr. 9.5 vpravo). Pak f_r je spojitá křivka (ne nutně diferencovatelná). V bodech s nulovou derivací je $f_r(t) = g(t)$. Je-li $r \neq 0$ infinitesimální a $g'(t) \neq \mathbf{0}$, pak $f_r(t)$ neleží na křivce g. Pro body $a = g(t)$, ve kterých je $g'(t) = \mathbf{0}$ uvažujme kružnici se středem a a infinitesimálním poloměrem. Tato kružnice protíná křivku $f_r(t)$ právě ve dvou bodech. Jeden ze dvou takto vzniklých oblouků neobsahuje žádný bod křivky g. Nahradíme-li část křivky f_r uvnitř kružnice tímto obloukem, sestrojíme křivku g_r, která s křivkou g nemá žádný společný bod. Zvolme pevná infinitesimální $r < 0 < s$. Ukážeme, že pro každé dva body $a, b \in \mathbb{R}_2 \setminus \mathcal{R}(g)$ existuje spojitá cesta z a do b, která má s křivkou g nejvýše jeden společný bod. Vyjdeme nejprve z úsečky $h(t) = a + t(b - a)$ spojující body a, b. Předpokládejme, že úsečka ab má s křivkou g společné alespoň dva body. Položme

$$\begin{aligned} t_2 &= \min\{t \in \langle 0, 1 \rangle :\ a + t(b - a) \in K\}, \\ t_3 &= \max\{t \in \langle 0, 1 \rangle :\ a + t(b - a) \in K\} \end{aligned}$$

Pak existuje $t_4 < t_2$, $t_4 \approx t_2$, pro které $a + t_4(b - a)$ leží buď na g_r nebo na g_s. Podobně existuje $t_5 > t_3$, $t_5 \approx t_3$, pro které $a + t_5(b - a)$ leží buď na g_r nebo na g_s. Jestliže oba tyto body leží na stejné křivce, nahradíme úsek úsečky od t_4 do t_5 úsekem této křivky a tím sestrojíme cestu z a do b která neobsahuje žádný bod $g(t)$. Jestliže body $a + t_4(b - a) = g_r(t_6)$, $a + t_5(b - a) = g_s(t_7)$ leží na různých křivkách, zvolíme $t_6 < t < t_7$ a nahradíme úsek úsečky úsekem g_r od $g_r(t_6)$ do $g_r(t)$, úsečkou $g_r(t)g_s(t)$ a úsekem g_s od $g_s(t)$ do $g_s(t_7)$. Tato křivka vede z a do b a protíná křivku g právě v jednom bodě. Ukázali jsme tedy, že v nestandardním světě existuje mezi každými dvěma body křivka protínající křivku g nejvýše v jednom bodě. Podle principu expanze toto tvrzení platí i ve standardním světě. Množina $\mathbb{R}_2 \setminus \mathcal{R}(g)$ má tedy nejvýše dvě komponenty. Protože funkce $\operatorname{ind}_g(x)$ je na komponentách konstantní, má podle tvrzení 249 právě dvě komponenty. Protože křivka $\mathcal{R}(g)$ je kompaktní, existuje $r > 0$ tak že $\mathcal{R}(g) \subseteq B_r(\mathfrak{o})$. Pro každé $x \in \mathbb{R}_2 \setminus B_r(\mathfrak{o})$ je $\mathrm{ind}_g(x) = 0$, takže druhá komponenta je podmnožinou $B_r(\mathfrak{o})$ a tedy omezená. Její index je buďto 1 nebo -1.

9.3.3 Neorientovaný křivkový integrál

Pro délku diferencovatelné křivky $g : \langle t_0, t_1\rangle \to \mathbb{R}_2$ jsme odvodili vzorec

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_1'(t)^2 + g_2'(t)^2}\, dt$$

Vzorec má podobný tvar jako vzorec pro křivkový integrál diferenciální formy, místo diferenciální formy zde však máme funkci $ds : \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ danou předpisem $ds(x,u) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. To zapisujeme

$$\begin{aligned} ds(x,u) &= \sqrt{dx_1^2(x,u) + dx_2^2(x,u)} \\ ds &= \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2} \end{aligned}$$

Funkce ds není lineární forma. Neplatí totiž $ds(u+v) = ds(u) + ds(v)$. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ je však $ds(au) = |a| ds(u)$. Tato vlastnost stačí, abychom mohli (nelineární) formu ds integrovat po cestách.

Definice 252 *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}_n$. Spojitá funkce $\varphi : U \times \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ se nazývá metrická forma, jestliže pro každé $x \in U$ a $\mathfrak{o} \neq u \in \mathbb{R}_n$ je $\varphi(x,u) > 0$ a platí*

$$\varphi(x, au) = |a|\varphi(x,u)$$

Integrál metrické formy φ po diferencovatelné cestě $g : \langle t_0, t_1\rangle \to U$ je definován stejným způsobem jako pro diferenciální formu

$$\int_g \varphi = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(g(t), g'(t))\, dt$$

Integrál metrické formy se nemění při reparametrizacích, které mají všude nenulovou derivaci. Na rozdíl od integrálu diferenciální formy se nemění ani při změně orientace. Je-li totiž $h : \langle s_0, s_1\rangle \to \langle t_0, t_1\rangle$ vzájemně jednoznačná funkce s kladnou derivací (a tedy $g(s_i) = t_i$), je

$$\int_g \varphi = \int_{s_0}^{s_1} \varphi(g(h(s)), g'(h(s)))h'(s)\, ds = \int_f \varphi$$

kde $f = g \circ h$. Má-li h všude zápornou derivaci a tedy $g(s_i) = t_{1-i}$, je

$$\int_g \varphi = \int_{s_1}^{s_0} -\varphi(g(h(s)), g'(h(s)))h'(s)\, ds = \int_f \varphi$$

Tímto způsobem můžeme určit délku křivek na zakřivených plochách. V třírozměrném prostoru je $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Sférické souřadnice na jednotkové sféře jsou $x = \cos u \cos v$, $y = \sin u \cos v$, $z = \sin v$. Zde $u \in (0, 2\pi)$ je zeměpisná délka a $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je zeměpisná šířka. Odtud

$$\begin{aligned} ds^2 &= \cos^2 v du^2 + \sin^2 v\, dv^2 + \cos^2 v dv^2 \\ ds &= \sqrt{\cos^2 v\, du^2 + dv^2} \end{aligned}$$

Vidíme, že ds je metrická forma. Obecně je-li $f : \subseteq\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_3$ plocha v třírozměrném prostoru, pak metrická forma $\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$ určuje metrickou formu na $\mathbb{R}_2$

$$\varphi(x) = \sqrt{A_{11}(x)\, dx_1^2 + 2A_{12}(x)\, dx_1\, dx_2 + A_{22}(x)\, dx_2^2}$$

kde

$$A_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{3} \partial_i f_k(x) \partial_j f_k(x)$$

Další aplikace křivkového integrálu je výpočet hmotností a těžišť hmotných křivek s danou délkovou hustotou $\varrho(x, y)$ v bodě $[x, y]$. Celková hmotnost takové hmotné křivky je

$$m = \int_g \varrho(x, y)\, ds = \int \varrho(g(t)) \sqrt{g_1'^2(t) + g_2'^2(t)}\, dt$$

Souřadnice jejiho těžiště jsou

$$x_T = \frac{1}{m} \int_g x \varrho(x, y)\, ds, \quad y_T = \frac{1}{m} \int_g y \varrho(x, y)\, ds$$

Cvičení Určete

1. $\int_g y^2\, ds$ pro $g(t) = [r(t - \sin t), r(1 - \cos t)]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

2. $\int_g (x + y)\, ds$ pro $g : [0, 0] \to [1, 0] \to [0, 1] \to [0, 0]$

3. $\int_g (x^2 + y^2)\, ds$ pro $g(t) = [r(\cos t + t \sin t, r(\sin t - t \cos t)]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

9.4 Orientované cesty

Rovinný integrál budeme definovat na regulárních rovinných oblastech, což jsou kompaktní množiny, jejichž hranice je Jordanova křivka. Obdobou intervalového dělení kompaktního intervalu je trojúhelníkové dělení regulární oblasti. Hranice takového trojúhelníkového dělení je sestavena z úseček, které tvoří dělení hranice regulární oblasti. Pojmy orientovaného trojúhelníka a orientované úsečky definujeme obecně v $\mathbb{R}_n$.

Definice 253

1. *Orientovaný trojúhelník je trojice* (x,u,v)*, kde* $x \in \mathbb{R}_n$ *je bod a* $u,v \in \mathbb{R}_n$ *jsou lineárně nezávislé vektory.*
2. *Orientovaná úsečka je dvojice* (x,u)*, kde* $x \in \mathbb{R}_n$ *je bod a* $u \in \mathbb{R}_n$ *je nenulový vektor.*
3. *Orientovaný bod je dvojice* (x,s)*, kde* $x \in \mathbb{R}_n$ *je bod a* $s \in \{-1,+1\}$*.*

Obrazy orientovaného bodu, úsečky a trojúhelníka jsou kompaktní množiny

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(x,s) &= \{x\}\\ \mathcal{R}(x,u) &= \{x+tu: \ t \in \langle 0,1\rangle\}\\ \mathcal{R}(x,u,v) &= \{x+tu+sv: \ t,s \in \langle 0,1\rangle\}\end{aligned}$$

Je-li (x,u,v) rovinný orientovaný trojúhelník, tj. $x \in \mathbb{R}_2$ a $u,v \in \mathbb{R}_2$, je jeho plošný obsah $|u_1v_2 - u_2v_1|/2$ Definujme funkci $dP : \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$dP(u,v) = \frac{1}{2}(u_1v_2 - u_2v_1) = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

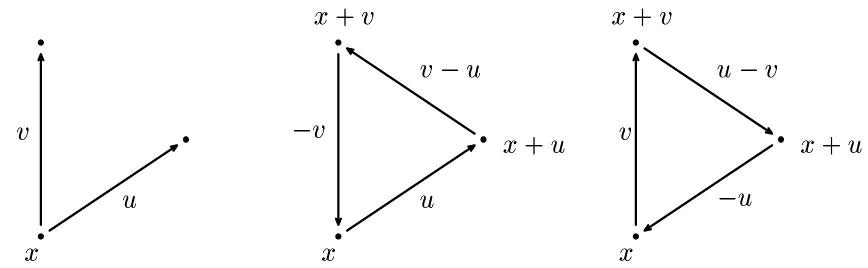
Říkáme, že rovinný trojúhelník (x,u,v) je kladně orientovaný (proti směru hodinových ručiček), je-li $dP(u,v) > 0$, a záporně orientovaný (po směru hodinových ručiček), je-li $dP(u,v) < 0$. Protože u,v jsou nezávislé, je $dP(u,v) \neq 0$. Trojúhelník (x,u,v) má opačnou orientaci než trojúhelník (x,v,u). Trojúhelník (x,u,v) je orientován kladně, jestliže úhel od u k v je menší než π. Kladně a záporně orientované trojúhelníky lze definovat pouze v dvourozměrném prostoru. Podobně kladně a záporně orientované úsečky lze definovat pouze v jednorozměrném prostoru. Je-li (x,u) orientovaná úsečka v $\mathbb{R}_1$, říkáme, že je orientována kladně, jestliže $u > 0$ a záporně, jestliže $u < 0$.

V definici křivkového integrálu křivky $g : \langle t_0,t_1\rangle \to \mathbb{R}_n$ jsme pro infinitesimální dělení (s_i) intervalu $\langle t_0,t_1\rangle$ uvažovali posloupnost orientovaných úseček $(g(s_i), g(s_{i+1}) - g(s_i))$. Takovým posloupnostem říkáme lomené cesty. Na lomené cestě se stejná orientovaná úsečka může vyskytovat víckrát. Lomená cesta také může sestávat z několika nesouvislých úseků. Přitom nestanovujeme v jakém pořadí je máme procházet. Lomenou cestu tedy chápeme jako seznam orientovaných úseček s opakováním. U každé úsečky stanovujeme kolikrát ji procházíme. Uvažujeme také cesty sestavené z orientovaných bodů (cesty dimenze 0 nebo 0-cesty) a z orientovaných trojúhelníků (dvoudimenzionální cesty, nebo 2-cesty).

Definice 254 *Orientované cesty (dimenze* $0,1,2$*) jsou formální součty*

$$\begin{aligned}C_0 &= a_1 \odot (x_1,s_1) \oplus \cdots \oplus a_m \odot (x_m,s_m)\\ C_1 &= a_1 \odot (x_1,u_1) \oplus \cdots \oplus a_m \odot (x_m,u_m)\\ C_2 &= a_1 \odot (x_1,u_1,v_1) \oplus \cdots \oplus a_m \odot (x_m,u_m,v_m)\end{aligned}$$

kde $a_i \in \mathbb{N}$ *jsou přirozená čísla,* (x_i,s_i) *jsou orientované body,* (x_i,u_i) *jsou orientované úsečky a* (x_i,u_i,v_i) *jsou orientované trojúhelníky. Prázdnou cestu s nulovými koeficienty značíme* O*.*



Obrázek 9.6: Orientovaný trojúhelník a jeho hranice

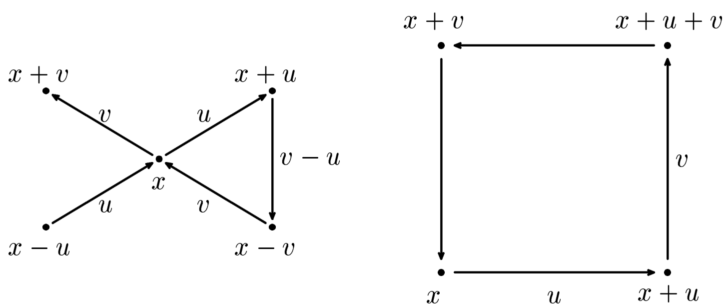
Sčítání v orientované 0-rozměrné cestě je komutativní a distributivní, tj. platí algebraické identity

$$
\begin{aligned}
(x, s) \oplus (y, t) &= (y, t) \oplus (x, s) \\
(a + b) \odot (x, s) &= a \odot (x, s) \oplus b \odot (x, s)
\end{aligned}
$$

Orientovaná hranice orientované úsečky sestává z jejího kladně orientovaného počátečního bodu a záporně orientovaného koncového bodu. Orientovaná hranice orientovaného trojúhelníka sestává z jeho orientovaných hran. Definujeme je

$$
\begin{aligned}
\delta(x, u) &= (x, -1) \oplus (x + u, +1) \\
\delta(x, u, v) &= (x, u) \oplus (x + u, v - u) \oplus (x + v, -v)
\end{aligned}
$$

Na obr. 9.6 vlevo je kladně orientovaný trojúhelník (x, u, v) a jeho hranice (uprostřed). Vpravo je hranice k němu opačného trojúhelníka (x, v, u), který je orientován záporně.



Obrázek 9.7: Orientované lomené cesty

Hranici orientované 1-cesty a 2-cesty definujeme

$$
\begin{aligned}
\delta(C_1) &= a_1 \odot \delta(x_1, u_1) \oplus \cdots \oplus a_m \odot \delta(x_m, u_m) \\
\delta(C_2) &= a_1 \odot \delta(x_1, u_1, v_1) \oplus \cdots \oplus a_m \odot \delta(x_m, u_m, v_m)
\end{aligned}
$$

Například orientovaná lomená cesta

$$P = (x-u,u) \oplus (x,u) \oplus (x+u,v-u) \oplus (x-v,v) \oplus (x,v)$$

na obr. 9.7 vlevo má hranici

$$\begin{aligned} \delta(P) \quad = \quad & (x-u,-1) \oplus (x+u,+1) \oplus (x+u,-1) \oplus \\ & (x-v,+1) \oplus (x-v,-1) \oplus (x+v,+1) \oplus \\ & 2 \odot (x,+1) \oplus 2 \odot (x,-1) \end{aligned}$$

Orientovaná lomená cesta

$$Q = (x,u) \oplus (x+u,v) \oplus (x+u+v,-u) \oplus (x+v,-v)$$

na obr. 9.7 vpravo má hranici, ve které se každý bod x, $x+v$, $x+u+v$, $x+v$ vyskytuje právě jednou jak s kladnou tak se zápornou orientací. Hranice orientované cesty tedy zahrnuje všechny hraniční body jednotlivých orientovaných úseček spolu s násobností kolikrát do nich cesta vstupuje a kolikrát z nich vystupuje.

Na orientovaných 0-cestách zavádíme ekvivalenci, při které odečítáme navzájem opačně orientované body, takže pokládáme $(x,s) \oplus (x,-s) \equiv \mathsf{O}$, kde O je nulová cesta. To také zapisujeme $(x,-s) \equiv \ominus(x,s)$. Je tedy

$$a \odot (x,s) \oplus b \odot (x,-s) \equiv c \odot (x,s) \oplus d \odot (x,-s)$$

právě když $a-b=c-d$. Hranice orientovaných lomených cest P, Q na obr. 9.7 jsou ekvivalentní

$$\delta(P) \equiv (x-u,-1) \oplus (x+v,+1), \quad \delta(Q) \equiv \mathsf{O}$$

Opačná úsečka k orientované úsečce (x,u) je $\ominus(x,u) = (x+u,-u)$. Na orientovaných lomených 1-cestách zavádíme ekvivalenci, při které odčítáme navzájem opačné úsečky, tj.

$$(x,u) \oplus (x+u,-u) \equiv \mathsf{O}$$

Na orientovaných lomených 2-cestách zavádíme ekvivalenci, při které odčítáme navzájem opačné orientované trojúhelníky. Také ztotožňujeme trojúhelníky, které mají stejný obraz a stejnou orientaci, pouze jiný výchozí bod

$$(x,u,v) \oplus (x,v,u) \equiv \mathsf{O}$$

$$(x,u,v) \equiv (x+u,-u,v-u) \equiv (x+v,-v,u-v)$$

Místo orientovaných úseček uvažujeme nyní obecněji hladké orientované oblouky a z nich sestavené orientované cesty. Přitom ztotožňujeme reparametrizace oblouků, které zachovávají směr (orientaci). Říkáme, že spojitá křivka $f : \langle s_0, s_1 \rangle \to \mathbb{R}_n$ je reparametrizace křivky $g : \langle t_0, t_1 \rangle \to \mathbb{R}_n$, jestliže existuje diferencovatelná funkce $h : \langle s_0, s_1 \rangle \to \langle t_0, t_1 \rangle$, pro kterou $f = g \circ h$ a $h'(s) > 0$ pro každé $s \in \langle s_0, s_1 \rangle$. Říkáme, že křivky f a g jsou ekvivalentní (zapisujeme $f \equiv g$), jestliže každá z nich je reparametrizací druhé. Každou diferencovatelnou křivku lze reparametrizovat její délkou.

Nechť $f : \langle t_0, t_1\rangle \to \mathbb{R}_n$, $g : \langle t_1, t_2\rangle \to \mathbb{R}_n$ jsou křivky, pro které $f(t_1) = g(t_1)$. Jejich spojení je křivka $h : \langle t_0, t_2\rangle \to \mathbb{R}_n$ definovaná jako $f(t)$ na $\langle t_0, t_1\rangle$ a $g(t)$ na $\langle t_1, t_2\rangle$. To zapisujeme $h \equiv f \oplus g$. Tak se mohou spojovat i stejné křivky, jsou-li uzavřené. Například pro $f(t) = [\cos t, \sin t]$ na $\langle 0, 2\pi\rangle$ a $g(t) = [\cos t, \sin t]$ na $\langle 0, 4\pi\rangle$, je $g \equiv f \oplus f = 2 \odot f$. Křivka opačná ke křivce $f : \langle t_0, t_1\rangle \to \mathbb{R}_n$, je $\ominus f : \langle -t_1, -t_0\rangle \to \mathbb{R}_n$ definovaná $\ominus f(t) = f(-t)$.

Definice 255 *Oblouk v $\mathbb{R}_n$ je prostá diferencovatelná křivka $g : \langle t_0, t_1\rangle \to \mathbb{R}_n$, která má v každém bodě nenulovou derivaci $g'(t) \neq \mathsf{o}$. Jeho hranice je*

$$\delta(g) = (g(t_0), -1) \oplus (g(t_1), +1).$$

Orientovaná 1-cesta je formální součet

$$K = a_1 \odot g_1 \oplus \cdots \oplus a_m \odot g_m$$

kde g_i jsou oblouky a $a_i \in \mathbb{N}$ jsou přirozená čísla. Hranice orientované cesty, její obraz, a složení se zobrazením $f : \subseteq\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ jsou

$$\begin{aligned}
\delta(K) &= a_1 \odot \delta(g_1) \oplus \cdots \oplus a_m \odot \delta(g_m) \\
\mathcal{R}(K) &= \mathcal{R}(g_1) \cup \cdots \cup \mathcal{R}(g_m) \\
f \circ K &= a_1 \odot (f \circ g_1) \oplus \cdots \oplus a_m \odot (f \circ g_m)
\end{aligned}$$

Dvě orientované cesty jsou ekvivalentní, lze-li získat jednu z druhé ekvivalentními úpravami: reparametrizací jednotlivých oblouků, jejich spojením či rozdělením nebo sloučením opačných cest. Formálně se jedná o úpravy

$$\begin{array}{rcll}
f & \equiv & g & \text{ekvivalence oblouků} \\
f & \equiv & g \oplus h & \text{spojení oblouků} \\
f \ominus f & \equiv & \mathsf{O} & \text{sloučení opačných oblouků}
\end{array}$$

Zde ovšem značí $f \ominus f = f \oplus (\ominus f)$. Orientovanou úsečku (x, u) chápeme jako oblouk $g(t) = x + tu$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Je-li $g : \langle t_0, t_n\rangle \to \mathbb{R}_2$ Jordanova křivka, existují $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ takové, že $g'(t) \neq \mathsf{o}$ pro každé $t \in (t_i, t_{i+1})$. Restrikce g_i křivky g na interval $\langle t_i, t_{i+1}\rangle$ určují orientovanou lomenou cestu $K = g_1 \oplus \cdots \oplus g_n$, kterou nazýváme Jordanovou orientovanou cestou.

Definice 256 *Integrál diferenciální formy φ po orientované cestě K definujeme součtem*

$$\int_K \varphi = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \int_{g_j} \varphi, \quad \textit{kde} \quad K \equiv a_1 \odot g_1 \oplus \cdots \oplus a_m \odot g_m$$

Infinitesimálním dělením oblouku $g : \langle t_0, t_1\rangle \to \mathbb{R}_n$ nazveme každou infinitesimální lomenou cestu

$$C_1 = a_1 \odot (x_1, u_1) \oplus \cdots \oplus a_m \odot (x_m, u_m)$$

pro kterou $x_i \in \mathcal{R}(g)^*$ a $\delta(C_1) \equiv \delta(g)$. Infinitesimální dělení pro orientovanou cestu

$$K = a_1 \odot g_1 \oplus \cdots \oplus a_m \odot g_m$$

je každé orientované dělení

$$C = a_1 \odot C_1 \oplus \cdots \oplus a_m \odot C_m$$

kde C_i jsou infinitesimální dělení pro g_i.

Tvrzení 257 *Pro každé infinitesimální dělení*

$$C_1 = a_1 \odot (x_1, u_1) \oplus \cdots \oplus a_p \odot (x_p, u_p)$$

orientované křivky K je

$$\int_K \varphi \approx \sum_{i=1}^{p} a_i \varphi(x_i, u_i)$$

Důkaz: Můžeme předpokládat, že $K \equiv g$ je oblouk $g : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}_n$. Protože g je prosté, pro každé i existuje jediné $t_i \in \langle 0, 1\rangle$ pro které $g(t_i) = x_i$, a jediné v_i pro které $g(t_i + v_i) = x_i + u_i$. Pak

$$D_1 = a_1 \odot (t_1, v_1) \oplus \cdots \oplus a_p \odot (t_p, v_p)$$

je 1-cesta v $\mathbb{R}_1$ a $\delta(D_1) \equiv (0, -1) \oplus (1, +1)$. Nechť $(s_j)_{j=0}^q$ je rostoucí posloupnost všech čísel t_i, přitom $s_0 = 0$, $s_q = 1$. Pak

$$D_1 \equiv \bigoplus_{i=0}^{q-1} (s_i, s_{i+1} - s_i)$$

a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} a_i \varphi(x_i, u_i) &= \sum_{i=1}^{p} a_i \varphi(g(t_i), g(t_i + v_i) - g(t_i)) \\ &\approx \sum_{j=1}^{q-1} a_j \varphi(g(s_i), g(s_{i+1}) - g(s_i)) \approx \int_g \varphi \quad \Box \end{aligned}$$

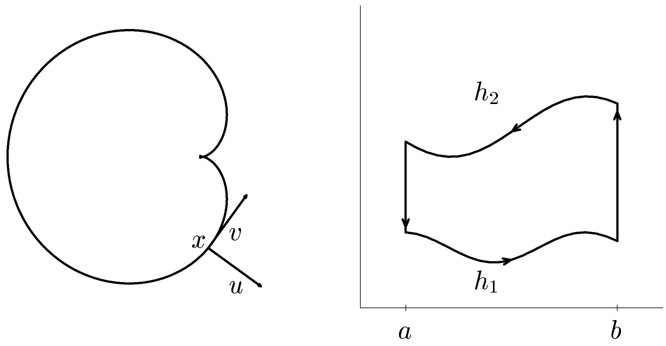
9.5 Regulární oblasti

Definice 258 *Množina $A \subseteq \mathbb{R}_2$ je jednoduše souvislá regulární uzavřená oblast (dále jen regulární oblast), je-li kompaktní a její topologická hranice je obraz Jordanovy křivky.*

Je-li g Jordanova křivka, jejíž obraz $\mathcal{R}(g) = \mathrm{fr}(A)$, pak

$$A = \{x \in \mathbb{R}_2 : \mathrm{ind}_g(x) \neq 0\}$$

Tento index je přitom buď 1 nebo -1. Přejdeme-li k opačné křivce $\ominus g$, pak také index těchto bodů změní znaménko. Zvolíme takovou orientaci hraniční křivky aby tento index byl 1. Ekvivalentně to lze vyjádřit pomocí orientace trojúhelníků umístěných na hranici oblasti. Nechť (x,u,v) je kladně orientovaný trojúhelník, pro který $x = g(t)$ je bod hranice oblasti a $v = ag'(t)$ kladný násobek tečného vektoru. Podle Tvrzení 249 je pro každé infinitesimální α $\mathrm{ind}_g(x - \alpha u, v) = \mathrm{ind}_g(x + \alpha u, v) + 1$. Protože index každého bodu mimo $\mathcal{R}(g)$ je buď 0 nebo 1, je $\mathrm{ind}_g(x - \alpha u, v) = 0$, $\mathrm{ind}_g(x + \alpha u, v) = 1$. Hranici regulární oblasti tedy orientujeme tak, že v jejím bodě x zvolíme vektor u směřující mimo A (například normálový vektor kolmý na hraniční křivku) a tečný vektor v, tak aby trojúhelník (x,u,v) byl orientován kladně (obr. 9.8 vlevo). Hraniční křivku regulární oblasti A rozložíme na hladké oblouky, tj. na 1-cestu.



Obrázek 9.8: Regulární rovinné oblasti

Definice 259 *Orientovaná 1-cesta $K = g_1 \oplus \cdots \oplus g_m$ (s jednotkovými koeficienty a_i) je Jordanova cesta, jestliže $\delta(K)$ nemá vícenásobné body, $\delta(K) \equiv \mathrm{O}$ a*

$$\mathcal{R}(g_i) \cap \mathcal{R}(g_j) \subseteq \mathrm{fr}(\mathcal{R}(g_i)) \cap \mathrm{fr}(\mathcal{R}(g_j)), \quad i \neq j$$

Je-li $A = \{x \in \mathbb{R}_2 : \mathrm{ind}_K(x) = 1\} \neq \emptyset$, říkáme, že $K \equiv \delta(A)$ je geometrická hranice regulární oblasti A.

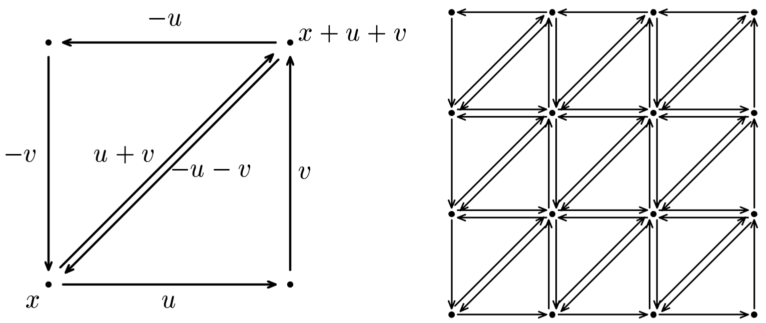
Obraz $\mathcal{R}(x,u,v)$ orientovaného trojúhelníka (x,u,v) je regulární oblast, jejíž hranice je $\delta(x,u,v) = (x,u) \oplus (x+u, v-u) \oplus (x+v, -v)$. Pro reálné diferencovatelné funkce $h_1, h_2 : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}_1$ splňující $h_1(x) \leq h_2(x)$ uvažujme množinu

$$A = \{[x,y] : \ a \leq x \leq b, \ h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

Geometrická hranice A je orientovaná křivka $\mathcal{K} = g_1 \oplus g_2 \oplus g_3 \oplus g_4$, kde cesty g_i jsou

$$g_1(t) = [t, h_1(t)], \ \ g_2(t) = [b,t], \ \ g_3(t) = [-t, h_2(-t)], g_4(t) = [a, -t]$$

s definičními obory $\langle a, b\rangle$, $\langle h_1(b), h_2(b)\rangle$, $\langle -b, -a\rangle$, $\langle -h_2(a), -h_2(a)\rangle$. Orientovaná cesta K probíhá obvod množiny A proti směru hodinových ručiček (obr. 9.8 vpravo).



Obrázek 9.9: Trojúhelníková dělení

Nechť $(x, u, u+v)$ a $(x, u+v, v)$ jsou kladně orientované rovinné trojúhelníky (obr.9.9 vlevo), jejichž hrany $(x+u+v, -u-v)$ a $(x, u+v)$ jsou navzájem opačné. Pak jejich průnik je právě jen tato hrana

$$\mathcal{R}(x, u, u+v) \cap \mathcal{R}(x, u+v, v) = \mathcal{R}(x, u) + v.$$

Orientovaná 2-cesta $P = (x, u, u+v) \oplus (x, u+v, v)$ představuje čtyřúhelník, jehož hranice je ekvivalentní orientované lomené cestě

$$\delta(P) \equiv (x, u) \oplus (x+u, v) \oplus (x+u+v, -u) \oplus (x+v, -v)$$

Tímto způsobem vytváříme trojúhelníková dělení rovinných oblastí tak, že další trojúhelník přidáme vždy buď k jedné orientované úsečce hranice stávajícího dělení nebo ke dvojici po sobě jdoucích orientovaných úseček této hranice.

Definice 260 *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}$ je regulární oblast. Orientovaná rovinná lomená 2-cesta $D = (x_1, u_1, v_1) \oplus \cdots \oplus (x_m, u_m, v_m)$ (s jednotkovými koeficienty) je trojúhelníkové dělení A, jestliže všechny trojúhelníky jsou kladně orientovány, všechny jejich vrcholy leží v A, každé dva trjúhelníky se protínají buď ve své hraně nebo vrcholu nebo se neprotínají, a jejich hranice je uzavřená lomená cesta, která je dělením hranice $\delta(A)$.*

Je-li D trojúhelníkové dělení, pak každá hrana každého jeho trojúhelníku buďto leží na hranici $\delta(D)$, nebo pro ni existuje právě jeden trojúhelník D s hranou opačnou. Každý obdélník $A = \langle a, c\rangle \times \langle b, d\rangle$ má infinitesimální trojúhelníkové dělení (obr. 9.9 vpravo). Zvolme infinitesimální dělení $(a_i)_{i=0}^p$ intervalu $\langle a, c\rangle$ a infinitesimální dělení $(b_j)_{j=0}^q$ intervalu $\langle b, d\rangle$. Nyní je chápeme jako lomené cesty

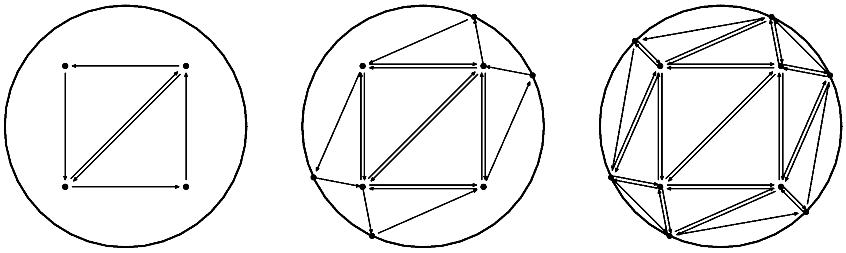
$$\bigoplus_{i=0}^{p-1}(a_i, a_{i+1} - a_i) \quad = \quad (a_0, a_1 - a_0) \oplus \cdots \oplus (a_{p-1}, a_p - a_{p-1})$$

$$\bigoplus_{i=0}^{q-1}(b_i, b_{i+1} - b_i) \quad = \quad (b_0, b_1 - b_0) \oplus \cdots \oplus (b_{q-1}, b_q - b_{q-1})$$

Položme $x_{ij} = [a_i, b_j]$, $u_i = [a_{i+1} - a_i, 0]$, $v_i = [0, b_{i+1} - b_i]$. Pak

$$P = \bigoplus_{i,j=1}^{p,q} (x_{ij}, u_i, u_i + v_j) \oplus (x_{ij}, u_i + v_j, v_j)$$

je infinitesimální trojúhelníkové dělení obdélníka $\langle a, c\rangle \times \langle b, d\rangle$.



C D E

Obrázek 9.10: Konstrukce trojúhelníkového dělení

Tvrzení 261 *Každá regulární jednoduše souvislá oblast $A \subseteq \mathbb{R}_2$ má infinitesimální trojúhelníkové dělení.*

Důkaz: Zvolme obdélník $\langle a_0, a_1\rangle \times \langle b_0, b_1\rangle \supseteq A$ a nějaké jeho infinitesimální trojúhelníkové dělení B. Nechť C je 2-cesta sestavená z těch orientovaných trojúhelníků z B (s jednotkovou násobností), jejichž všechny tři vrcholy jsou v A^*. (obr. 9.10 vlevo). Pro každou orientovanou hranu (x, u) hranice $\mathcal{C}$ existuje v B trojúhelník, který má hranu opačnou a který celý v A^* neleží. Zvolíme nějaký jeho bod y, který leží na $\mathrm{fr}(A)$ tak, že orientovaný trojúhelník $(x, y - x, u)$ celý leží v A^*. 2-cestu D sestavíme z těchto trojúhelníků spolu s trojúhelníky B. Jeho hranice má body střídavě uvnitř A^* a na hranici A^* (obr. 9.10 uprostřed). Nechť dvě po sobě následující hrany této hranice jsou (x, u) a $(x + u, v)$, kde $x, x + u + v \in \mathrm{fr}(A)^*$ a $x + u \in \mathrm{int}(A)^*$. Je-li $(x, v - u, u)$ kladně orientovaný trojúhelník, přidáme ho do sestrojovaného dělení. V opačném případě existuje vektor w tak že $x + w \in \mathrm{fr}(A)^*$ a trojúhelníky (x, w, u), $(x + u, w - u, -v)$ jsou orientovány kladně, takže do sestrojovaného dělení přidáme tyto dva trojúhelníky a tak sestrojíme dělení E oblasti A (obr. 9.10 vpravo). □

Tvrzení 262 *Nechť A je regulární uzavřená jednoduše souvislá oblast a*

$$D = \bigoplus_{i=1}^{p}(x_i, u_i, v_i), \quad E = \bigoplus_{k=1}^{r}(y_k, s_k, t_k)$$

dvě její infinitesimální trojúhelníková dělení. Pak

$$\sum_D f = \sum_{i=1}^{p} f(x_i)\, dP(u_i, v_i) \approx \sum_{k=1}^{r} f(y_k)\, dP(s_k, t_k) = \sum_E f$$

Důkaz: Pro každé i,k je průnik i-tého a k-tého trojúhelníku mnohoúhelník (nejvýše šestiúhelník) nebo úsečka nebo bod (nebo prázdný). Je-li tímto průnikem mnohoúhelník, lze ho rozložit na konečný počet orientovaných trojúhelníků. Je-li tímto průnikem úsečka, rozdělíme každý trojúhelník tak aby tato úsečka byla hranou některého z trojúhelníků. Je-li tímto průnikem bod rozdělíme každý trojúhelník tak, aby tento bod byl vrcholem některého z trojúhelníků. Existuje tedy společné zjemnění $C = \bigoplus_{j=1}^{q}(z_j, a_j, b_j)$ dělení D a E. Každý orientovaný trojúhelník D_i lze jediným způsobem vyjádřit jako sjednocení $D_i = \cup_{j\in L_i} C_j$ trojúhelníků z C. Položme $L = \cup_{i\le p} L_i$. Pak

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{p} f(x_i)dP(u_i,v_i) - \sum_{j\in L} f(z_j)dP(a_j,b_j)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{j\in L_i}(f(x_i)-f(y_j))dP(a_j,b_j)\right| \\ &\le \alpha\left|\sum_{j\in L} dP(a_j,b_j)\right| \approx \alpha P(M) \approx 0\end{aligned}$$

Zde $\alpha = \max\{|f(x_i) - f(y_j)| : 1 \le i \le p,\ j \in L_i\}$ a $P(A)$ je plošný obsah oblasti A. V dělení C však ještě mohou být trojúhelníky, které nejsou obsaženy v žádném trojúhelníku z D. Každý takový trojúhelník leží na hranici A, to znamená, že na ní leží všechny tři jeho vrcholy. Položme $L' = \{1,\ldots,q\} \setminus L$. Obsah trojúhelníka lze odhadnout $dP(a,b) \le ||a|| \cdot ||b||/2$, takže

$$\left|\sum_{j\in L'} f(z_j)dP(a_j,b_j)\right| \le \sum_{j\in L'} \frac{K}{2}||a_j||\cdot||b_j|| \le \frac{\alpha K}{2}\sum_{j\in L'}||b_j|| \le \frac{\alpha K l}{2} \approx 0$$

Zde $\alpha = \max\{||a_j|| : j \in L'\}$, K je horní odhad funkce f na A a l je délka hranice A.

9.6 Rovinný integrál

Funkce $dP : \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ definovaná $dP(u,v) = \frac{1}{2}(u_1v_2 - u_2v_1)$ je antisymetrická bilineární forma. To znamená, že je linární v každé proměnné a při záměně proměnných mění znaménko $dP(v,u) = -dP(u,v)$. Funkci dP lze vyjádřit pomocí diferenciálů $dx_1(u) = u_1$ a $dx_2(u) = u_2$

$$dP(u,v) = \frac{1}{2}(dx_1(u)dx_2(v) - dx_2(u)dx_1(v))$$

Tuto identitu zapisujeme ve tvaru $dP = dx_1 \wedge dx_2$. Obecně definujeme operaci $\wedge$ vnějšího součinu pro lineární formy.

Definice 263 *Vnější součin $f \wedge g$ lineárních forem $f,g : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je funkce $f \wedge g : \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ definovaná vzorcem*

$$(f \wedge g)(u,v) = \frac{1}{2}(f(u)g(v) - f(v)g(u))$$

Zřejmě $f \wedge g$ je antisymetrická bilineární forma a $g \wedge f = -f \wedge g$, takže $f \wedge f = 0$. Je-li $f(u) = \sum_i a_i u_i$ a $g(u) = \sum_j b_j v_j$, je

$$\begin{aligned} (f \wedge g)(u,v) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j (u_i v_j - v_i u_j) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)(u_i v_j - u_j v_i) \\ f \wedge g &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j dx_i \wedge dx_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i) dx_i \wedge dx_j \end{aligned}$$

Speciálně pro funkce g_1, g_2 dvou proměnných je

$$\begin{aligned} dg_1(x) \wedge dg_2(x) &= (\partial_1 g_1(x)\, dx_1 + \partial_2 g_1(x)\, dx_2) \wedge (\partial_1 g_2(x)\, dx_1 + \partial_2 g_2(x)\, dx_2) \\ &= \partial_1 f(x) \cdot \partial_1 g(x)\, dx_1 \wedge dx_1 + \partial_1 f(x) \cdot \partial_2 g(x)\, dx_1 \wedge dx_2 + \\ &\quad\ \partial_2 f(x) \cdot \partial_1 g(x)\, dx_2 \wedge dx_1 + \partial_2 f(x) \cdot \partial_2 g(x)\, dx_2 \wedge dx_2 \\ &= \Big(\partial_1 f(x) \cdot \partial_2 g(x) - \partial_2 f(x) \cdot \partial_1 g(x)\Big)\, dx_1 \wedge dx_2 \ \square \end{aligned}$$

Definice 264 *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}_2$ je regulární uzavřená jednoduše souvislá oblast a f spojitá funkce na A. Integrál f na A je společná hodnota infinitesimálních součtů*

$$\int_A f(x_1, x_2)\, dx_1 \wedge dx_2 \ \approx\ \sum_{i=1}^{p} f(y_i)(dx_1 \wedge dx_2)(u_i, v_i)$$

kde $D = \bigoplus_{i=1}^{p}(y_i, u_i, v_i)$ je libovolné infinitesimální trojúhelníkové dělení oblasti A.

Pro obdélník $A = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ je rovinný integrál dvojný integrál. Pro trojúhelníkové dělení vzniklé z infinitesimálních dělení $(y_i)_{i=0}^{p}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení $(z_j)_{j=0}^{q}$ intervalu $\langle c, d\rangle$ je

$$\begin{aligned} \int_A f(x)\, dx_1 \wedge dx_2 &\approx \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1} f(y_i, z_j)(y_{i+1} - y_i)(z_{j+1} - z_j) \\ &\approx \int_a^b \left(\int_c^d f(x_1, x_2)\, dx_2\right) dx_1 \end{aligned}$$

Věta 265 *Nechť $g : A \to \mathbb{R}_2$ je diferencovatelné zobrazení jehož definiční obor i obor hodnot $A, g(A) \subseteq \mathbb{R}_2$ jsou regulární oblasti a $g \circ \delta(A) \equiv \delta(g(B))$. Je-li f spojitá funkce na $g(A)$, je*

$$\begin{aligned} &\int_{g(A)} f(y_1, y_2)\, dy_1 \wedge dy_2 = \int_A (f \circ g)(x)\, dg_1(x) \wedge dg_2(x) \\ &= \int_A f(g(x)) \cdot (\partial_1 g_1(x) \cdot \partial_2 g_2(x) - \partial_1 g_2(x) \cdot \partial_2 g_1(x))\, dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Důkaz: V tomto důkaze budeme za orientované trojúhelníky považovat i degenerované trojúhelníky, jejichž vektory jsou lineárně závislé. Nechť $B = (z_i, u_i, v_i)_{i=1}^p$ je infinitesimální trojúhelníkové dělení A. Uvažujme 2-cestu

$$C = (g(z_i), g(z_i + u_i) - g(z_i), g(z_i + v_i) - g(z_i))_{i=1}^p$$

Protože g není nutně vzájemně jednoznačné, C není nutně infinitesimální trojúhelníkové dělení $g(A)$. Některé jeho trojúhelníky mohou být orientovány záporně a některé mohou být degenerované. Hranice $\delta(C)$ je však infinitesimální dělení hranice $\delta(g(A))$. Sestrojíme zjemnění D 2-cesty C. Uvažujme množinu M všech neprázdných konečných průniků $\mathcal{R}(C_1) \cap \cdots \cap \mathcal{R}(C_k)$, kde C_i jsou trojúhelníky z C. Každá tato množina je buď mnohoúhelník nebo úsečka nebo bod. Rozdělíme mnohoúhelníky z M na trojúhelníky a tak utvoříme trojúhelníkové dělení $D = (D_i)_{i=1}^r$ takové, že každá množina $\mathcal{R}(C_1) \cap \cdots \cap \mathcal{R}(C_k)$ je buď sjednocení obrazů trojúhelníků dělení D nebo obraz hrany nebo obraz vrcholu nějakého trojúhelníka dělení D. Každý trojúhelník C_i je ekvivalentní součtu trojúhelníků D nebo trojúhelníků opačných. To znamená, že existují $a_i, b_i > 0$ tak že platí

$$C \equiv \bigoplus_{i=1}^{r} a_i \odot D_i \oplus b_i \odot (\ominus D_i)$$

Jestliže D_i, D_j jsou trojúhelníky, jejichž průnik je hrana neležící na $\delta(g(A))$, pak tato hrana není obsažena v $\delta(D)$ a přitom D_i a D_j jsou jediné trojúhelníky, do jejichž hranice patří. Z toho plyne $a_i - b_i = a_j - b_j$. Protože cesta D je souvislá, je tento rozdíl $a_i - b_i$ pro každý trojúhelník stejný. Pro trojúhelník D_i, jehož jedna hrana leží na hranici, je $a_i - b_i = 1$, takže $a_i - b_i = 1$ pro každé i. Odtud $D \equiv C$, takže

$$\begin{aligned}
\int_{g(A)} f(y)\, dy_1 \wedge dy_2 &\approx \sum_D f \approx \sum_C f \\
&= \sum_{i=1}^{p} f(g(z_i))\, dP(g(z_i + u_i) - g(z_i), g(z_i + v_i) - g(z_i)) \\
&\approx \sum_{i=1}^{p} f(g(z_i))\, dP(dg(z_i, u_i), dg(z_i, v_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{p} f(g(z_i))\, (dg_1(z_i, u_i) dg_2(z_i, v_i) - dg_2(z_i, u_i) dg_1(z_i, v_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{p} f(g(z_i))(dg_1(z_i) \wedge dg_2(z_i))(u_i, v_i) \\
&\approx \int_A (f \circ g)(x)\, dg_1(x) \wedge dg_2(x)
\end{aligned}$$

Jestliže ve větě 265 je $g \circ \delta(A) \equiv \ominus\delta(g(B))$, pak se ve vzorci mění znaménko:

$$\int_{g(A)} f(y)\, dy_1 \wedge dy_2 = -\int_A (f \circ g)(x)\, dg_1(x) \wedge dg_2(x)$$

Pro cestu D je pak totiž $a_i - b_i = c = -1$. Pro výpočet integrálu lze použít trojúhelníkové dělení $\ominus D$, přitom se však mění znaménko.

Spočtěme integrál funkce $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ na kruhu

$$B_r(\mathbf{0}) = \{[x,y] : x^2 + y^2 < r\}.$$

Použijeme substituci $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, která zobrazuje interval $A = (0,r) \times (0,2\pi)$ na oblast $B_r \setminus \{[x,0] : x \geq 0\}$. Pak

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (\cos v\, du - u\ \sin v\, dv) \wedge (\sin v\, du + u\ \cos v\, dv) \\ &= u\cos^2 v\, du \wedge dv - u\sin^2 v\, dv \wedge du = u\, du \wedge dv \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \int_{B_r} e^{-x^2-y^2}\, dx \wedge dy &= \int_A e^{-u^2} u\, du \wedge dv = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r e^{-u^2} u\, du \right) dv \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-u^2} \right]_0^r = \pi(1 - e^{-r^2}) \end{aligned}$$

Plošný obsah $P(A)$ regulární uzavřené oblasti A je ovšem $\int_A dx_1 \wedge dx_2$.

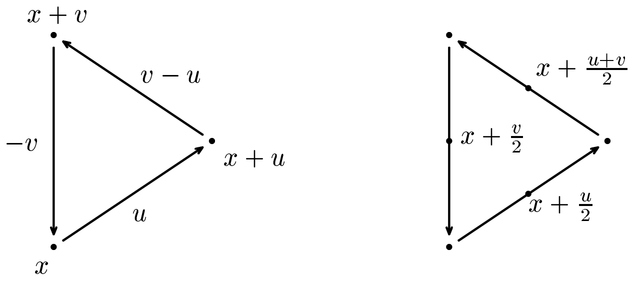
Cvičení Určete

1. $\displaystyle\int_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx \wedge dy$, kde $A = \{[x,y] :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$
2. $\displaystyle\int_A (x+y)\, dx \wedge dy$, kde $A = \{[x,y] :\ 4 \leq x+y \leq 12,\ \ y^2 < 2x\}$
3. $\displaystyle\int_A xy\, dx \wedge dy$, kde $A = \{[x,y] :\ 1 \leq xy,\ \ x+y \leq 2\}$
4. $\displaystyle\int_A \cos(x+y)\, dx \wedge dy$, kde $A = \{[x,y] :\ 0 \leq x, y \leq \pi\}$

9.7 Greenova věta

Nechť $\varphi(x,u) = \varphi_1(x)u_1 + \varphi_2(x)u_2$ je rovinná diferenciální forma a (x,u,v) orientovaný trojúhelník. Výtok formy φ z (x,u,v) je součet výtoků přes jeho orientované hrany vyhodnocený vždy v polovině hrany (obr. 9.11)

$$\begin{aligned} \theta(x,u,v) &= \varphi(x + \tfrac{u}{2}, u) + \varphi(x + \tfrac{u+v}{2}, v-u) + \varphi(x + \tfrac{v}{2}, -v) \\ &= \varphi(x + \tfrac{u}{2}, u) - \varphi(x + \tfrac{u+v}{2}, u) + \varphi(x + \tfrac{u+v}{2}, v) - \varphi(x + \tfrac{v}{2}, v) \end{aligned}$$



Obrázek 9.11: Greenova věta

Předpokládejme, že forma φ je diferencovatelná, tj. že její složky φ_1 a φ_2 mají spojité parciální derivace. Pak existují $t, s, r, q \in (0,1)$ tak, že platí

$$\begin{aligned}
&\varphi(x+\tfrac{u}{2}, u) - \varphi(x+\tfrac{u+v}{2}, u) \\
&\qquad = \big(\varphi_1(x+\tfrac{u}{2}) - \varphi_1(x+\tfrac{u+v}{2})\big)\, u_1 + \big(\varphi_2(x+\tfrac{u}{2}) - \varphi_2(x+\tfrac{u+v}{2})\big)\, u_2 \\
&\qquad = -d\varphi_1(x+\tfrac{u+tv}{2}, \tfrac{v}{2})u_1 - d\varphi_2(x+\tfrac{u+sv}{2}, \tfrac{v}{2})u_2 \\
&\varphi(x+\tfrac{u+v}{2}, v) - \varphi(x+\tfrac{v}{2}, v) \\
&\qquad = d\varphi_1(x+\tfrac{v+ru}{2}, \tfrac{u}{2})v_1 + d\varphi_2(x+\tfrac{v+qu}{2}, \tfrac{u}{2})v_2
\end{aligned}$$

Pro infinitesimální vektory u, v plyne ze spojitosti $d\varphi_i$

$$\begin{aligned}
\frac{\theta(x,u,v)}{||u||\cdot||v||} &\approx \frac{-d\varphi_1(x,v)u_1 - d\varphi_2(x,v)u_2 + d\varphi_1(x,u)v_1 + d\varphi_2(x,u)v_2}{2||u||\cdot||v||} \\
&= \frac{(d\varphi_1(x)\wedge dx_1 + d\varphi_2(x)\wedge dx_2)(u,v)}{||u||\cdot||v||}
\end{aligned}$$

Je totiž

$$\begin{aligned}
(d\varphi_1(x)\wedge dx_1)(u,v) &= \frac{1}{2}(d\varphi_1(x,u)v_1 - d\varphi_1(x,v)u_1) \\
(d\varphi_2(x)\wedge dx_2)(u,v) &= \frac{1}{2}(d\varphi_2(x,u)v_2 - d\varphi_2(x,v)u_2)
\end{aligned}$$

To je bilineární diferenciální forma, kterou nazýváme vnější derivací formy φ. Je to funkce $d\varphi : \mathcal{D}(\varphi)\times\mathbb{R}_2\times\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$\begin{aligned}
d\varphi(x) &= d\varphi_1(x)\wedge dx_1 + d\varphi_2(x)\wedge dx_2 \\
&= (\partial_1\varphi_1(x)\,dx_1 + \partial_2\varphi_1(x)\,dx_2)\wedge dx_1 + (\partial_1\varphi_2(x)\,dx_1 + \partial_2\varphi_2(x)\,dx_2)\wedge dx_2 \\
&= (-\partial_2\varphi_1(x) + \partial_1\varphi_2(x))\,dx_1\wedge dx_2 \\
d\varphi(x,u,v) &= \frac{1}{2}(-\partial_2\varphi_1(x) + \partial_1\varphi_2(x))(u_1v_2 - u_2v_1)
\end{aligned}$$

Má-li funkce $F : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ spojité druhé parciální derivace, pak pro její diferenciál $\varphi = dF$ platí $\partial_i\varphi_j = \partial_{ji}F = \partial_{ij}F = \partial_j\varphi_i$, takže $d(dF) = d\varphi = 0$.

Věta 266 (Greenova věta) *Nechť φ je diferencovatelná diferenciální forma na regulární oblasti A a nechť $\delta(A)$ je její orientovaná hranice. Pak*

$$\int_{\delta(A)} \varphi = \int_A d\varphi$$

to znamená

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} (\varphi_1(g(t))g_1'(t) + \varphi_2(g(t))g_2'(t))\,dt \\
&\qquad = \int_A (-\partial_2\varphi_1(x_1,x_2) + \partial_1\varphi_2(x_1,x_2))\,dx_1 \wedge dx_2
\end{aligned}$$

Důkaz: Uvažujme infinitesimální trojúhelníkové dělení $\mathcal{D} = (x_i, u_i, v_i)_{i=1}^p$ oblasti A a nechť $(x_j, u_j)_{j=1}^q$ je jeho hranice. Pak v součtu $\sum_{i=1}^p \theta(x_i, u_i, u_i)$ se vyruší navzájem všechny toky přes vnitřní hrany a zůstane jen součet přes hraniční hrany $\sum_{j=1}^q \varphi(x_i + \frac{u_i}{2}, u_i)$. Odtud

$$\begin{aligned}
\int_{\delta(A)} \varphi \quad &\approx \quad \sum_{j=1}^q \varphi(x_i + \frac{u_i}{2}, u_i) = \sum_{i=1}^p \frac{\theta(x_i, u_i, u_i)}{||u_i|| \cdot ||v_i||} ||u_i|| \cdot ||v_i|| \\
&\approx \quad \sum_{i=1}^p \frac{d\varphi(x_i, u_i, u_i)}{||u_i|| \cdot ||v_i||} ||u_i|| \cdot ||v_i|| \approx \int_A d\varphi
\end{aligned}$$

Důkaz Greenovy věty je zvláště jednoduchý v případě obdélníka $A = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$, jehož hranice sestává z orientovaných úseček $[a, c] \to [b, c] \to [b, d] \to [a, d], \to [a, b]$.

$$\begin{aligned}
\int_{\delta(A)} \varphi \quad &= \quad \int_a^b \varphi_1(x_1, c)dx_1 + \int_c^d \varphi_2(b, x_2)dx_2 + \int_b^a \varphi_1(x_1, d)dx_1 + \int_d^c \varphi_2(a, x_2)dx_2 \\
&= \quad \int_a^b -(\varphi_1(x_1, d) - \varphi_1(x_1, c))dx_1 + \int_c^d (\varphi_2(b, x_2) - \varphi_2(a, x_2))dx_2 \\
&= \quad \int_a^b \left(\int_c^d -\partial_2\varphi_1(x_1, x_2)dx_2 \right) dx_1 + \int_c^d \left(\int_a^b \partial_1\varphi_2(x_1, x_2)dx_1 \right) dx_2 \\
&= \quad \int_a^b \left(\int_c^d (-\partial_2\varphi_1(x_1, x_2) + \partial_1\varphi_2(x_1, x_2))dx_1 \right) dx_2 = \int_A d\varphi
\end{aligned}$$

Derivace každé z diferenciálních forem $-y\,dx$, $x\,dy$ a $-\frac{y}{2}\,dx + \frac{x}{2}\,dy$ je $d\varphi = dx \wedge dy$, takže plošný obsah každé regulární oblasti je

$$P(A) = -\int_{\delta(A)} y\,dx = \int_{\delta(A)} x\,dy = \frac{1}{2}\int_{\delta(A)} -y\,dx + x\,dy = \int_A dx \wedge dy$$

Například plošný obsah oblasti omezené kardioidou $x(t) = r(2\cos t - \cos 2t)$, $y(t) = r(2\sin t - \sin 2t)$ je

$$\begin{aligned} P &= \int_g x\,dy = \int_0^{2\pi} r^2(2\cos t - \cos 2t)(2\cos t - 2\cos 2t) \\ &= r^2 \int_0^{\pi} (2 + 2\cos 2t + 3\cos t + 3\cos 3t + 1 + cos4t)\,dt = 6\pi r^2 \end{aligned}$$

Greenova věta umožňuje charakterizovat diferenciální formy, které jsou diferenciálem nějaké funkce.

Definice 267 *Množina $A \subseteq \mathbb{R}_2$ je (otevřená) oblast, je-li otevřená a souvislá. Množina A je jednoduše souvislá, jestliže pro každou Jordanovu křivku g, pro kterou $\mathcal{R}(g) \subseteq A$ je*

$$\{x \in \mathbb{R}_2 : \operatorname{ind}_g(x) = 1\} \subseteq A$$

Vnitřek $\operatorname{int}(A)$ každé regulární oblasti je jednoduše souvislá oblast. Pro $0 < r < R$ je mezikruží $\{[x,y] : \ r < x^2 + y^2 < R\}$ oblast, která není jednoduše souvislá.

Tvrzení 268 *Jestliže $A \subseteq \mathbb{R}_2$ je (otevřená) oblast, pak pro každé dva body $x, y \in A$ existuje diferencovatelná křivka, která je spojuje.*

Důkaz: Podle předpokladu pro každé dva body $x, y \in A$ existuje spojitá cesta $g : \langle t_0, t_1\rangle \to A$, která je spojuje. Zvolme infinitesimální dělení (s_i) intervalu $\langle t_0, t_1\rangle$. Pro každé i existuje $s \in \langle t_0, t_1\rangle$ pro které $s_i \approx s \approx s_{i+1}$, takže $g(s_i) \approx g(s) \approx g(s_{i+1})$. Protože A je otevřená, A^* obsahuje celou monádu bodu $g(s)$ a tedy také celou orientovanou úsečku spojující body $g(s_i)$ a $g(s_{i+1})$. V A^* tedy existuje orientovaná lomená cesta spojující body x a y. Podle principu expanze v A existuje orientovaná lomená cesta spojující tyto body, a tedy také diferencovatelná cesta. $\square$

Tvrzení 269 *Diferencovatelná diferenciální forma φ definovaná na oblasti $U \subseteq \mathbb{R}_n$ je diferenciálem právě když její křivkový integrál po každé uzavřené diferencovatelné křivce v U je nulový.*

Důkaz: Nechť integrál φ po každé uzavřené diferencovatelné křivce je nulový. To ekvivalentně znamená že pro každé dvě diferencovatelné křivky f, g které mají společný počáteční a koncový bod, je křivkový integrál stejný. Zvolme tedy pevné $a \in U$ a pro každé $x \in U$ položme $F(x) = \int_a^x \varphi$, tj. integrál φ po libovolné křivce z a do x. Podle tvrzení 268, pro každé $x \in U$ taková křivka existuje. Ukážeme, že $\varphi = dF$. Je-li $x \in U$ a jestliže celá orientovaná úsečka (x, u) je obsažena v U, uvažujme křivku $g(t) = x + tu$. Pak existují $t_1, \ldots t_n \in (0,1)$ pro které

$$F(x+u) - F(x) = \int_g \varphi = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \varphi_j(x+tu)u_j\,dt = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x+t_ju)u_j$$

Odtud pro infinitesimální vektor u

$$\frac{F(x+u)-F(x)}{||u||} \approx \frac{\varphi(x,u)}{||u||}$$

Protože $\varphi(x)$ je lineární forma, je $\varphi = dF$. Naopak nechť $\varphi = dF$. Pak

$$\int_g \varphi = F(g(t_1)) - F(g(t_0)) = 0 \quad \square$$

Tvrzení 270 *Diferenciální forma φ v regulární jednoduše souvislé oblasti je diferenciálem nějaké funkce právě když $d\varphi = 0$.*

Důkaz: Je-li g uzavřená diferencovatelná křivka ohraničující oblast A, je $\int_g \varphi = \int_A d\varphi = 0$, takže podle tvrzení 269 je F diferenciálem. $\square$

V oblastech, které nejsou jednoduše souvislé toto tvrzení neplatí. Pro diferenciální formu $\varphi(x,y) = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ v oblasti $\mathbb{R}_2 \setminus \{\mathbf{o}\}$ je $-\partial_2\varphi_1 + \partial_1\varphi_2 = 0$, její integrál po uzavřené kružnici $g(t) = (r\cos t, r\sin t)$ je však 2π, takže zde není diferenciálem.

9.8 Diferenciální formy druhého řádu

Uvažujme oblast třírozměrného prostoru, ve které proudí nějaká kapalina. Rychlost proudění v bodě $x \in \mathbb{R}_3$ je vektor $w(x) \in \mathbb{R}_3$. Uvažujme množství kapaliny, které za jednotku času proteče danou plochou. Jedná-li se o orientovaný trojúhelník (x,u,v), pak toto množství vyplní rovnoběžnostěn, jehož strany jsou tvořeny vektory $w(x)$, u a v. Jestliže vektory $w(x)$, u, v tvoří pravotočivou soustavu, bereme tento průtok s kladným znaménkem, jinak se znaménkem záporným. Množství kapaliny tedy je

$$\begin{aligned}
\varphi(x,u,v) &= \begin{bmatrix} w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \\
&= w_1(x)(u_2v_3 - u_3v_2) - w_2(x)(u_1v_3 - u_3v_1) + w_3(x)(u_1v_2 - u_2v_1)
\end{aligned}$$

Položíme-li $\varphi(x)(u,v) = \varphi(x,u,v)$, je $\varphi(x) : \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$ bilineární antisymetrická forma

$$\varphi(x) = 2w_1(x)\,dx_2 \wedge dx_3 - 2w_2(x)\,dx_1 \wedge dx_3 + 2w_3(x)\,dx_1 \wedge dx_2$$

Takové objekty nazýváme diferenciální formy druhého řádu.

Definice 271 *Diferenciální forma druhého řádu na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}_n$ je spojitá funkce $\varphi : U \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n$ taková, že pro každé $x \in U$ je $\varphi(x)$ antisymetrická bilineární forma, tj.*

$$\begin{aligned}
\varphi(x, au+bv, w) &= a\varphi(x,u,w) + b\varphi(x,v,w) \\
\varphi(x, u, av+bw) &= a\varphi(x,u,v) + b\varphi(x,u,w) \\
-\varphi(x,v,u) &= \varphi(x,u,v)
\end{aligned}$$

Každou diferenciální formu druhého řádu lze vyjádřit ve tvaru

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \varphi_{ij}(x)\, dx_i \wedge dx_j$$

kde $\varphi_{ij} : U \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. V jednorozměrném prostoru jsou diferenciální formy druhého řádu nulové, protože $dx \wedge dx = 0$. Ve dvourozměrném prostoru má každá 2-forma tvar

$$\varphi(x) = \varphi_{12}(x)\, dx_1 \wedge dx_2$$

je tedy určena jedinou spojitou funkcí. Pro tyto formy jsme definovali rovinný integrál. Ve třírozměrném prostoru mají 2-formy tvar

$$\varphi(x) = \varphi_{12}(x)\, dx_1 \wedge dx_2 + \varphi_{13}(x)\, dx_1 \wedge dx_3 + \varphi_{23}(x)\, dx_2 \wedge dx_3$$

kde $\varphi_{12}(x)$, $\varphi_{13}(x)$, $\varphi_{23}(x)$ jsou spojité funkce.

Nechť φ je diferenciální 2-forma v $\mathbb{R}_n$ a $g : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_n$ diferencovatelné zobrazení, jehož definiční obor je regulární uzavřená oblast $A = \mathcal{D}(g)$. Nechť $(y_i, u_i, v_i)_{i=1}^{p}$ je infinitesimální trojúhelníkové dělení A. Pak

$$(g(y_i), g(y_i + u_i) - g(y_i), g(y_i + v_i) - g(y_i))_{i=1}^{p}$$

nazýváme infinitesimální trojúhelníkové dělení množiny $g(A)$. Tok formy φ přes $g(A)$ je

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^{p} \varphi(g(y_i), g(y_i + u_i) - g(y_i), g(y_i + v_i) - g(y_i)) \\
&\approx \sum_{i=1}^{p} \varphi(g(y_i), dg(y_i, u_i), dg(y_i, v_i)) = \sum_{i=1}^{p} \psi(y_i, u_i, v_i)) \approx \int_D \psi
\end{aligned}$$

kde $\psi(y, u, v) = \varphi(g(y), dg(y, u), dg(y, v))$. Ukážeme totiž, že funkce ψ je 2-forma v prostoru $\mathbb{R}_2$. Je-li

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \varphi_{ij}(x)\, dx_i \wedge dx_j,$$

pak

$$\begin{aligned}
\psi(y) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} \varphi_{kl}(g(y))\, dg_k(y) \wedge dg_l(y) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} \varphi_{kl}(g(y)) \left(\sum_{i=1}^{m} \partial_i g_k(y)\, dy_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{m} \partial_j g_l(y)\, dy_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m} \varphi_{kl}(g(y)) \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} (\partial_i g_k(y) - \partial_j g_l(y)) \right) dy_i \wedge dy_j
\end{aligned}$$

takže

$$\psi_{ij}(y) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} \varphi_{kl}(g(y))(\partial_i g_k(y) - \partial_j g_l(y))$$

Speciálně pro $n = 3$, $m = 2$ je $\psi(y) = \psi_{12}(y)\, dy_1 \wedge dy_2$, kde

$$\begin{aligned}\psi_{12}(y) &= \varphi_{12}(g(y))(\partial_1 g_1(y) \cdot \partial_2 g_2(y) - \partial_2 g_1(y) \cdot \partial_1 g_2(y)) + \\ &\quad \varphi_{13}(g(y))(\partial_1 g_1(y) \cdot \partial_2 g_3(y) - \partial_2 g_1(y) \cdot \partial_1 g_3(y)) + \\ &\quad \varphi_{23}(g(y))(\partial_1 g_2(y) \cdot \partial_2 g_3(y) - \partial_2 g_2(y) \cdot \partial_1 g_3(y))\end{aligned}$$

Definice 272 *Složení diferenciální 2-formy φ v prostoru $\mathbb{R}_n$ s diferencovatelným zobrazením $g : \subseteq\mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_n$ je diferenciální 2-forma $\psi = \varphi \circ g$ v prostoru $\mathbb{R}_m$ daná předpisem $\psi(y, u, v) = \varphi(g(x), dg(x, u), dg(x, v))$.*

Tvrzení 273 *Nechť φ je 2-forma v $\mathbb{R}_n$ a $f : \subseteq\mathbb{R}_p \to \mathbb{R}_m$, $g : \mathbb{R}_m \to, \mathbb{R}_n$ diferencovatelná zobrazení. Pak $\varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f$.*

Důkaz: Označme $h = g \circ f : \subseteq\mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_n$. Pak

$$\begin{aligned}(\varphi \circ g) \circ f(z, u, v) &= \varphi \circ g(f(z), df(z, u), df(z, v)) \\ &= \varphi(g(f(z)), dg(f(z), df(z, u)), dg(f(z), df(z, v))) \\ &= \varphi(h(z), dh(z, u), dh(z, v)) = \varphi \circ h(z, u, v)\end{aligned}$$

9.9 Plošný integrál

Definice 274 *List je prosté diferencovatelné zobrazení $g : \subseteq \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_n$, jehož definiční obor je regulární uzavřená oblast a které má v každém bodě $x \in \mathrm{int}(\mathcal{D}(g))$ regulární diferenciál. Hranice listu g je*

$$\delta(g) = g \circ \delta(\mathcal{D}(g))$$

Orientovaná 2-cesta je formální součet

$$K = a_1 \odot g_1 \oplus \cdots \oplus a_m \odot g_m$$

kde $a_i \in \mathbb{N}$ jsou přirozená čísla a g_i jsou listy. Hranice orientované cesty K je

$$\delta(K) = a_1 \odot \delta(g_1) \oplus \cdots \oplus a_m \odot \delta(g_m)$$

Je-li totiž $\delta(\mathcal{D}(g)) = f_1 \oplus \cdots \oplus f_m$, je $\delta(\mathcal{R}(g)) = g \circ f_1 \oplus \cdots g \circ f_m$. Například zobrazení

$$\begin{aligned}g(u, v) &= [\cos \tfrac{u}{1-v} \cos \tfrac{\pi v}{2},\ \sin \tfrac{u}{1-v} \cos \tfrac{\pi v}{2},\ \sin \tfrac{\pi v}{2}],\quad v \neq 0 \\ g(0, 1) &= [0, 0, 1]\end{aligned}$$

je list, který zobrazuje trojúhelník

$$A = \{[u, v] :\ \ 0 \leq v \leq 1,\ \ 0 \leq u \leq \tfrac{\pi}{2}(1 - u)\}$$

na průnik kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2$ s kladným oktantem $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Říkáme, že list $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_n$ je reparametrizace listu g, existuje-li diferencovatelné zobrazení $h : \mathcal{D}(f) \to \mathcal{D}(g)$, které zachovává orientaci, tj. $h \circ \delta(\mathcal{D}(h)) \equiv \delta(\mathcal{R}(h))$ a $f = h \circ g$. Jestliže h má v každém bodě Jacobián s kladným determinantem, pak h zachovává orientaci. Listy f a g jsou ekvivalentní (píšeme $f \equiv g$), jestliže každý z nich je reparametrizací druhého.

Nechť $g : B \to \mathbb{R}_n$ a $h : C \to \mathbb{R}_n$ jsou listy, $B \cap C \subseteq \mathrm{fr}(B) \cap \mathrm{fr}(C)$ a $A = B \cup C$. Je-li $f : A \to \mathbb{R}_n$ list, pro který $f(x) = g(x)$ pro $x \in B$ a $f(x) = h(x)$ pro $x \in C$, říkáme, že f je spojení listů g a h a zapisujeme to $f \equiv g \oplus h$. List opačný k listu f je list $\ominus f(x, y) = f(x, -y)$. Dvě orientované plochy jsou ekvivalentní, lze-li získat jednu z druhé ekvivalentními úpravami: reparametrizací jednotlivých listů, jejich spojením či rozdělením nebo sloučením opačných listů. Formálně se jedná o úpravy

$$\begin{array}{rcll} f & \equiv & g & \text{ekvivalence listů} \\ f & \equiv & g \oplus h & \text{spojení listů} \\ f \ominus f & \equiv & \mathsf{O} & \text{sloučení opačných listů} \end{array}$$

Definice 275 *Plošný integrál 2-formy $\varphi : U \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$, kde $U \subseteq \mathbb{R}_n$ přes diferencovatelné zobrazení $g : A \to \mathbb{R}_n$, jehož definiční obor je regulární uzavřená množina je*

$$\int_g \varphi = \int_A \psi$$

Plošný integrál 2-formy φ přes orientovanou plochu D je

$$\int_D \varphi = \sum_{j=1}^{m} a_j \int_{g_j} \varphi, \quad D = a_1 \odot g_1 \oplus \cdots \oplus a_m \odot g_m$$

Plošný integrál se nezmění při reparametrizaci, která zachovává orientaci. Je-li $g : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_n$ list a je-li $f : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_2 \to \mathcal{D}(g)$ zobrazení, které zachovává orientaci, je podle věty 265

$$\int_g \varphi = \int_{\mathcal{D}(g)} \varphi \circ g = \int_{\mathcal{D}(f)} (\varphi \circ g) \circ f = \int_{\mathcal{D}(f)} \varphi \circ (g \circ f) = \int_h \varphi$$

9.9.1 Stokesova věta

Definice 276 *Vnější derivace diferenciální 1-formy $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)\, dx_i$ v $\mathbb{R}_n$ je diferenciální 2-forma*

$$\begin{aligned} d\phi(x) &= \sum_{j=1}^{n} d\varphi_j(x) \wedge dx_j = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \varphi_j(x)\, dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (\partial_i \varphi_j(x) - \partial_j \varphi_i(x))\, dx_i \wedge dx_j \end{aligned}$$

Speciálně v třírozměrném prostoru je

$$\begin{aligned}
d\varphi(x) &= d\varphi_1(x)\,dx_1 + d\varphi_2(x)\wedge dx_2 + d\varphi_3(x)\wedge dx_3 \\
&= (\partial_1\varphi_1(x)\,dx_1 + \partial_2\varphi_1(x)\,dx_2 + \partial_3\varphi_1(x)\,dx_3)\wedge dx_1 + \\
&\quad (\partial_1\varphi_2(x)\,dx_1 + \partial_2\varphi_2(x)\,dx_2 + \partial_3\varphi_2(x)\,dx_3)\wedge dx_2 + \\
&\quad (\partial_1\varphi_3(x)\,dx_1 + \partial_2\varphi_3(x)\,dx_2 + \partial_3\varphi_3(x)\,dx_3)\wedge dx_3 \\
&= (\partial_1\varphi_2(x) - \partial_2\varphi_1(x))\,dx_1\wedge dx_2 + \\
&\quad (\partial_2\varphi_3(x) - \partial_3\varphi_2(x))\,dx_2\wedge dx_3 + \\
&\quad (\partial_3\varphi_1(x) - \partial_1\varphi_3(x))\,dx_3\wedge dx_1
\end{aligned}$$

Také v n-rozměrném prostoru je vnější derivace formy tok této formy přes hrany infinitesimálního trojúhelníka. Pro každý infinitesimální trojúhelník (x,u,v) je

$$\frac{d\varphi(x,u,v)}{||u||\cdot||v||} \approx \frac{\varphi(x+\frac{u}{2},u)+\varphi(x+\frac{u+v}{2},v-u)+\varphi(x+\frac{v}{2},-v)}{||u||\cdot||v||}$$

Důkaz je stejný jako ve dvourozměrném prostoru.

Tvrzení 277 *Nechť φ je diferenciální 1-forma v $\mathbb{R}_n$ a $g : \subseteq \mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_n$ je 2-diferencovatelné zobrazení. Pak $(d\varphi)\circ g = d(\varphi\circ g)$.*

Důkaz: Položme $\psi = \varphi\circ g$ a $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\,dx_k$ takže

$$\psi(y) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(g(y))\,dg_k(y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi_k(g(y))\partial_j g_k(y)\,dy_j$$

Je tedy $\psi_j(y) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(g(y))\partial_j g_k(y)$ a

$$\begin{aligned}
d\psi(y) &= \sum_{j=1}^{m} d\psi_j(y)\wedge dy_j = \sum_{i,j=1}^{m}\partial_i\psi_j(y)\,dy_i\wedge dy_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{n}\partial_l\varphi_k(g(y))\cdot\partial_i g_l(y)\cdot\partial_j g_k(y)\,dy_i\wedge dy_j + \\
&\quad \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(g(y))\cdot\partial_{ij}g_k(y)\,dy_i\wedge dy_j
\end{aligned}$$

Druhý člen v tomto součtu je nulový, protože

$$\sum_{i,j=1}^{m}\partial_{ij}g_k(y)\,dy_i\wedge dy_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m}(\partial_{ij}g_k(y) - \partial_{ji}g_k(y))\,dy_i\wedge dy_j = 0$$

a tedy

$$\begin{aligned} d\psi(y) &= \sum_{k,l=1}^{n} \partial_l \varphi_k(g(y)) \left(\sum_{i=1}^{m} \partial_i g_l(y)\, dy_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{m} \partial_j g_k(y)\, dy_j \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} \partial_l \varphi_k(g(y)) \cdot dg_l(y) \cdot dg_k(y) = (d\varphi \circ g)(y) \end{aligned}$$

Věta 278 (Stokesova věta) *Nechť P je orientovaná 2-cesta v $\mathbb{R}_n$ a φ diferenciální 1-forma definovaná na $\mathcal{R}(P)$. Pak*

$$\int_{\delta(P)} \varphi = \int_P d\varphi$$

Důkaz: Nechť $g : {}_{\subseteq}\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_n$ je list, $f : \langle t_0, t_1 \rangle \to \mathcal{D}(g)$ je parametrizace hranice $\mathcal{D}(g)$ a $h = g \circ f$. Pak

$$\int_h \varphi = \int_f \varphi \circ g = \int_A d(\varphi \circ g) = \int_A (d\varphi) \circ g = \int_g d\varphi$$

9.9.2 Neorientovaný plošný integrál

Plošný obsah orientovaného trojúhelníka (x, u, v) v $\mathbb{R}_3$, jehož vektory u, v svírají úhel $0 < \gamma < \pi$ je

$$\begin{aligned} dS(u,v) &= \frac{1}{2}||u|| \cdot ||v|| \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}||u|| \cdot ||v|| \cdot \sqrt{1 - \cos^2\gamma} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{||u||^2||v||^2 - |u \cdot v|^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2} \end{aligned}$$

To zapisujeme

$$dS = \sqrt{(dx_1 \wedge dx_2)^2 + (dx_2 \wedge dx_3)^2 + (dx_1 \wedge dx_3)^2}$$

Funkce dS sice není 2-forma, přesto lze počítat její plošný integrál přes listy. Plochu listu $g(D)$ počítáme podle vzorce

$$S = \int_{g(D)} dS = \int_D \psi$$

kde $\psi : \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$ je dána vzorcem

$$\psi(x, u, v) = dS(dg(x, u), dg(x, v))$$

Položme

$$\begin{aligned} E(x) &= (\partial_1 g_1(x))^2 + (\partial_1 g_2(x))^2 + (\partial_1 g_3(x))^2 \\ G(x) &= (\partial_2 g_1(x))^2 + (\partial_2 g_2(x))^2 + (\partial_2 g_3(x))^2 \\ F(x) &= \partial_1 g_1(x) \cdot \partial_2 g_1(x) + \partial_1 g_2(x) \cdot \partial_2 g_2(x) + \partial_1 g_3(x) \cdot \partial_2 g_3(x) \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} \psi(x,u,v) &= \sqrt{E(x)G(x) - F^2(x)}|u_1 v_2 - u_2 v_1| \\ \psi(x) &= \sqrt{E(x)G(x) - F^2(x)}|dx_1 \wedge dx_2| \end{aligned}$$

Speciálně pro $g(x) = [x_1, x_2, f(x_1, x_2)]$, tedy graf funkce dvou proměnných je

$$E(x)G(x) - F^2(x) = 1 + (\partial_1 f(x))^2 + (\partial_2 f(x))^2$$

takže povrch grafu diferencovatelné funkce f nad rovinnou oblastí D je

$$S = \int_D \sqrt{1 + (\partial_1 f(x))^2 + (\partial_2 f(x))^2}\, dx_1 \wedge dx_2$$

9.10 Gaussova věta

Definice 279 *Orientovaný čtyřstěn v $\mathbb{R}_n$ je čtveřice (x,u,v,w), kde $x \in \mathbb{R}_n$ je bod a u,v,w jsou lineárně nezávislé vektory. Geometrická hranice orientovaného čtyřstěnu (x,u,v,w) je*

$$\delta(x,u,v,w) = (x,v,u) \oplus (x,w,v) \oplus (x,u,w) \oplus (x+u, v-u, w-u)$$

Objem orientovaného čtyřstěnu (x,u,v,w) ve třírozměrném prostoru je $|dV(u,v,w)|$, kde

$$dV(u,v,w) = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

Čtyřstěn (x,u,v,w) ve třírozměrném prostoru je orientován kladně, jestliže $dV(u,v,w) > 0$ a záporně, jestliže $dV(u,v,w) < 0$.

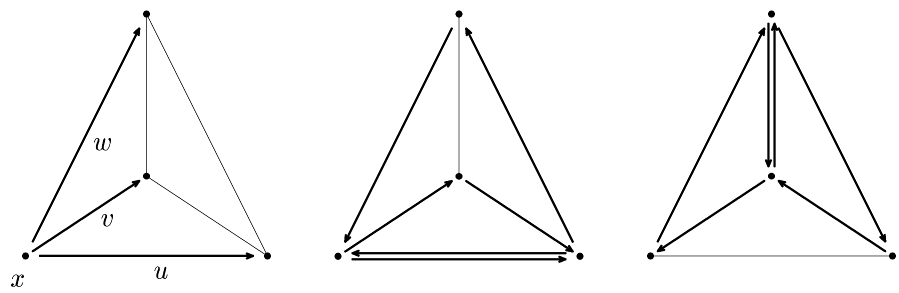
Orientovaná souvislá 2-cesta $S = g_1 \oplus \cdots \oplus g_m$ je Jordanova 2-cesta, jestliže její hranice je ekvivalentní nulové cestě a

$$\mathcal{R}(g_i) \cap \mathcal{R}(g_j) \subseteq \mathrm{fr}(\mathcal{R}(g_i)) \cap \mathrm{fr}(\mathcal{R}(g_j))$$

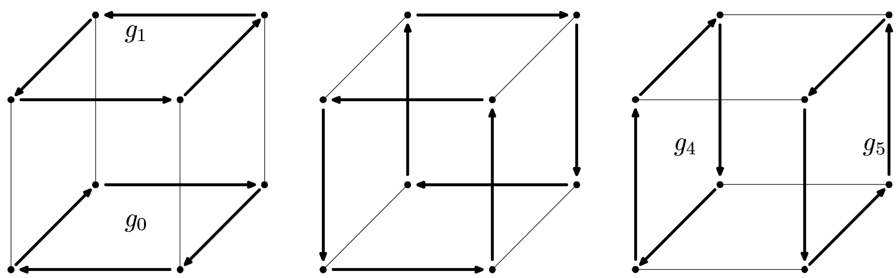
Množina $A \subseteq \mathbb{R}_3$ je regulární oblast, a orientovaná souvislá 2-cesta

$$S = \delta(A) = g_1 \oplus \cdots \oplus g_m$$

je její hranice, jestliže pro každý orientovaný čtyřstěn (x,u,v,w) takový, že $x \in \mathcal{R}(g_i)$, $\mathcal{R}(x,u) \cap A = \{x\}$, a (x,v,w) je kladně orientovaný tečný trojúhelník, je



Obrázek 9.12: Čtyřstěn a jeho hranice



Obrázek 9.13: Krychle a její hranice

(x, u, v, w) kladně orientovaný. Jednotková krychle $\langle 0, 1\rangle^3$ je regulární oblast (obr. 9.13). Její hranice je tvořena zobrazeními

$$g_0(u, v) = [v, u, 0], \;\; g_1(u, v) = [u, v, 1],$$
$$g_2(u, v) = [u, 0, v], \;\; g_3(u, v) = [v, 1, u],$$
$$g_4(u, v) = [0, v, u], \;\; g_5(u, v) = [1, u, v],$$

Čtyřstěnové dělení regulární oblasti $A \subseteq \mathbb{R}_n$ je 3-cesta

$$D = (x_1, u_1, v_1, w_1) \oplus \cdots \oplus (x_p, u_p, v_p, w_p)$$

taková, že každý vrchol každého čtyřstěnu náleží do A a jeho hranice je dělením $\delta(A)$. Obdobně jako v předcházejícím odsavci ukážeme, že každá regulární oblast má čtyřstěnové dělení.

Funkce $f : \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ je antisymetrická trilineární forma, je-li v každé proměnné lineární a v každé dvojici proměnných antisymetrická. Při liché permutaci proměnných u, v, w mění f znaménko, při sudé permutaci znaménko nemění.

$$f(u, v, w) = f(v, w, u) = f(w, u, v) = -f(v, u, w) = -f(u, w, v) = -f(w, v, u)$$

Na jednorozměrném a dvourozměrném prostoru je každá antisymetrická trilineární forma nulová. Na třírozměrném prostoru je každá trilineární antisymetrická forma násobkem determinantu. Je-li $f : \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ bilineární antisymetrická forma a $g : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ lineární forma, definujme jejich vnější součin předpisem

$$\begin{aligned}
(f \wedge g)(u,v,w) &= \frac{1}{3}(f(u,v)g(w) + f(v,w)g(u) + f(w,u)g(v)) \\
(g \wedge f)(u,v,w) &= \frac{1}{3}(g(u)f(v,w) + g(v)f(w,u) + g(w)f(u,v))
\end{aligned}$$

Jsou-li $f, g, h : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ lineární formy, je $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = f \wedge g \wedge h$ trilineární antisymetrická forma a

$$\begin{aligned}
(f \wedge g \wedge h)(u,v,w) &= \frac{1}{6}(f(u)g(v)h(w) + f(v)g(w)h(u) + f(w)g(u)h(v) \\
&\quad -f(u)g(w)h(v) - f(w)g(v)h(u) - f(v)g(u)h(w))
\end{aligned}$$

Speciálně v třírozměrném prostoru je

$$dV(u,v,w) = (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)(u,v,w) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

Definice 280 *Diferenciální forma třetího řádu v $\mathbb{R}_n$ je spojité zobrazení $\varphi : U \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$, kde $U \subseteq \mathbb{R}_n$ a pro každé $x \in U$ je $\varphi(x)$ antisymetrická trilineární forma.*

Každá diferenciální 3-forma má tvar

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} \varphi_{ijk}(x)\, dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$$

Je-li $f : A \to \mathbb{R}$ spojitá funkce, pak pro každá dvě její čtyřstěnová dělení D, E platí

$$\int_A f\, dV \approx \sum_{(x,u,v,w)\in D} dV(x,u,v,w) \approx \sum_{(x,u,v,w)\in E} dV(x,u,v,w)$$

Pro kvádr $A = \langle a, b\rangle$ je

$$\int_A f\, dV = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x_1,x_2,x_3)\, dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1$$

Je-li $g : A \to B$ vzájemně jednoznačné diferencovatelné zobrazení z regulární uzavřené oblasti $A \subseteq \mathbb{R}_3$ na regulární uzavřenou oblast $B \subseteq \mathbb{R}_3$, jehož Jacobián má všude kladný determinant, je

$$\int_B f(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_A f(g(y))\, dg_1(y) \wedge dg_2(y) \wedge dg_3(y)$$

Definice 281 *Vnější derivace diferenciální* 2*-formy*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \varphi_{ij}(x)\, dx_i \wedge dx_j$$

je diferenciální 3*-forma*

$$d\varphi(x) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} d\varphi_{ij}(x) \wedge dx_i \wedge dx_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_k \varphi_{ij}(x)\, dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j$$

Speciálně vnější derivace 2-formy

$$\varphi(x) = \varphi_{12}(x)\, dx_1 \wedge dx_2 + \varphi_{13}(x)\, dx_1 \wedge dx_3 + \varphi_{23}(x)\, dx_2 \wedge dx_3$$

v $\mathbb{R}_3$ je diferenciální 3-forma

$$d\varphi(x) = (\partial_1 \varphi_{23}(x) - \partial_2 \varphi_{13}(x) + \partial_3 \varphi_{12}(x))\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Vnější derivace určuje výtok formy z infinitesimálního čtyřstěnu vyhodnocený v těžišti každé stěny. Položme

$$\begin{aligned} \theta(x,u,v,w) \quad = \quad & \varphi(x + \tfrac{u+w}{3}, u, w) + \varphi(x + \tfrac{w+v}{3}, w, v) + \varphi(x + \tfrac{v+u}{3}, v, u) + \\ & \varphi(x + \tfrac{u+v+w}{3}, v-u, w-u) \end{aligned}$$

Tvrzení 282

$$\frac{d\varphi(x,u,v,w)}{||u|| \cdot ||v|| \cdot ||w||} \quad \approx \quad \frac{\theta(x,u,v,w)}{||u|| \cdot ||v|| \cdot ||w||}$$

Důkaz: Existují $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in (0,1)$, tak že pro

$$\alpha_{ij} = \frac{u+v+a_{ij}w}{3}, \quad \beta_{ij} = \frac{v+w+b_{ij}u}{3}, \quad \gamma_{ij} = \frac{w+u+c_{ij}v}{3}$$

platí

$$\begin{aligned} \theta(x,u,v,w) \quad = \quad & \varphi(x + \tfrac{u+v+w}{3}, u, v) - \varphi(x + \tfrac{u+v}{3}, u, v) + \\ & \varphi(x + \tfrac{u+v+w}{3}, v, w) - \varphi(x + \tfrac{v+w}{3}, v, w) + \\ & \varphi(x + \tfrac{u+v+w}{3}, w, u) - \varphi(x + \tfrac{w+u}{3}, w, u) \\ = \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} d\varphi_{ij}(x + \alpha_{ij}, \tfrac{w}{3}) \cdot \tfrac{u_i v_j - u_j v_i}{2} + \\ & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} d\varphi_{ij}(x + \beta_{ij}, \tfrac{u}{3}) \cdot \tfrac{v_i w_j - v_j w_i}{2} + \\ & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} d\varphi_{ij}(x + \gamma_{ij}, \tfrac{v}{3}) \cdot \tfrac{w_i u_j - u_j v_i}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} d\varphi_{ij}(x+\alpha_{ij},w)(dx_i\wedge dx_j)(u,v) + \\
& \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} d\varphi_{ij}(x+\beta_{ij},u)(dx_i\wedge dx_j)(v,w) + \\
& \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} d\varphi_{ij}(x+\gamma_{ij},v)(dx_i\wedge dx_j)(w,u)
\end{aligned}
$$

a z toho již plyne žádaný výsledek.

Věta 283 (Gaussova věta) *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}_3$ je regulární oblast a φ diferenciální 2-forma na A. Pak*

$$\int_A d\varphi = \int_{\delta(A)} \varphi$$

Důkaz: Uvažujme infinitesimální čtyřstěnové dělení D. Pak v součtu $\sum\limits_{(x,u,v)\in D} \theta(x,u,v,w)$ se navzájem vyruší všechny toky přes vnitřní stěny a zůstanou pouze součet přes hraniční stěny $\sum_{(x,u,v)\in\delta(D)} \varphi(x+\frac{u+v}{3},u,v)$, takže

$$
\begin{aligned}
\int_{\delta(A)} \quad \approx \quad & \sum_{(x,u,v)\in\delta(D)} \varphi(x+\tfrac{u+v}{3},u,v) = \textstyle\sum_{(x,u,v,w)\in D} \frac{\theta(x,u,v,w)}{||u||\cdot||v||\cdot||w||}\cdot ||u||\cdot||v||\cdot||w|| \\
\approx \quad & \sum_{(x,u,v,w)\in D} \frac{d\varphi(x,u,v,w)}{||u||\cdot||v||\cdot||w||}\cdot ||u||\cdot||v||\cdot||w|| \approx \int_A d\varphi
\end{aligned}
$$

Greenova, Stokesova a Gaussova věta jsou speciální případy obecné věty o integraci diferenciálních forem m-tého řádu. Speciálním případem této věty je i Základní věta analýzy. Definujeme diferenciální formy nultého řádu jako spojité funkce. Integrál spojité funkce $f : _{\subseteq}\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ po orientované 0-cestě

$$P = a_1 \odot (x_1,s_1) \oplus \cdots \oplus a_m \odot (x_n,s_n)$$

definujeme vzorcem

$$\int_P f = \sum_{j=1}^{m} s_j \cdot f(x_j)$$

Věta 284 (Základní věta analýzy) *Nechť K je orientovaná 1-cesta v $\mathbb{R}_n$ a f spojitá funkce definovaná na $\mathcal{R}(K)$. Pak*

$$\int_K df = \int_{\delta(K)} f$$