Metaforická povaha matematiky

Petr Kůrka

1 Svět matematiky

Filosofické a vědecké pojmy prostupují myšlení moderního člověka do té míry, že jsou neoddělitelnou součástí jeho přirozeného světa. Ve zcela běžné řeči používáme taková slova jako ,,chaos", ,,kategorie", ,,duch", (například duch zákona), ,,deprese", ,,energie", ,,dynamika", ,,signál", ,,koule", nebo ,,bod". Tato slova za sebou mají dlouhý historický vývoj, od jejich předfilosofických a předvědeckých významů přes jejich specifická vymezení ve filosofii či vědě, až k jejich širším významům a konotacím v analogiích a metaforách. Hannah Arendtová ukazuje (v návaznosti na Kantovu Kritiku čistého rozumu) že filosofické pojmy vznikají jako metafory.

> Když Platón vzal z běžné řeči slova ,,duše" a ,,idea" a zavedl je do řeči filosofické, přičemž spojil neviditelný orgán člověka, duši, s čímsi neviditelným, co existuje ve světě neviditelného, s idejemi, musel tato slova slyšet ještě tak, jak se jich používalo v běžné nefilosofické řeči. **Psyché** je ,,dech života", který vydechuje umírající, a idea čili **eidos** je náčrt či plán, který musí mít před svým duchovním zrakem řemeslník ještě dřív, než započne se svou prací - je to obraz představy, který přetrvá vytváření i vytvořený předmět a stále může sloužit jako vzor, takže získává trvalost, jež mu dává naději na věčnou existenci v ideovém nebi.[1]

Nejinak se to má s pojmy přírodních věd nebo matematiky. Metaforickou povahou matematických pojmů a objektů se podrobně zabývají Lakoff a Núñez.[2] Přirozená čísla chápeme metaforicky jako počty objektů nebo pořadí, a na základě tohoto názoru s nimi zacházíme. Avšak číslo 3 se má k počtu tří oblázků tak, jako se má idea spravedlnosti ke spravedlivému rozhodnutí. Že čísla nejsou počty objektů nahlédneme, když uvažujeme o velmi velkých číslech (jako například $10^{10^{10}}$), která žádným počtům objektů v reálném světě neodpovídají. Ve světě matematiky však tato velká čísla mají nezpochybnitelnou existenci, známe mnoho jejich vlastností a vztahů mezi nimi. Bez nějakého názoru či intuice nelze sice matematiku vůbec dělat, ale náš názor občas selhává, když se střetne s logikou a dedukcí, kterou si vypomáháme při odkrývání vlastností matematických objektů a vztahů mezi nimi. Pak je třeba náš názor vyostřovat a rozvíjet dalšími metaforami, která nám dají alternativní pohled. Naší intuici o přirozených číslech rozvineme, když jí obohatíme o aritmetické operace sčítání, násobení a umocňování, a vytvoříme si pro tyto operace geometrický názor. Operaci součinu lze například chápat jako konstrukci obdélníku. Teprve s názorem pro aritmetickou operaci umocňování lze uvažovat o velkých číslech, která neodpovídají žádným počtům objektů.

Výraznou vlastností světa matematiky je jeho jasnost, zřetelnost a nezpochybnitelnost. Aritmetické identity jako 2+3=5, či geometrické vztahy jako Pythágorova věta, jsou evidentní a nevyvratitelné. V této nevyvratitelnosti matematických tvrzení vidí Reviel Netz hlavní důvod vzniku matematiky jako společenské aktivity ve starověkém Řecku. Řecká společnost oceňovala polemiku, diskusi a argumentaci a v matematice nalezla způsob argumentace, který nebyl zpochybnitelný žádnými sofistickými protiargumenty.

> Byly to zřejmé nedostatky rétoriky, které vedly k požadavku nevyvratitelnosti důkazu (bid for incontrovertibility for a proof), který by šel dále než pouhé přesvědčování....

[1] Arendtová, H.: Řeč a metafora. in: Myšlení o divadle II (připravil M. Petříček) Herrmann a synové, Praha 1993, str. 58

[2] Lakoff, G., Núñez, R. E. : Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being. Basic Books 2000

> Babylónská matematika se příliš neliší od babylónské literatury. To přičítám nepřítomnosti radikálně kritického postoje v babylónské kultuře. Je to tento kritický postoj, který odlišuje matematiku od ostatních oblastí. Jeho ostré světlo jasně odděluje oblasti, které jsou svou povahou méně otevřené kriticismu od ostatních. Takže zde je v Řecku velmi prestižní aktivita předkládání nevyvratitelných (compelling) argumentů. A je zde jeden typ argumentů, který je silnější než jiné, který dává méně prostoru pro kontroversi. A to je matematika.[3]

2 Matematický platonismus

Nezpochybnitelnost matematických vztahů vede k filosofické pozici, která vyznává odvěkou existenci a neměnnost světa matematických objektů. Tento matematický platonismus je přirozeným postojem matematiků a v matematické obci je značně rozšířen. Výstižně ho charakterizují Davis a Hersh.

> Podle platonismu jsou matematické objekty reálné. Jejich existence je objektivní fakt, zcela nezávislý na našich znalostech o nich. Nekonečné množiny, nespočetně nekonečné množiny, nekonečně-dimenzionální variety, křivky které vyplňují prostor - všechny tyto exponáty matematického zoo jsou určité objekty, některé známé a některé neznámé. Tyto objekty samozřejmě nejsou fyzikální ani materiální. Existují mimo čas a prostor fyzikální existence. Jsou neměnné - nebyly stvořeny a nikdy se nezmění ani nezaniknou. Na každou otázku týkající se matematických objektů existuje odpověď, ať už jsme ji schopni nalézt nebo ne. Matematik je empirický vědec podobně jako geolog. Nemůže cokoliv vynalézt, protože vše už zde je. Může pouze objevovat.[4]

Umírněnější platonismus představuje Roger Penrose, který ho odůvodňuje překvapivou krásou a elegancí některých matematických oblastí.

> V matematice jsou věci, pro které je objev mnohem vhodnější pojmenování než vynález. Jsou to ty případy, kdy (matematická) struktura dává ze sebe mnohem více než je do ní vloženo. Pak lze přijmout pohled, že matematici narazili na ,,Boží dílo". Jsou však jiné případy, kdy matematická struktura nemá tak přesvědčující jedinečnost, jako například, když uprostřed důkazu nějakého výsledku matematik zavádí jakousi důvtipnou konstrukci aby dosáhl specifický cíl. Pak obvykle struktura nedává více než je do ní vloženo a slovo ,,vynález" je vhodnější než ,,objev". Jedná se pak o pouhá lidská díla. Na skutečné matematické objevy se díváme jako na větší výkony či aspirace než by byly pouhé vynálezy.
>
> Takováto kategorizace není zcela nepodobná tomu, jak oceňujeme umělecká nebo inženýrská díla. Velká umělecká díla jsou vskutku ,,bližší Bohu" než ta běžná. Umělci mají nezřídka pocit, že ve svých největších dílech objevují věčné pravdy, které mají jistý druh předběžné éterické existence, zatímco jejich menší díla jsou svým způsobem libovolná na způsob lidských konstrukcí. ...
>
> Nemohu se ubránit pocitu, že v matematice je důvod pro víru v jistý druh éterické věčné existence přinejmenším těch hlubších matematických pojmů o dost silnější než v ostatních případech. V takových matematických ideách je jakási přesvědčivě působící (compelling) jedinečnost a univerzalita, která se zdá být zcela jiného druhu než jakou lze očekávat v umění či inženýrství.[5]

Důsledný platonismus je však zpochybněn negativními větami matematické logiky, jako jsou Gödelovy věty o neúplnosti. Názor a intuice totiž neposkytují celkový vhled do všech vlastností zkoumané matematické struktury, a všechny tyto vlastnosti nemůžeme odvodit ani prostředky logiky. Ukažme si to na struktuře přirozených čísel a diofantických rovnicích.

---

[3] Netz, R.: The shaping of deduction in Greek mathematics. Cambridge University Press 1999, str. 309,310
[4] Davis, P.J., Hersh, R.: The mathematical experience. Penguin Books, London 1988, str. 318
[5] Penrose, R.: The emperor's new mind. Oxford University Press, Oxford 1989, str. 96

3 Struktura přirozených čísel

Struktura přirozených čísel je založena na názoru přirozených čísel jako počtů objektů a na geometrickém názoru pro aritmetické operace. Na konkrétních číslech jsou aritmetické operace neproblematické, umíme je provádět mechanicky, algoritmicky. Od aritmetických operací s konkrétními čísly je třeba odlišit obecné vlastnosti aritmetických operací, jako je komutativní zákon pro sčítání x+y = y+x. To je vlastnost celé struktury přirozených čísel. Jeho platnost nemůžeme ověřit postupným ověřováním jednotlivých případů, můžeme ho pouze přijmout jako článek víry, jako axiom. Pro toto přijetí máme dobré důvody které jsou vposledku geometrické. Interpretujeme-li sčítání jako slučování skupin objektů stejného druhu (oblázků), přijímáme ho na základě názoru, který jsme si vytvořili pro operace s takovými skupinami objektů. Geometrické odůvodnění komutativního zákonu pro násobení x.y = y.x je založeno na uspořádání x.y objektů do obdélníku s x řádky a y sloupci. Přijmeme-li takto odůvodněné vlastnosti struktury přirozených čísel jako axiomy, můžeme logickými prostředky dokazovat další její vlastnosti.

Obecně přijímanou teorií čísel je Peanova aritmetika. Její axiomy jsou některé jednoduché algebraické identity, jako komutativní zákon pro sčítání a násobení. Její nejdůležitější axiom je ale Princip matematické indukce: Platí-li nějaké tvrzení o přirozených číslech pro jedničku, a vyplývá-li z platnosti pro n platnost pro $n+1$, platí toto tvrzení pro všechna přirozená čísla. V Peanově aritmetice lze vyjádřit a dokázat mnoho vlastností přirozených čísel. Kurt Gödel ale ukázal, že v Peanově aritmetice a v každé teorii s dalšími dodatečnými axiomy se vyskytují nerozhodnutelná tvrzení, která nelze dokázat ani vyvrátit. Teorii lze ovšem rozšířit tak, že buď takové tvrzení nebo jeho negaci přijmeme jako další axiom. V některých případech se volba mezi těmito dvěmi možnostmi přirozeně nabízí, když si dokážeme vytvořit názor, který takové tvrzení podporuje. Takový případ představuje Goodsteinova věta.[6] Týká se velmi velkých přirozených čísel a struktur, které nám do tohoto světa velkých čísel dávají nahlednout. Na základě tohoto názoru můžeme dospět k přesvědčení, že Goodsteinova věta platí. To je podporováno i tím, že Goodsteinovu větu lze dokázat v silnější teorii množin, která je založena na názoru množin jako konečných i nekonečných skupin objektů. Velká ale konečná přirozená čísla nahlížíme metaforicky jako by byla nekonečná, a v tomto názoru je klíč k důkazu.

Jsou ale také nezávislá tvrzení Peanovy aritmetiky, pro jejichž přijetí či odmítnutí nemáme v názoru žádnou oporu. Taková situace nastává při řešení některých diofantických rovnic, tj. algebraických rovnic, jejichž řešení hledáme pouze v oboru kladných přirozených čísel. Například rovnice $x^2 - y^2 = 1$ nemá v oboru kladných přirozených čísel žádné řešení, rovnice $x^2 - y^2 = 15$ má právě dvě řešení $x = 4$, $y = 1$ a $x = 8$, $y = 7$. Obecně pro každé přirozené číslo p má rovnice $x^2 - y^2 = p$ pouze konečný počet řešení, protože ji lze upravit na tvar $(x + y)(x - y) = p$. To znamená že jak x+y tak x-y jsou dělitelé čísla p a těchto dělitelů je jen konečně mnoho. Na druhé straně tzv. Pellova rovnice $x^2 - 2y^2 = 1$ má nekonečně mnoho řešení. Definujme posloupnosti x_n, y_n předpisem

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 1, & x_2 = 3, & x_3 = 7, & x_4 = 17, \dots & x_{n+1} = x_{n-1} + 2x_n \\ y_1 = 1, & y_2 = 2, & y_3 = 5, & y_4 = 12, \dots & y_{n+1} = y_{n-1} + 2y_n \end{array}$$

Pak $x_n^2 - 2y_n^2 = -1$, pro n lichá a $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$ pro n sudá. Naopak každé řešení x,y Pellovy rovnice má tvar $x = x_n$, $y = y_n$ pro nějaké sudé n. V teorii řetězových zlomků lze ukázat, že rovnice $x^2 - py^2 = 1$ má nekonečný počet řešení x,y právě když p není čtverec, tj. druhá mocnina přirozeného čísla. Jiný příklad diofantické rovnice je Fermatova rovnice $x^p + y^p = z^p$ s parametrem p. Pro $p = 1$ má rovnice nekonečně mnoho řešení, protože x,y můžeme volit libovolně. Pro $p = 2$ má rovnice také nekonečně mnoho řešení tvaru $x = a^2 - b^2,\ y = 2ab,\ z = a^2 + b^2$, kde $a > b$. Ale pro $p \geq 3$ rovnice žádné řešení v kladných přirozených číslech nemá. To je obsah velké Fermatovy věty, která byla dlouho otevřeným matematickým problémem a dokázal ji teprve Andrew Wiles roku 1995. Vidíme, že řešení některých diofantických rovnic je poměrně snadné, zatímco jiné patří mezi nejobtížnější matematické problémy. Některé diofantické rovnice jsou dokonce nerozhodnutelné, tj. nelze dokázat ani že mají konečný počet řešení ani že mají nekonečný počet řešení.

Tuto situaci ještě vyostřil Gregory Chaitin,[7] který ji spojil s teorií algoritmické složitosti. Chaitinova posloupnost $\Omega = \Omega_0\Omega_1\Omega_2, \dots$ je nekonečná posloupnost nul a jedniček, která je binárním

[6] Sochor, A.: Klasická matematická logika. Nakladatelství Karolinum, Praha 2001

[7] Chaitin, G. J.: An algebraic equation for the halting probability. in: The universal Turing machine (R.Herken, ed.) str. 279-283, Oxford University Press 1988

rozvojem pravděpodobnosti zastavení výpočtu náhodného algoritmu. Tato posloupnost je algoritmicky složitá v tom smyslu, že žádný její počáteční úsek délky n nelze vypočítat algoritmem kratším než n znaků. Další vlastností posloupnosti Ω je její náhodnost. Nuly i jedničky se v ní vyskytují se stejnou (asymptotickou) frekvencí 1/2, každé z binárních slov 00,01,10,11 se v ní vyskytuje se stejnou frekvencí 1/4, a žádný statistický test jí od náhodné posloupnosti neodliší. I když známe asymptotické statistické vlastnosti Chaitinovy posloupnosti, neznáme žádný její člen. Pro každé n je tvrzení $\Omega_n = 1$ nerozhodnutelné v Peanově aritmetice, navíc jsou tato tvrzení navzájem nezávislá. Stanovíme li dodatečnými axiomy jakkoliv jejich hodnoty, dostaneme bezesporné rozšíření Peanovy aritmetiky. Toto zesílení Chaitinových výsledků dokázal R. M. Soloway.[8] A nakonec, posloupnost Ω kóduje vlastnosti diofantických rovnic. S použitím výsledků A.Matijaseviče sestrojil Chaitin diofantickou rovnici $P_p(x) = 0$ s celočíselným parametrem p a dlouhým vektorem x celočíselných proměnných, takovou, že pro každé přirozené p platí $\Omega_p = 1$ právě když má rovnice $P_p(x) = 0$ nekonečně mnoho řešení x.

Volbou jednoho z tvrzení $\Omega_p = 0$ nebo $\Omega_p = 1$ za další axiom dostáváme dva různé aritmetické světy. To je analogické situaci v geometrii, kde přijetí či odmítnutí pátého Eukleidova axiomu o rovnoběžkách vede k alternativám eukleidovské a neeukleidovské geometrie. Vznik neeukleidovské geometrie znamenal, že si geometři vytvořili názor pro neeukleidovský svět, který je stejně legitimní jako názor pro svět eukleidovský. V případě rozšiřování Peanovy aritmetiky o axiomy $\Omega_p = 0$ či jejich negace však náš aritmetický názor selhává. Náhodnost posloupnosti Ω znamená, že se můžeme rozhodovat náhodně hodem mincí, ale osvětlující metafory pro tyto alternativní světy se nedobereme. Platónská představa odvěky existující struktury přirozených čísel, která by zahrnovala všechny vlastnosti přirozených čísel, je neudržitelná fikce.

> Some mathematical facts are true for no reason, they are true by accident! Některá matematická fakta jsou pravdivá bezdůvodně, jsou pravdivá náhodou![9]

4 Matematické objekty jako sociální konstrukty

Jednou z alternativ k matematickému platonismu je sociální konstruktivismus. Ústavní soud, peníze nebo jízdní řád nejsou ani hmotné či fyzikální objekty, ani mentální stavy, ani abstraktní ideje, existují však jako sociální konstrukty. Sociální konstruktivismus má mnoho podob.[10] Ve filosofii matematiky jsou jeho hlavními představiteli Reuben Hersh, P.J.Davis, G. Lakoff a R.E.Núñez. Lakoff a Núñez vidí matematické pojmy a objekty jako ztělesněné (embodied) metafory vzniklé přírodním výběrem a jejich existenci nezávislou na člověku explicitně odmítají.

> Matematika je přirozená součást bytí člověkem. Vzniká z našich těl, z našich mozků a z naší každodenní zkušenosti ve světě. Všechny kultury mají nějakou formu matematiky....
>
> Na matematice není nic záhadného, mystického, magického či transcendentního. Je to důležitá oblast, kterou lze vědecky studovat jako druh lidské činnosti. Matematika je důsledek lidské evoluční historie, neurobiologie, kognitivních schopností a kultury.[11]

Podobné evoluční stanovisko zastává i Reuben Hersh.

> Matematika je součást lidské kultury a historie, která je zakotvena v naší biologické povaze a v našem fyzickém a biologickém prostředí. Naše matematické ideje korespondují s naším světem ze stejného důvodu, proč jsou naše plíce zařízeny na zemskou atmosféru....
>
> Existuje svět idejí stvořený lidmi a existující v lidském sdíleném vědomí. Tyto ideje mají objektivní vlastnosti ve stejném smyslu, v jakém materiální objekty mají objektivní

[8] Solovay, R. M.: A version of Ω for which ZFC can not predict a single bit. CDMTCS-104, Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, University of California at Berkeley, May 1999.

[9] Chaitin, G. J.: Randomness in arithmetics. Scientific American, str. 80-85, July 1988.

[10] Konopásek, Z.: Věda, každodenní skutečnost a ,,přirozený svět".

[11] Lakoff, G., Núñez, R. E.: Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being. Basic Books 2000, str. 377

vlastnosti. Konstrukce důkazů a protipříkladů jsou metody objevování vlastností těchto idejí. Tato oblast vědění se nazývá matematika. [12]

Domnívám se však, že jakkoliv toto ,,humanistické stanovisko"přináší cenné náhledy na tělesné zakotvení matematických objektů a na metaforičnost matematických pojmů, nemůže plně vysvětlit podivuhodnou provázanost matematiky, vyvstávání neočekávaných souvislostí a estetické kvality některých matematických struktur. Roger Penrose právě v tom vidí argument pro umírněný matematický platonismus a říká, že některé matematické objekty existují více než jiné. Dobře je tento rozdíl vidět na srovnání struktury reálných a komplexních čísel. Algebraické a geometrické vlastnosti reálných čísel se odvíjejí od jejich interpretace jako množství (případně nedostatku či dluhu u záporných čísel), nesetkáváme se u nich s ničím radikálně neočekávaným, co by z tohoto názoru vybočovalo. U komplexních čísel je situace dramaticky odlišná. Objevuje se zde řada nečekaných souvislostí, geometrických symetrií a estetických kvalit, které ve struktuře reálných čísel chybí.

5 Komplexní čísla

Imaginární jednotka $i = \sqrt{-1}$ se v renesanční matematice objevila v souvislosti s rovnicí třetího stupně $x^3 = 3px + 2q$. Její řešení objevil Scipione del Ferro před rokem 1526 a v roce 1545 ho zveřejnil Girolamo Cardano ve tvaru

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Tento vzorec lze použít kdykoliv $q^2 \geq p^3$. Avšak rovnice má řešení i v případě, že tato podmínka neplatí. V roce 1572 si Rafael Bombelli všimnul, že s odmocninami záporných čísel lze formálně počítat podobně jako s čísly a platnost Cardanova vzorce rozšířit. Na příklad pro $p = 5$, $q = 2$ má rovnice $x^3 = 15x + 4$ řešení $x = 4$. Použijeme-li pravidlo $i^2 = -1$, dostáváme

$$\begin{aligned} (2 \pm i)^3 &= 8 \pm 12i - 6 \mp i = 2 \pm 11i, \\ x &= \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = 2 + i + 2 - i = 4. \end{aligned}$$

Bombelli tedy uviděl imaginární jednotku $i = \sqrt{-1}$ metaforicky jako číslo a začal s ní jako s číslem zacházet. Tato metafora se ukázala být velmi plodnou. Komplexní čísla lze sčítat, odčítat, násobit, dělit i odmocňovat.Všechny tyto operace jsou založeny na jediném vztahu $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + b) + (c + d)i \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\ \frac{1}{a + bi} &= \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \end{aligned}$$

Je pozoruhodné, že, přidání řešení jediné kvadratické rovnice $z^2 + 1 = 0$ si již vynutí, že každá algebraická rovnice tvaru $z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n = 0$ má v komplexní oblasti řešení (Gaussova věta). Při rozvíjení metafory imaginární jednotky jako čísla se objeví další překvapivé vztahy. Součtové vzorce pro sinus a cosinus lze v komplexních číslech napsat jediným jednodušším vztahem (de Moivrova formule)

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x + y) + i \sin(x + y) &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \end{aligned}$$

Vidíme, že funkce $\cos x + i \sin x$ se chová podobně jako exponenciála, která také převádí součet na součin: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Další podobnosti se objeví když tyto funkce vyjádříme mocninnými řadami

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

[12] Hersh, R.: What is mathematics, really? Oxford University Press, Oxford 1997, str. 17, 19

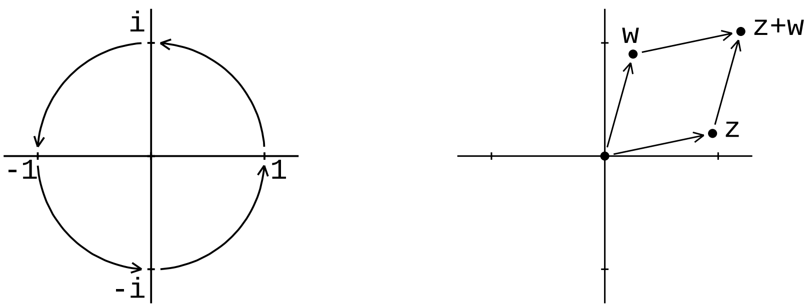
Definujeme-li exponenciálu imaginárního stejnou řadou, dostáváme Eulerův vztah (publikovaný roku 1748)

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \cdots \\ &= \cos x + i \sin x, \end{aligned}$$

který ukazuje vztah exponenciály ke goniometrickým funkcím. V oblasti reálných čísel je tento vztah zcela skryt.

6 Komplexní rovina

Je pozoruhodné, že všechny tyto výsledky byly získány formálně algebraicky bez využití geometrického náhledu kterým je dnes komplexní rovina. Tomuto náhledu ovšem předcházel pojem reálné přímky, tj. metafora reálného čísla jako bodu na přímce. Reálnou přímku sestrojíme tak, že na přímce zvolíme počátek (nulový bod), jednotku délky a orientaci. Tím je určena poloha čísla 1 a tím i poloha všech ostatních čísel. Aritmetické operace představují geometrické transformace reálné přímky. Operace $f_a(x) = x+a$ přičtení čísla a znamená posunutí o a doprava. Přitom složení těchto operací je opět posunutí $f_a(f_b(x)) = f_{a+b}(x)$. Posunutí jsou právě ty transformace reálné přímky, které zachovávají vzdálenost a orientaci.



Obrázek 1: Komplexní rovina

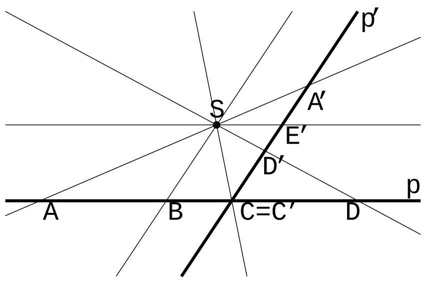
Komplexní rovinu objevil až Jean-Robert Argand roku 1806. Umístění komplexních čísel v rovině lze odůvodnit geometrickou interpretací operace násobení. Pro kladné $a > 0$ představuje transformace $g_a(x) = ax$ podobnost reálné přímky s koeficientem a. Přitom skládání těchto podobností odpovídá násobení příslušných koeficientů: $g_a(g_b(x)) = g_{ab}(x)$. Interpretujeme-li transformaci násobení jako pohyb, reálná přímka při něm neopouští své místo, pouze se roztahuje nebo smršťuje. Naproti tomu transformace $g_{-1}(x) = -x$ násobení zápornou jednotkou odpovídá otočení reálné přímky o 180° a tento pohyb se může uskutečnit jedině v nějakém prostoru vyšší dimenze, například v rovině. Má-li pro transformaci g_i násobení imaginární jednotkou platit $g_i(g_i(x)) = g_{-1}(x)$, měla by představovat otočení o 90°. Číslo i je tedy třeba umístit na kolmici k reálné přímce ve vzdálenosti 1 od nuly (obrázek 1 vlevo). Tím současně dostáváme umístění všech imaginárních čísel na kolmici k reálné přímce. Podobně násobení odmocninou z i, tj. $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$ by mělo představovat otočení o 45°, takže číslo $(1+i)/\sqrt{2}$ a všechny jejich reálné násobky je třeba umístit na přímku, která svírá s reálnou i imaginární osou úhel 45°. Takto postupně vyplníme komplexními čísly celou rovinu, přitom reprezentace bodů roviny komplexními čísly je ekvivalentní pravoúhlé kartézské soustavě. Číslo $a + bi$ je umístěno do bodu s kartézskými souřadnicemi (a,b). Z toho plyne že se komplexní čísla sčítají jako vektory (obrázek 1 vpravo).

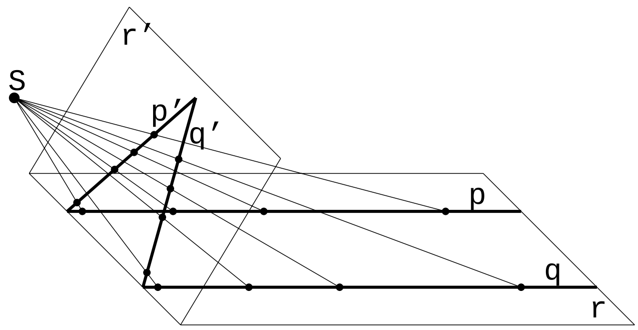
Ještě výrazněji je dokonalost struktury komplexních čísel vidět v diferenciálním počtu. Pojem derivace je v komplexní oblasti definován formálně stejně jako v oblasti reálné. Komplexní funkce, které mají (v nějaké oblasti) derivaci, se nazývají holomorfní. Tento termín zachycuje celistvost jejich tvaru, a to je vlastnost, kterou se výrazně odlišují od analogického pojmu diferencovatelné funkci v reálné oblasti. Holomorfní funkce mají již derivace všech řádů, lze je vyjádřit mocninnými řadami a jsou jednoznačně určeny svými hodnotami v libovolně malé otevřené množině. Nic podobného v reálné oblasti neplatí. Tam kde je derivace holomorfní funkce nenulová, je tato funkce konformní, to znamená že zachovává úhly mezi křivkami. To je výrazná geometrická vlastnost, která komplexní analýze dává mnohem větší estetickou kvalitu než jakou má analýza reálná.

Podivuhodné vlastnosti struktury komplexních čísel tím zdaleka nekončí. Ve dvacátém století vznikla komplexní analytická dynamika, která odkryla pozoruhodné fraktální a soběpodobné tvary atraktorů holomorfních zobrazení známých jako Juliovy množiny a jejich parametrického prostoru, ve kterém vyvstává Mandelbrotova množina. Nejpřekvapivější je však široké uplatnění komplexních čísel ve fyzice. Kvantová mechanika se odehrává v komplexních Hilbertových prostorech, které ve srovnání s reálnými Hilbertovými prostory mají mnohem zajímavější strukturu. Bez komplexních čísel by kvantová mechanika nebyla vůbec myslitelná.

7 Projektivní geometrie

Komplexní analýza nepatří mezi elementární partie matematiky, a pochopení jejích pozoruhodných vlastností vyžaduje náročné studium. Projektivní geometrie poskytuje podobný estetický zážitek a je přitom stejně jednoduchá jako geometrie eukleidovská. Vznikla v renesanci z geometrických úvah o perspektivě. Předcházela jí pojednání o projektivní metodě od několika renesančních malířů, mezi nimi Leonarda da Vinci a Albrechta Dürera. Zakladatelem projektivní geometrie je Girard Desargues (1591-1661), k jejímu vzniku a rozvoji přispěli i Johannes Kepler a Blaise Pascal. Představme si malíře, který si promítá scénu na plátno. Bod scény promítá na bod plátna paprskem, který přichází do jeho oka, promítá tedy třírozměrný prostor scény na dvourozměrnou rovinu plátna. Jedná-li se o malbu ploché krajiny, dostáváme geometricky jednodušší situaci průmětu jedné roviny na druhou. V kontextu eukleidovské geometrie chápeme malovanou krajinu i plátno jako nekonečnou rovinu.





Obrázek 2: Projekce přímky(vlevo) a projekce rovnoběžek (vpravo)

Pro pochopení této situace uvažujme nejprve jednodušší jednorozměrný případ průmětu přímky p, na přímku p' z bodu S, který neleží na žádné z nich (obrázek 2 vlevo). Body A,D přímky p se paprsky procházejícími středem projekce S promítají na body A', D' přímky p'. Průsečík C přímek p a p' se promítá sám na sebe, tedy C=C'. Bod B, jehož paprsek SB je rovnoběžný s přímkou p, je jediným bodem přímky p, který nemá žádný průmět na přímku p'. Naopak bod E', jehož paprsek je rovnoběžný s přímkou p, je jediným bodem přímky p', který není obrazem žádného bodu přímky p.

Projekce přímky p na přímku p' má tedy dvě nepříjemné vyjímky, body B a E'. Při úvahách o projekcích musíme neustále ověřovat, zda uvažovaný bod nějakou projekci má. Tato situace se zjednoduší, jestliže k přímkám p a p' formálně přidáme tzv. nevlastní body E a B' a stanovíme, že průmětem B je B' a průmětem E je E'. Tento formální přístup nám však úplně nestačí a klademe si otázku, kde tyto přidané nevlastní body jsou. Zde pomůže dynamická metafora. Přibližuje-li se bod X přímky p k bodu B zleva, odpovídající bod X' se na přímce p' vzdaluje nahoru do nekonečna. Přibližuje-li se bod X k bodu B zprava, odpovídající bod X' se na přímce p' vzdaluje dolů do nekonečna. Nevlastní bod B' přímky p' si tedy představujeme v nekonečnu v obou směrech.

Vraťme se nyní k dvourozměrnému případu, kdy body roviny r promítáme na body roviny r' paprsky procházejícími bodem S, který na žádné z těchto rovin neleží (obrázek 2 vpravo). Postupujeme stejně jako v jednorozměrném případě. Přidáváme nevlastní body tak aby projekce byla vzájemně jednoznačná. Ke každé přímce p roviny tedy přidáváme nevlastní bod. Má-li však korespondence být vzájemně jednoznačná, musíme rovnoběžným přímkám přidat stejný nevlastní bod. Vzdalují-li se body X,Y rovnoběžek p a q do nekonečna, přibližují se oba jejich obrazy X' a Y' v rovině r' ke stejnému bodu. Rovnoběžky p, q se promítají na různoběžky p', q'. Každá přímka roviny r rovnoběžná s p má tedy stejný nevlastní bod: rovnoběžné přímky se protínají v nekonečnu. Kromě nevlastních bodů je třeba přidat také nevlastní přímku. Ta je obrazem roviny procházející bodem S a rovnoběžné s r.

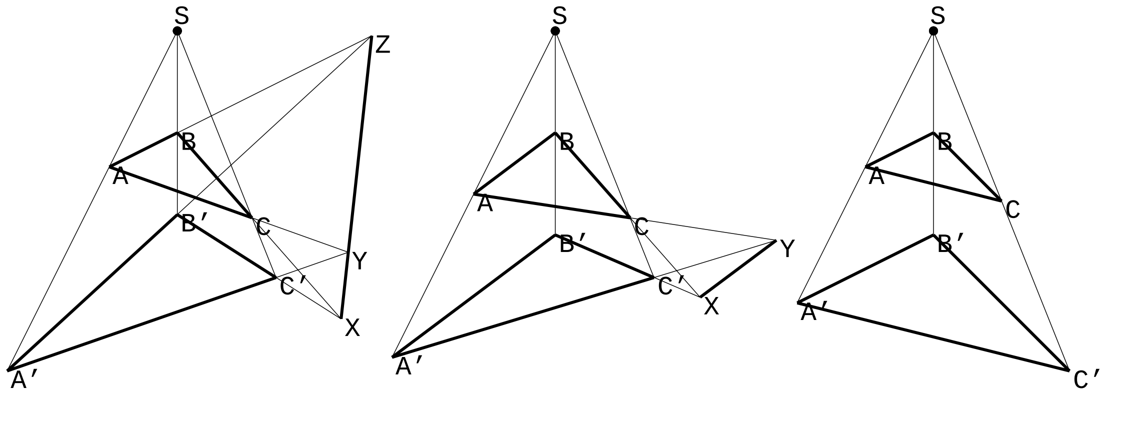
Přidáním nevlastních bodů a nevlastní přímky vznikne z eukleidovské roviny projektivní rovina. Nevlastní body projektivní roviny jsou určeny směry, tj. soubory navzájem rovnoběžných přímek. V každém směru je jediný nevlastní bod, který leží na každé přímce tohoto směru. V projektivní rovině je také jediná nevlastní přímka, na které leží všechny nevlastní body a neleží na ní žádný vlastní bod. Projektivní rovina některé geometrické vlastnosti s eukleidovskou rovinou sdílí, některými vlastnostmi se však od ní liší. Příklad tvrzení, které platí jak v eukleidovské tak v projektivní rovině je jeden z Eukleidových axiomů:

$$\text{Každé dva různé body určují jedinou přímku, na které oba leží.} \tag{1}$$

Jsou-li A,B dva různé nevlastní body, jedinou přímkou na které oba leží je nevlastní přímka. Je-li bod A vlastní a bod B nevlastní, existuje jediná přímka která prochází bodem A ve směru B. Nakonec jsou-li A,B dva různé vlastní body je eukleidovská přímka AB která je spojuje (spolu se svým nevlastním bodem) jedinou projektivní přímkou, na které oba leží. Příklad tvrzení, které platí v projektivní rovině ale ne v eukleidovské je

$$\text{Každé dvě různé přímky se protínají v jediném bodě.} \tag{2}$$

Dvě (eukleidovské) různoběžky se totiž protínají ve vlastním bodě, dvě rovnoběžky se protínají ve společném nevlastním bodě a vlastní přímka s nevlastní přímkou se protíná v jediném nevlastním bodě. Vidíme, že vlastnosti projektivní geometrie jsou jednodušší než vlastnosti eukleidovské geometrie. Vyjímečný případ rovnoběžek, které se v eukleidovské geometrii neprotínají, v projektivní geometrii nenastává. Uvedená tvrzení nás vedou k pozoruhodnému jevu duality. Tvrzení (1) je s Tvrzením (2) navzájem duální. Jedno vznikne z druhého, když místo bodu říkáme přímka a místo přímka říkáme bod. Tato dualita je obecnou vlastností projektivní geometrie. Platí-li v projektivní geometrii nějaké tvrzení, platí v ní také tvrzení k ní duální. To je první náznak toho, že projektivní rovina je dokonalejší a zajímavější struktura než eukleidovská rovina.



Obrázek 3: Desargueova věta

8 Desargueova věta

Desargueova věta se týká trojúhelníků. Trojúhelník chápeme buď jako trojici bodů (vrcholů), které neleží na přímce, nebo duálně jako trojici přímek (stran), které se neprotínají ve stejném bodě. Označíme-li vrcholy trojúhelníka A,B,C, značíme jeho strany a=BC, b=AC, c=AB. Naopak vrcholy jsou průsečíky stran A=b.c, B=a.c, C=a.b. Desargueova věta je následující tvrzení:

> Nechť ABC, A'B'C' jsou trojúhelníky takové, že přímky AA', BB', CC' se protínají v jediném bodě S. Existují-li průsečíky přímek X = BC.B'C', Y = AC.A'C', Z= AB.A'B', leží X,Y,Z na přímce (obrázek 3 vlevo).

Takto vyslovena je Desargueova věta větou rovinné eukleidovské geometrie. Podmínka existence průsečíků nás však upozorňuje na omezení, které projektivní geometrie opustila. V projektivní geometrii platí Desargueova věta bez tohoto omezení. Chceme-li jí vyjádřit v eukleidovské geometrii, musíme přidat další dvě tvrzení:

> Nechť ABC, A'B'C' jsou trojúhelníky takové, že přímky AA', BB', CC' se protínají v jediném bodě S. Jsou-li přímky AB, A'B' rovnoběžné a existuje-li průsečík X =BC.B'C', existuje také průsečík Y = AC.A'C', a přímka XY je rovnoběžná s AB i s A'B' (obrázek 3 uprostřed).

> Nechť ABC, A'B'C' jsou trojúhelníky takové, že přímky AA', BB', CC' se protínají v jediném bodě S. Je-li přímka AB rovnoběžná s A'B' a je-li přímka BC, rovnoběžná s B'C', je také přímka AC rovnoběžná s A'C' (obrázek 3 vpravo).

V projektivní geometrii říkají všechny tři věty totéž. V druhém případě se říká, že nevlastní průsečík Z= AB.A'B', leží na přímce XY. Ve třetím případě se říká, že všechny průsečíky X,Y,Z leží na nevlastní přímce. Tři související ale odlišné věty eukleidovské geometrie jsou tedy speciálními případy jediné věty projektivní geometrie. Vidíme jak nevlastní body a přímky geometrii zjednodušují a odkrývají souvislosti, které by bez nich zůstaly skryté.

Důkaz Desargueovy věty přináší další náhled. Uvažujme třírozměrnou variantu Desargueovy věty, kdy trojúhelníky ABC, A'B'C' leží v různých rovinách třírozměrného prostoru, a přímky AA', BB', CC' se protínají v jediném bodě S, který neleží v žádné z těchto rovin. Je to situace se kterou jsme se již setkali: rovinu trojúhelníku ABC promítáme z bodu S na rovinu trojúhelníku A'B'C'. Důkaz této třírozměrné verze Desargueovy věty je velmi jednoduchý: Průsečíky X,Y,Z leží v obou rovinách ABC i A'B'C', průnik těchto dvou rovin je přímka, na které musí ležet všechny tři body X,Y,Z. Z třírozměrné Desargueovy věty plyne dvourozměrná Desargueova věta pomocí principu kontinuity. Kdyby ve dvourozměrném případě body X,Y,Z neležely na přímce, neležely by na ní ani při dostatečně malém posunutí bodů S,A,B,C,A',B',C'. Ale při libovolně malém posunu bodu S mimo rovinu ABC již dostáváme třírozměrný případ, ve kterém Desargueova věta platí.

Princip kontinuity, který jsme použili při důkazu Desargueovy věty, není klasický geometrický argument. Klasická geometrie - eukleidovská, projektivní či neeukleidovská - je totiž statická, zabývá se geometrickými objekty, které se nehýbou. Princip kontinuity je naproti tomu dynamický, dívá se na geometrické objekty v pohybu, a všímá si, kdy je tento pohyb spojitý, tj. kdy malé změny počátečního určení vedou k malým změnám výsledné konfigurace. Invokací principu kontinuity jsme nezískali pouze další geometrickou větu, ale obohatili jsme geometrii o dynamickou metaforu pohybu, která proti statickému pohledu přináší nové náhledy.

Ilustrujme si nyní na Desargueově větě ještě Princip duality. Nahrazujeme-li body A,B,C přímkami a,b,c, a naopak, dostáváme z Desargueovy věty následující tvrzení:

> Nechť a,b,c, a',b',c' jsou strany trojúhelníků a nechť jejich průsečíky X=a.a', Y=b.b', Z=c.c' leží na přímce. Pak pro průsečíky A=b.c, B=a.c, C=a.b, A'=b'.c', B'= a'.c', C'= a'.b' platí že přímky AA', BB', CC' se protínají v jednom bodě.

To je obrácená implikace než Desargueova věta. Princip duality nám tedy zesiluje Desargueovu větu na ekvivalenci: Body X,Y,Z leží na přímce právě tehdy když jsou trojúhelníky ABC a A'B'C' v perspektivě. Takových zjednodušení jako je spojení tří variant Desargueovy věty do jediné přináší projektivní geometrie mnoho. Velmi nápadné je to při studiu kuželoseček, které v historii projektivní geometrie sehrály podstatnou roli. Jak napovídá jejich jméno, kuželosečky vznikají jako průniky kuželové plochy s rovinou. Podle sklonu sečné roviny k ose kužele se na řezu objeví elipsa, parabola nebo hyperbola, takže jedna z nich vzniká z druhé projekcí z vrcholu kuželové plochy. Klasifikace kuželoseček na uvedené tři typy je dána jejich vzájemnou polohou s nevlastní přímkou. Elipsa nemá žádný nevlastní bod, nevlastní přímka ji neprotíná. Parabola má jediný nevlastní bod ve směru osy paraboly, nevlastní přímka je tedy její tečnou. Hyperbola má dva nevlastní body ve směrech svých asymptot, nevlastní přímka je tedy její sečnou. V projektivní geometrii tedy mezi elipsou, parabolou a hyperbolou není podstatný rozdíl, liší se pouze svou polohou vzhledem k nevlastní přímce.

9 Paprsky a souřadnice

Konstrukce projektivní roviny přidáním nevlastních bodů a nevlastní přímky má stále ještě jednu vadu na kráse. Nevlastní body jsme zavedli formálním způsobem, nemají rovnocenný statut s body vlastními. Do světa projektivní geometrie vstoupíme teprve tehdy, když nevlastní body nebudou odlišovány od bodů vlastních. Klíčem k tomu je pojem paprsku. Uvažujme pevný bod S v třírozměrném prostoru a všechny paprsky, tj. přímky, které bodem S procházejí. Pro každou rovinu r, na které S neleží, dostáváme korespondenci mezi paprsky a (vlastními i nevlastními) body roviny r. Paprsku p se přiřazuje průsečík p s r pokud tento průsečík existuje, nebo směr přímek s ním rovnoběžný. Chápeme-li body projektivní roviny jako paprsky procházející bodem S, není žádný rozdíl mezi vlastními a nevlastními body. Tento rozdíl se projevuje teprve v jednotlivých rovinách. Rozlišení mezi vlastními a nevlastními body roviny ale závisí jen na umístění této roviny v třírozměrném prostoru.

Tak jsme pro strukturu projektivní roviny získali další názor, který nám umožňuje vidět některé vlastnosti projektivní roviny zřetelněji. Tyto dva odlišné názory, tj. projektivní rovina jako eukleidovská rovina rozšířená o nevlastní body, a projektivní rovina jako množina paprsků procházejících pevným bodem S třírozměrného prostoru, si navzájem neprotiřečí ale doplňují se, a poskytují plastičtější pohled. Projektivní rovina totiž není ani jedno ani druhé, je to struktura, ve které platí určité vztahy a obě interpretace (či modely) nám dávají vhled do některých jejích vlastností.

Nakonec je tu ještě třetí názor projektivní roviny založený na analytické geometrii. Descartova analytická geometrie pojímá bod eukleidovské roviny jako dvojici reálných čísel $X = (x_1, x_2)$ jeho souřadnic. Také toto je metafora, která umožňuje geometrické vztahy odvodit algebraickýn výpočtem. I projektivní geometrie má svou analytickou verzi. Umístíme-li bod S třírozměrného eukleidovského prostoru do počátku souřadné soustavy, je paprsek procházející bodem S jednorozměrný podprostor třírozměrného vektorového prostoru, tj. množina násobků nenulového vektoru (uspořádané trojice reálných čísel) $X = (x_1, x_2, x_3)$. Je-li λ nenulové reálné číslo, určuje vektor $\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ stejný paprsek a tedy stejný bod projektivní roviny jako vektor X. Přímka projektivní roviny je pak dvourozměrný lineární podprostor třírozměrného prostoru. Každý takový dvourozměrný podprostor má rovnici tvaru $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, s trojicí čísel (tedy vektorem) $a = (a_1, a_2, a_3)$. Dvourozměrný podprostor daný vektorem a sestává ze všech bodů X, pro které rovnice platí. Vektor a určuje stejný podprostor jako jeho násobek $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$. Na vektor a přímky projektivní roviny se tedy můžeme dívat jako na vektor, který určuje bod projektivní roviny, a naopak. Tímto způsobem dostáváme v analytické projektivní geometrii Princip duality: vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi body a přímkami projektivní roviny. Přiřadíme-li bodu s vektorem X přímku s vektorem X a naopak, zůstává při této korespondenci zachován vztah, že bod X leží na přímce vyjádřený rovnicí $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Z toho plyne, že přiřazení duality zachovává všechny vlastnosti projektivního prostoru.

10 Tvoření a vznikání skrze metaforu

Viděli jsme že pojmy jako komplexní číslo nebo nevlastní bod vznikají jako metafory a jen díky těmto metaforám s nimi můžeme pracovat. Náhled, že pojmy včetně pojmů fyzikálních jsou metaforické povahy nabízí Paul Ricœur.

> $\cdots$ Obvykle míváme tendenci stavět proti sobě ,,vynalézat" a ,,nalézat". Ve velkých básnických dílech však není rozdílu mezi vynalézáním a nalézáním - tvořit (v silném

slova smyslu) znamená obojí. Je zbytečné se ptát, zda to či ono vidění světa existovalo před vytvořením díla, nebo zda začíná existovat až s dílem samým: obojí je pravda. V jistém smyslu je tvůrce pod tlakem čehosi, co má být řečeno. Vezměme takového Cézanna: maloval stokrát jednu a tu samou horu - proč? Každé to dílo bylo dokonalé. Jenže před ním stálo cosi, co si žádalo být malováno. A přitom ono ,,cosi" existovalo jen tehdy, když to bylo malováno. V tomto smyslu se malíř, jako každý tvůrce, cítí vázán nekonečným dluhem. Proto tedy říkáme, že vynalézat rovná se nalézat. Přitom však to, co je nalezeno, existuje teprve tehdy, když je to vybudováno dílem. Je to velký paradox. Ale myslím, že ke stejnému paradoxu by nás přivedla epistemologie fyziky nebo astronomie. Newtonovský svět existoval v jistém smyslu před Newtonem, avšak kulturně existuje až po Newtonovi: teprve tehdy začali lidé obývat newtonovský svět. A přitom by bylo absurdní, kdybychom řekli, že Newton vytvořil svět tím, že vytvořil astronomii. V tomto pojetí se poezie zásadně neliší od vědy. Rozšiřuje pouze oblast světa za hranice toho, co je měřitelné a čím můžeme pomocí techniky manipulovat. Nicméně, ty aspekty světa, které zjevuje poezie, jsou právě tak skutečné, jako je skutečné to, co odhaluje a vynalézá věda. Proto musíme mít velmi otevřené pojetí skutečnosti. To, co máme za skutečnost, se neustále mění podle toho, jak ji díla všeho druhu zároveň vynalézají i objevují.[13]

Metaforická existence ale není existence podřadného druhu:

> Ricœur ukazuje, že nejen básnické obrazy, nýbrž i všechny vědecké modely a teorie, ať se tváří jakkoliv objektivně a definitivně, jsou vlastně *velkými metaforami* - způsoby mluvy pomocí představ a pojmů vzatých z jiné, známé zkušenosti (srv. ,,planetární model atomu" či ,,oblak elektronu"); všimněme si ostatně metaforičnosti i tak odborných termínů jako ,,hladina cukru v krvi", ,,kolísání cen" atp. To ovšem neznamená, že by tyto vědecké popisy světa nebyly pravdivé, že by to byly ,,pouhé metafory": vždyť jde o faktické poznatky par excellence. Jejich metaforická povaha naopak ukazuje, že sama pravda spočívá v metafoře, že *bytí samo je metaforické.* [14]

Ve strukturách komplexních čísel a projektivní roviny se šťastně sešly metafory formálně-algebraické, geometrické i dynamické. Na těchto strukturách je vidět, že matematické pojmy a objekty vznikají jako metafory, a existují do té míry, do jaké jsou navzájem provázanými metaforami podloženy. Tento matematický svět, stvořený a osvětlený metaforou, lze do jisté míry překračovat a rozšiřovat rozumem, logikou a dedukcí. Zde však již tápeme v polosvitu, dokud se neobjeví nová osvětlující metafora. Tímto neustálým tvořením skrze metaforu matematický svět vzniká. Jak zdůrazňují sociální konstruktivisté, tento svět vzniká v lidské kultuře. Ale vynořování nečekaných souvislostí, přítomnost smyslu ve světě matematiky, její krása i efektivita při popisu světa fyzikálního, nemá jiné než nadpřirozené vysvětlení. Bylo by velmi domýšlivé říkat, že tento svět tvoříme my lidé sami ze sebe. Každý autor - umělec, vědec či řemeslník - ví, že dílo které tvoří vzniká kdesi v hlubině jeho bytí, a on mu jen pomáhá na svět. Také svět matematiky je součástí tohoto neustávajícího božího tvoření. Jeho pozoruhodné vlastnosti nejsou výsledkem geniálního rozmyslu matematiků ale božím darem. Za obzorem tohoto stvořeného světa je ale neustále přítomné apeiron - bezmezné a beztvaré. Tam již nepomáhá názor, intuice ani logika.

[13] Ricœur, P.: Krize subjektu v západní filosofii in: Neubauer, Z.: O sněhurce aneb cesta za smyslem bytí a poznání. Malvern, Praha 2004, str. 122

[14] Neubauer, Z.: O sněhurce aneb cesta za smyslem bytí a poznání. Malvern, Praha 2004, str. 158