MATEMATICKÉ POJMY, OBJEKTY A NÁZOR: SPOJITOST A SOUVISLOST

PETR KŮRKA

V matematice se studují matematické pojmy, objekty a vztahy, které zachycují intuitivně tušené rysy přirozeného světa. Matematické pojmy se definují implicitně axiomy, které vyjadřují naše intuitivní představy o vztazích v přirozeném světě. Vztahy mezi matematickými pojmy a objekty se formulují jako matematické věty a zdůvodňují se důkazy, které vychází z axiomů a sestávají z logické argumentace. Při hledání matematických vztahů a důkazů se řídíme názorem - intuitivní představou matematických objektů a struktur. Přitom se opíráme o logiku, o formální symbolické manipulace nebo o výpočty. Matematický názor není statický, ale mění se tak, jak se vyvíjí naše znalost matematických objektů a pochopení vztahů mezi nimi. Matematika se rozvíjí tím, že se objevují podobnosti a analogie mezi jejími různými oblastmi. Takové analogie vedou k hlubšímu pochopení studovaných struktur a k formulaci obecnějších teorií, které odhalují podstatu studovaných vztahů. V obecnějších teoriích se vztahy mezi matematickými pojmy objevují v čistém tvaru oproštěném od nahodilostí, které je doprovázejí na nižších stupních abstrakce. Ukážeme si takový vývoj k abstrakci a k obecnosti od prvních tápavých pokusů až k dokonalé elegantní teorii na pojmech souvislosti a spojitosti v geometrii a v topologii.

Pojmy spojitosti a souvislosti používáme při popisu situací a dějů přirozeného světa. Děj je spojitý, pokud během krátkých časových intervalů dochází jen k malým změnám, nenastávají náhlé zvraty. Prostorová oblast je souvislá, když se neskládá z oddělených částí, když jí můžeme celou projít aniž bychom jí opustili. V matematice byl jev spojitosti tematizován a definován Bernardem Bolzanem. Funkční závislost je spojitá, jestliže malé změny nezávisle proměnné nezpůsobí velké změny závislé proměnné. Souvislost je jedna z podstatných vlastností kontinua reálných čísel a vyjadřuje, že mezi reálnými čísly nejsou žádné mezery. V průběhu 19. století byl pojem spojitosti postupně zobecňován a přitom se stále zřetelněji zjevovala jeho podstata. Současně byla identifikována souvislost jako jedna z podstatných vlastností kontinua a objasnil se vztah těchto dvou pojmů. Tento vývoj vyvrcholil začátkem 20. století v obecné topologii. Souvislost se zde chápe jako vlastnost topologických prostorů a spojitost jako vlastnost zobrazení mezi těmito prostory. Vztah mezi oběma pojmy je vyjádřen formálně velmi jednoduchou větou, že spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý prostor. Tato jednoduchost by však nebyla myslitelná bez předcházejícího dlouhého a komplikovaného vývoje.

1. Logika a názor

Mezi vším lidským věděním se matematické vědění vyznačuje nezpochybnitelnou apodiktickou jistotou. Argumenty matematických důkazů jsou přesvědčivé a nevyvratitelné. O tom, které matematické věty platí a které důkazy jsou korektní, vládne v matematické komunitě téměř naprostá shoda, i když u nových výsledků může nějakou dobu trvat než se tato shoda ustaví. Tuto nezpochybnitelnost matematiky odůvodňují filosofové různým způsobem. Gottfried Wilhelm Leibniz zakládá matematiku pouze na rozumovém logickém uvažování.

> „Jsou dále dva druhy pravd, totiž pravdy rozumové a faktové. Rozumové pravdy jsou nutné a jejich opak je nemožný, faktové pravdy jsou naproti tomu nahodilé (kontingentní) a jejich opak je možný. Je-li nějaká pravda nutná, lze ukázat na její důvod prostřednictvím analýzy, rozkládá-li se na jednodušší ideje a pravdy, až dospěje k původním. Tak se u matematiků převádějí spekulativní poučky a praktické předpisy prostřednictvím

> analýzy na *definice, axiómy* a *postuláty.* Přitom se nakonec dochází k jednoduchým idejím, jejichž definici nelze podat, i k axiomům a postulátům, nebo stručně, k *původním principům*, jež nejsou schopny důkazu a také ho nepotřebují. Jsou to identické věty, jejichž opak obsahuje výslovný spor.“[1]

Na Leibnize navazují logicisté Gottlob Frege a Bertrand Russell, kteří chápou celou matematiku jako součást logiky, pokoušejí se všechny matematické věty i axiomy odvodit z čistě logických principů[2]. Proti Leibnizovi se vymezuje Immanuel Kant, který poukazuje na roli názoru v matematice. Leibnizovu rozlišení pravd rozumových a faktových odpovídá Kantovo rozlišení soudů apriorních a aposteriorních.

> „Především musíme poznamenat, že vlastní matematické věty jsou vždy apriorními, a nikoli empirickými soudy, protože se vyznačují nutností, která nemůže být čerpána ze skutečnosti. Jestliže tuto moji tezi nechcete připustit, pak ji tedy omezím na *čistou matematiku*, jejíž pojem sám už s sebou nese, že v ní není obsaženo poznání empirické, ale pouze čisté poznání *a priori*.“[3]

Apriorní soudy ale Kant dále dělí na soudy analytické, které spočívají plně na zásadě sporu, tj. na logice, a na soudy syntetické, které spočívají na čistém názoru a zahrnují celou matematiku.

> „Co je podstatné u čistého *matematického* poznání a čím se odlišuje od všeho jiného poznání *a priori*, je okolnost, že musí postupovat *nikoliv pomocí* pouhých *pojmů*, nýbrž tak, že je názorně konstruuje. Jelikož tedy musí vycházet ve svých větách za hranice pojmů, tedy jít k tomu, co je obsaženo v názoru, který pojmu odpovídá, nemohou a nebudou matematické věty nikdy vznikat pitváním pojmů, tedy analyticky, a jsou proto vesměs syntetické.“[4]

Kantův názor je názor třírozměrného eukleidovského prostoru a jednorozměrného času. Všechny geometrické věty jsou na názoru třírozměrného prostoru založeny a je to tento názor, který jim dodává apodiktickou jistotu.

> „Geometrie je věda, která určuje vlastnosti prostoru synteticky, a přece a priori. Jaká asi musí být představa prostoru, aby bylo možné takové jeho poznání? Prostor musí být původně názorem, neboť z pouhého pojmu se nedají odvodit žádné věty, které jej překračují, k čemuž v geometrii přece dochází. Avšak tento názor se v nás musí nacházet a priori, tj. před veškerým vnímáním nějakého předmětu, musí to tudíž být čistý, nikoli empirický názor. Neboť geometrické věty jsou vesměs apodiktické, tj. spojené s vědomím své nutnosti, např. že prostor má jen tři rozměry; takové věty však nemohou být empirickými nebo zkušenostními soudy, ani z nich nemohou být usouzeny.“[5]

2. Rovnice

Jak vypadá matematika založená plně na kantovském názoru si ukážeme na problematice řešení rovnic. Rovnice představuje úlohu nalézt neznámé číslo s danými vlastnostmi. Nejjednodušší jsou lineární rovnice tvaru $ax + b = 0$, jednoduché řešení mají i kvadratické rovnice tvaru $ax^2 + bx + c = 0$. Renesanční matematika začíná objevem vzorce na řešení rovnic třetího stupně a později byl nalezen i vzorec pro řešení rovnic čtvrtého stupně. Problém nalézt vzorec pro řešení rovnic pátého a vyššího stupně byl dlouho otevřený, až začátkem 19. století Evariste Galois ukázal, že je neřešitelný. Neexistuje žádný vzorec

[1] G.W.Leibniz: Monadologie §33-§35, Monadologie a jiné práce, Svoboda, Praha 1982, s. 161-162

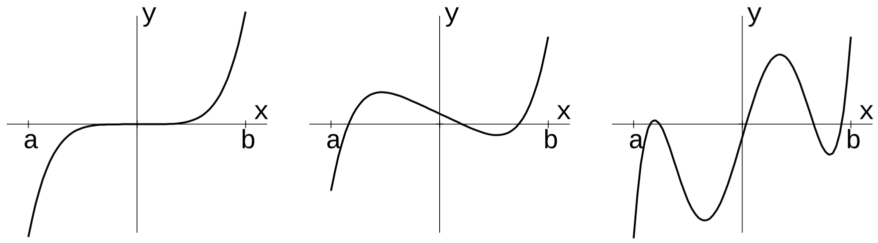
[2] viz Stephan Körner: The Philosophy of Mathematics. An Introductory Essay, Hutchinson University Library, London 1980.

[3] I.Kant: Prolegomena ke každé příští metafyzice jež se bude moci stát vědou. Svoboda, Praha 1992, s. 35

[4] Tamt. s. 36

[5] I.Kant: Kritika čistého rozumu, str. 58, OIKOYMENH, Praha 2001.

sestavený z algebraických operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování pro řešení obecné rovnice pátého nebo vyššího stupně.



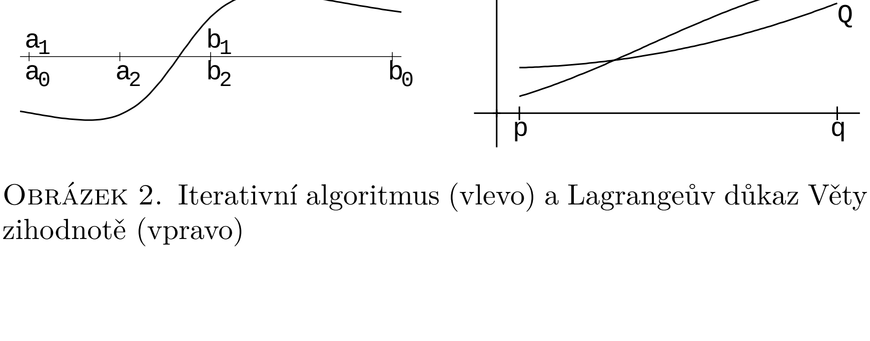
Obrázek 1. Rovnice pátého stupně

Neexistence vzorce pro řešení rovnice ale neznamená neexistenci řešení této rovnice. Jednoduchý argument ukazuje, že každá rovnice pátého stupně alespoň jedno řešení má. Je však třeba se přenést od čísel k prostoru. K tomu slouží představa reálné přímky, ve které ztotožňujeme veličiny (reálná čísla) s body přímky. Na přímce zvolíme bod, kterému přiřadíme nulu a vpravo od něj bod, kterému přiřadíme jednotkou. Tím jsou již určeny polohy všech ostatních čísel na reálné přímce. Nanášením jednotkové délky určíme polohu kladných i záporných celých čísel. Eukleidovskými konstrukcemi pak přiřadíme body přímky všem racionálním číslům i jejím odmocninám. Další konstrukce určují i taková čísla jako π a e.

Reálnou funkci reprezentujeme jejím grafem v rovině s pravoúhlými souřadnicemi. Graf funkce f sestává ze všech bodů se souřadnicemi $(x, f(x))$, a poskytuje názor na celý její průběh. Vidíme kde je funkce monotónní (rostoucí nebo klesající) i kde má kořeny. Funkce $f(x) = x^5$ je záporná v záporné oblasti a kladná v kladné oblasti (viz obr. 1 vlevo), přitom roste rychleji než jakýkoliv mnohočlen čtvrtého stupně. Funkce pátého stupně $f(x) = x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ je tedy záporná pro dostatatečně malá záporná čísla a kladná pro dostatečně velká kladná čísla: existují čísla $a < 0 < b$, pro která platí $f(a) < 0 < f(b)$ (viz obr. 1). Bod grafu $(a, f(a))$ leží pod osou x zatímco bod $(b, f(b))$ leží nad ní. Graf funkce f tedy musí protnout osu x, existuje číslo x mezi a a b, pro které platí $f(x) = 0$. Tato úvaha dokonce i dává návod, jak řešení x vypočítat, neboli jak se k němu libovolně přiblížit. Položme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = (a_0 + b_0)/2$ a podívejme se na znaménko $f(d_0)$. Je-li $f(d_0) = 0$, nalezli jsme řešení rovnice $x = d_0$. Je-li $f(d_0) < 0$, položme $a_1 = d_0$, $b_1 = b_0$. V opačném případě položme $a_1 = a_0$, $b_1 = d_0$. V obou případech platí $f(a_1) < 0 < f(b_1)$ a postup můžeme opakovat s a_1 a b_1 (viz obr. 2 vlevo). Jsou-li již a_i, b_i sestrojena, a platí-li $f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$, položme

$$d_i = \frac{a_i + b_i}{2}, \qquad \begin{array}{llll} a_{i+1} = a_i, & b_{i+1} = d_i & \text{pokud} & f(a_i) \cdot f(d_i) < 0, \\ a_{i+1} = d_i, & b_{i+1} = b_i & \text{pokud} & f(d_i) \cdot f(b_i) < 0. \end{array}$$

Jestliže pro některé i platí $f(a_i) \cdot f(b_i) = 0$, pak a_i nebo b_i je kořen rovnice. V opačném případě dostáváme posloupnosti $a_0 \le a_1 \le a_2 < \cdots < b_2 \le b_1 \le b_0$. Obě posloupnosti a_i i b_i konvergují ke stejnému číslu x, které je řešením rovnice. To je **iterativní algoritmus** pro řešení rovnic.



Obrázek 2. Iterativní algoritmus (vlevo) a Lagrangeův důkaz Věty o mezihodnotě (vpravo)

Tato úvaha neplatí pouze pro rovnice pátého stupně, ale pro každou rovnici lichého stupně. Platí dokonce i pro rovnice které algebraické nejsou a o nějakém vzorci pro jejich řešení nemůže být ani řeči. Pro funkci $f(x) = x - \cos x$ platí $-1 = f(0) < 0 < f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ a tedy existuje x mezi nulou a $\frac{\pi}{2}$, pro které $f(x) = 0$. Lze tedy tímto způsobem najít řešení každé rovnice? A zde právě vstupuje do hry spojitost. Aby tento postup fungoval, musí být funkce f v intervalu $[a, b]$ spojitá, její graf nesmí být mezi body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ přerušen. Na přelomu 18. a 19. století se ovšem nespojité funkce v matematice neuvažovaly[6]. Typickými funkcemi byly mnohočleny, elementární funkce jako exponenciála, nebo funkce analytické které lze napsat jako součet mocninné řady. Pojem spojitosti nebyl explicitně formulován ale používal se intuitivně. K představě funkce patřilo, že její graf lze nakreslit jedním tahem, aniž bychom zvedli tužku z papíru. Graf funkce se chápal jako záznam pohybu hmotného tělesa a v takovém pohybu nemohou být žádné skoky. Na základě této představy argumentuje Joseph Luis Lagrange v díle, které se zabývá řešením algebraických rovnic:

> „Teorém: Je-li dána jakákoliv rovnice a jsou-li známa dvě čísla taková, že když jsou dosazena na místo neznámé této rovnice, dávají výsledky opačných znamének, pak rovnice bude mít nutně alespoň jeden reálný kořen, jehož hodnota bude mezi těmito dvěma hodnotami.“[7]
> „Důkaz: Vyjádřeme danou rovnici jako $P - Q = 0$, kde P je součet všech kladných členů a Q je součet všech záporných členů. Předpokládejme nejdříve, že čísla p a q jsou kladná a že q je větší než p. Předpokládejme dále, že pro $x = p$ platí $P - Q < 0$ a pro $x = q$ platí $P - Q > 0$. Je jasné že v prvním případě je $P < Q$ a v druhém případě bude $P > Q$ (viz obr. 2 vpravo). Nuže vzhledem k tvaru P a Q, které obsahují pouze kladné členy s mocninami kladných členů, je evidentní, že tyto kvantity nutně rostou tak, jak roste x. Jestliže necháme x v nerozeznatelných stupních zvětšovat od p ke q, budou se také v nerozeznatelných stupních zvětšovat P a Q takovým způsobem, že P se zvětší více než Q, protože z menšího se stane větším. Tedy nutně bude existovat výraz mezi dvěma hodnotami p a q kde P bude rovno Q, tak jako dvě vozidla (mobiles), která jedou stejnou cestou ve stejném směru, vyjela ze dvou různých míst a přijedou ve stejný čas do jiných dvou míst tak, že to které bylo nejprve vzadu se nakonec bude nacházet vpředu, se nutně během cesty musela předjet.“[8]

3. Bolzanův ryze analytický důkaz

Problematickou hodnotu důkazů založených pouze na geometrickém názoru si uvědomoval Bernard Bolzano. Tématice se věnuje ve své práci *Rein analytischer Beweis des Lehrsatz, dass zwischen jeder zwey Werthen, die ein entgegensetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege*[9] z roku 1817 o analytickém důkazu Věty o mezihodnotě. Již název článku lze chápat jako polemiku s Kantem, který, jak jsme viděli v odstavci 1, ryze analytické důkazy geometrických vět nepovažuje za možné. Bolzano především analyticky definuje pojem spojitosti. Po kritice dosavadních pojetí spojitosti a

[6]Nespojité funkce se objevily začátkem 19. století v teorii fourierovských rozvojů. Fourierovská řada

$$f(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots = \begin{cases} -\pi/4 & \text{pro} \quad -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x = -\pi, 0, \pi \\ \pi/4 & \text{pro} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

je definovaná pro každé reálné číslo, je periodická s periodou 2π a v nule není spojitá.

[7]J. L. Lagrange: Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés, Courcier, Paris, 1808, str.1

[8]Tamt. s. 101-102

[9]český překlad F.J.Studnička: Ryze analytický důkaz poučky, že mezi dvěma hodnotami, jež poskytují opačně označené výsledky, leží nejméně jeden realný kořen rovnice, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, XI, 1881, s. 1-38

důkazů Věty o mezihodnotě (mezi jinými diskutuje i nedostatečnost Lagrangeova důkazu) zavádí spojitost definicí:

> „Dle pravého výkladu se totiž výrokem, že funkce fx pro všechny hodnoty x, ležící vně nebo krom jistých mezí, mění se dle zákona spojitosti, rozumí jen tolik, že když x značí nějakou hodnotu takovou, rozdíl $f(x+\omega)-fx$ možná učiniti menším nežli každou danou hodnotu, možná-li jen dosaditi za ω hodnotu tak malou, jak vůbec libo.“[10]

Neméně důležitá část Bolzanovy práce se zabývá vlastnostmi reálných čísel. Iterativní algoritmus sestrojuje dvě posloupnosti $a_0 \leq a_1 \leq a_2 < \cdots < b_2 \leq b_1 \leq b_0$ a řešení rovnice je jejich společná limita. Avšak existence této limity není samozřejmá. Ve struktuře racionálních čísel taková limita nemusí existovat. Podstatnou vlastností struktury reálných čísel je to, že posloupnosti konstruované iterativním algoritmem k nějakému číslu konvergují. Vzniká tedy problém, jak charakterizovat ty posloupnosti, které k nějaké hodnotě konvergují, aniž bychom jejich limitní hodnotu uvažovali. Taková charakterizace je vyjádřena podmínkou, která se dnes nazývá **Bolzano-Cauchyova (BC)**. Bolzano tuto podmínku formuluje a dokazuje, že každá BC posloupnost konverguje.

> „Poučka. Jestli v řadě hodnot $F^1x, F^2x, F^3x, \ldots, F^nx, \ldots, F^{n+r}x, \ldots$ rozdíl mezi n-tým členem F^nx a každým pozdějším $F^{n+r}x$ sebe vzdálenějším od něho menší nežli každá veličina daná, jest vždy určitá stálá veličina, jíž se členové této řady vždy více blíží a jíž se mohou tak přiblížiti, jak jen libo, prodlouží-li se řada dosti daleko.“[11]

Argumentace v důkaze této věty i v následujícím důkaze Věty o mezihodnotě se ovšem točí v kruhu. Bolzano dosud nemá pojem reálného čísla a jeho důkaz je založen na konstrukci jiných aproximujících posloupností. Tuto mezeru v argumentaci Bolzano doplňuje v pozdějším rukopise *Reine Zahlenlehre*[12], kde již reálná čísla (kvantity) konstruuje (definuje) jako nekonečné měřitelné číselné výrazy. V navazujícím rukopise *Functionenlehre*[13] pak zavádí pojem (reálné) funkce jako libovolného předpisu, který reálným číslům přiřazuje reálná čísla. S těmito pojmy je již Bolzanova teorie spojitosti úplná a jeho důkaz Věty o mezihodnotě je již zcela korektní. V rukopise *Functionenlehre* ovšem Bolzano uvádí mnohé další věty o spojitých funkcích, například Větu o maximu a minimu: Každá spojitá funkce definovaná na uzavřeném a omezeném intervalu $[a, b]$ je omezená[14] a má maximum[15]. Že to není úplně samozřejmé si uvědomíme, když si všimneme, že pro funkce definované na otevřených intervalech to neplatí. Například funkce $f(x) = 1/x$ na otevřeném intervalu $(0, 1)$ není omezená a nemá maximum.

Důležitým důsledkem zavedení pojmu spojité funkce byla jeho konfrontace s geometrickým názorem. Tento názor implikuje mnohé vlastnosti, které v pojmu spojitosti nejsou zahrnuty. Bolzano sestrojuje mnoho příkladů spojitých funkcí, které mají překvapivě nenázorné vlastnosti a nutí nás si náš názor opravovat a vyostřovat. Nejpodivnější je příklad spojité funkce, která není monotónní na žádném intervalu a v žádném bodě nemá derivaci[16]. Bolzano tuto funkci definuje jako limitu posloupnosti funkcí, které jsou všechny po částech lineární (viz obr. 3). V prvním kroku začne s funkcí f_1 která je lineární na celém svém definičním intervalu (obr. 3 nahoře vlevo). V druhém kroku definiční obor (interval) rozdělí na čtyři intervaly a v každém z nich funkci nahradí jinou lineární funkcí tak, že výsledná funkce f_2 je rostoucí na prvním a třetím intervalu a klesající na druhém a čtvrtém intervalu (obr. 3 nahoře uprostřed). V třetím kroku opět každý z těchto intervalů rozdělí na

---

[10] Tamt. s. 11

[11] Tamt. §7

[12] Bernard Bolzano Gesamtausgabe, E. Winter, J. Berg, F. Kambartel, J. Loužil, E. Morscher, B. van Rootselaar, eds. Frommann-Holzboog, Stuttgart, 1969-, anglický překlad S. Russ: The Mathematical Works of Bernard Bolzano, Oxford University Press, Oxford, 2004

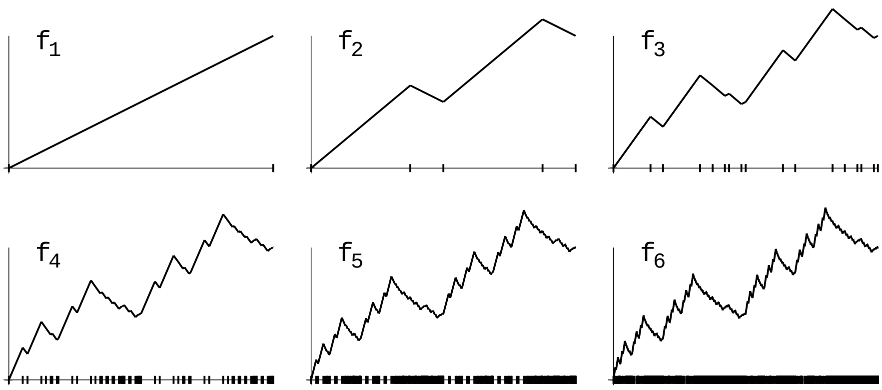
[13] Tamt.

[14] Tamt. §57

[15] Tamt. §60

[16] Tamt. §111

čtyři menší intervaly a funkci modifikuje tak, že je střídavě rostoucí a klesající na každém z těchto kratších intervalů[17]. Pro každé reálné číslo x dostáváme posloupnost čísel $f_n(x)$, která je BC a existuje tedy její limita $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Tato limitní funkce již žádné intervaly monotónie nemá, i když zůstává spojitá. Z této její vlastnosti také plyne, že v žádném bodě nemá derivaci. Konstrukcí své funkce předjímá Bolzano fraktální geometrii, která eukleidovský geometrický názor podstatným způsobem rozšiřuje. V Bolzanově době byly fraktální útvary nepředstavitelné a našli se matematici, kteří se pokoušeli dokázat, že spojitá funkce musí mít derivaci alespoň někde.



Obrázek 3. Prvních šest aproximací Bolzanovy funkce a intervaly linearity

4. Aritmetizace analýzy

Bolzanova práce nevešla v širší známost a pojem spojitosti se rozšířil teprve z učebnice *Cours d'analyse A.L.Cauchyho*[18]. Grattan-Guinness[19] přesvědčivě argumentuje, že Cauchy před napsáním *Cours d'analyse* Bolzanovu práci četl a podstatným způsobem z ní čerpal, i když jí necitoval. Bolzanovy práce *Reine Zahlenlehre* a *Fuctionenlehre* zůstaly až do 20. století jen v rukopise, a matematiky 19. století neovlivnily. Analytické principy ale byly rozpracovány v projektu aritmetizace analýzy Dedekinda, Cantora a Weierstrasse. Ten je založen na pojmech: na pojmu reálného čísla, pojmu reálné funkce, pojmech spojitosti a diferenciovatelnosti reálné funkce. Dedekind definuje reálná čísla jako řezy. **Řez** je rozklad množiny racionálních čísel na dvě disjunktní podmnožiny takové, že každý prvek první množiny je menší než každý prvek druhé množiny. Je to tedy dvojice neprázdných podmnožin $A, B \subset \mathbb{Q}$, takových že platí
1. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,
2. $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$,
3. $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$

Říkáme že řez (A, B) je prvního druhu, jestliže množina A má největší prvek, druhého druhu, jestliže množina B má nejmenší prvek a třetího druhu, jestliže ani A nemá největší prvek ani B nemá nejmenší prvek. Čtvrtý případ, že by A měla největší prvek a B měla nejmenší prvek nastat nemůže. Každé racionální číslo c určuje dva řezy:
1. $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq c\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x > c\}$ řez prvního druhu,
2. $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < c\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq c\}$ řez druhého druhu.

Iracionální čísla jsou reprezentovány řezy třetího druhu. Například $\sqrt{2}$ je reprezentováno řezem
$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \text{ nebo } x < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2 \text{ a } x > 0\}$.

[17] V každém kroku se lineární funkce spojující bod (a, A) s bodem (b, B) nahradí čtyřmi lineárními funkcemi spojujícími body (a, A), $(\frac{5a+3b}{8}, \frac{3A+5B}{8})$, $(\frac{a+b}{2}, \frac{A+B}{2})$, $(\frac{a+7b}{8}, \frac{-A+9B}{8})$, (b, B).

[18] A. L. Cauchy, Cours d'Analyse de l'École Royal Polytechnique, Debure, Paris, 1821

[19] I. Grattan-Guinness: Četl Cauchy Bolzana před napsáním Cours d'analyse?, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 15, vol. 3-4, 1970, s. 133-137

Množinu $\mathbb{R}$ lze definovat jako sjednocení množiny racionálních čísel s množinou řezů třetího druhu. Na $\mathbb{R}$ pak lze definovat algebraické operace i relace nerovnosti s obvyklými vlastnostmi. Na množině reálných čísel lze ale také definovat řezy obdobným způsobem jako na číslech racionálních. Řez na reálných číslech je rozklad množiny reálných čísel na dvě neprázdné disjunktní podmnožiny takové, že každý prvek první množiny je menší než každý prvek druhé množiny. Tyto řezy jsou buďto prvního druhu nebo druhého druhu. Řezy třetího druhu na struktuře reálných čísel neexistují. Právě tato vlastnost vyjadřuje, že struktura reálných čísel je souvislá, nelze ji rozdělit na dvě oddělené části. Kdykoliv ji rozdělíme na řez (A, B), v jedné z jeho množin se nalézá prvek (maximum množiny A nebo minimum množiny B) ke kterému se libovolně přibližují prvky druhé množiny. Lze ukázat, že tato vlastnost platí nejen pro řezy ale pro libovolný rozklad:

Věta 1. *Struktura reálných čísel je* **souvislá**. *To znamená, že jsou-li $A, B \subset \mathbb{R}$ neprázdné množiny pro které platí $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$, pak buď existuje posloupnost $b_i \in B$ která konverguje k nějakému $a \in A$, nebo existuje posloupnost $a_i \in A$, která konverguje k nějakému $b \in B$.*

Při studiu reálných funkcí se často setkáváme s funkcemi, které nejsou definovány pro všechna reálná čísla, ale jen na menším definičním oboru, nejčastěji intervalu. Například rovnice polokružnice $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je definována na uzavřeném intervalu $[-1, 1]$. Rozeznáváme intervaly uzavřené $[a, b]$, které obsahují své krajní body a otevřené intervaly (a, b), které je neobsahují. Dále existují ještě intervaly polouzavřené (či polootevřené) $[a, b)$ a $(a, b]$. Kromě těchto omezených intervalů máme ještě neomezené intervaly $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$ a plný interval $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Definiční obor reálné funkce f značíme $\mathcal{D}(f)$ a její obor hodnot značíme $\mathcal{R}(f) = \{f(x) :\ x \in \mathcal{D}(f)\}$. Spojitost reálné funkce f s definičním oborem $\mathcal{D}(f)$ se definuje stejně jako u Bolzana.

Definice 2. *Reálná funkce f je spojitá v bodě $x \in \mathcal{D}(f)$ svého definičního oboru, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in \mathcal{D}(f)$, které splňuje $|y - x| < \delta$ platí $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Říkáme že reálná funkce je spojitá, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.*

Větu o mezihodnotě lze pak dokázat v následujícím tvaru:

Věta 3. *Pokud pro reálnou spojitou funkci f s definičním oborem $\mathcal{D}(f) = [a, b]$ platí $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje $c \in (a, b)$ pro které $f(c) = 0$.*

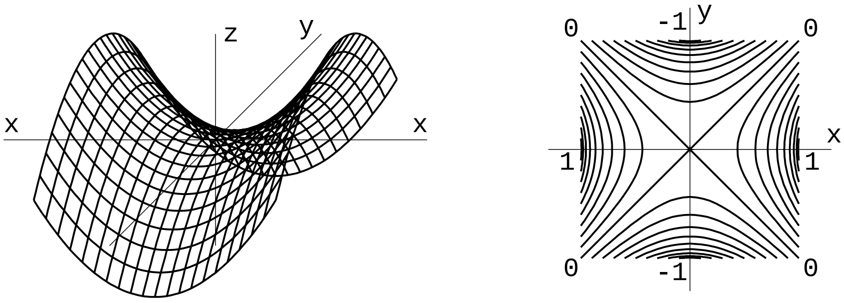
Ekvivalentně ale elegantněji lze Větu o mezihodnotě vyjádřit ve tvaru, že spojitý obraz intervalu je interval.

Věta 4. *Je-li f spojitá reálná funkce jejíž definiční obor $\mathcal{D}(f)$ je interval, pak její obor hodnot $\mathcal{R}(f) = \{f(x) :\ x \in \mathcal{D}(f)\}$ je také interval*[20].

5. Funkce dvou proměnných

Zobecnění rovnic o jedné neznámé jsou soustavy rovnic o více neznámých. Typicky pro určení n neznámých potřebujeme n rovnic, pokud jsou tyto rovnice nezávislé. Nejjednodušší případ je soustava dvou lineárních rovnic $f(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $g(x, y) = a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Z druhé rovnice vypočítáme kořen y při daném x, tj. najdeme funkci $y = h(x) = -(a_2x + c_2)/b_2$, která splňuje $g(x, h(x)) = 0$. Potom řešíme rovnici $f(x, h(x)) = 0$ a z nalezeného řešení x vypočítáme $y = h(x)$. Bude tento postup fungovat i v případě nelineárních soustav? I v tomto obecnějším případě se můžeme pokusit o převod na řešení rovnic o jedné neznámé, takže zde bude opět hrát roli spojitost obou funkcí $f(x, y)$ a $g(x, y)$. Co však znamená spojitost funkce dvou proměných? Zde pomůže geometrický názor. Graf funkce $f(x, y)$ je plocha, která sestává ze všech bodů v třírozměrném prostoru se souřadnicemi $(x, y, f(x, y))$ a lze jí zobrazit prostředky 3D-grafiky nebo

[20]Je-li totiž $x < z < y$ a $x, y \in \mathcal{R}(f)$, existují $a, b \in \mathcal{D}(f)$ pro které $x = f(a)$ a $y = f(b)$. Podle Věty o mezihodnotě existuje $c \in \mathcal{D}(f)$, pro které $f(c) = z$, takže $z \in \mathcal{R}(f)$. Tento argument ukazuje, $\mathcal{R}(f)$ je interval.

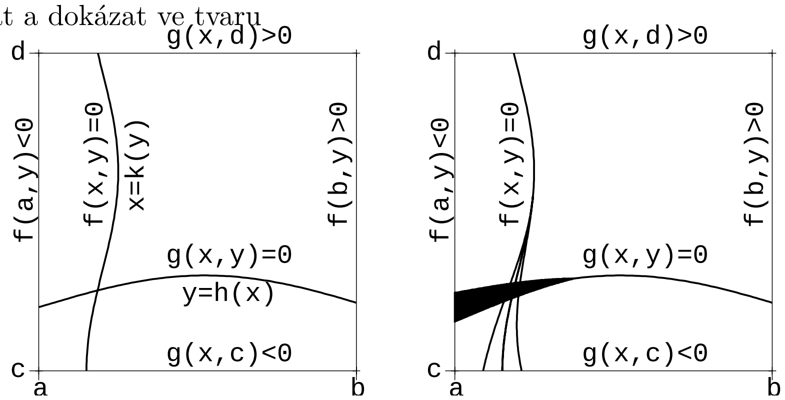


Obrázek 4. Plocha sedla: spojitá funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$. 3D-zobrazení (vlevo) a vrstevnice (vpravo)

vrstevnicemi. Vrstevnice $f^{-1}(c) = \{(x,y) \in \mathcal{D}(f) : \ f(x,y) = c\}$ je množina bodů, jejichž funkční hodnota je c. Na obr. 4 vidíme graf funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ která popisuje tvar krajiny v okolí horského sedla. Hřeben pohoří je umístěn v ose x. Pro každé pevné x má funkce $f(x,y)$ maximum pro $y = 0$. V nulovém bodě $(0,0)$ má hřeben nejnižší bod a ve směru osy y od něj na obě strany vedou údolí. Situaci znázorňuje 3D-zobrazení (vlevo) a soustava vrstevnic (vpravo). V analogii s jednorozměrným případem se nabízí kritérium spojitosti v tom, že plocha grafu nemá trhliny. Funkce $f(x,y)$ dvou proměnných bude spojitá v bodě $z_0 = (x_0, y_0)$ jestliže ve všech blízkých bodech $z_1 = (x_1, y_1)$ budou také blízké hodnoty $f(x_0, y_0)$ a $f(x_1, y_1)$. Podle Pythágorovy věty je vzdálenost bodů z_0, z_1 dána vzorcem $d_2(z_0, z_1) = \sqrt{(x_0 - y_0)^2 + (x_1 - y_1)^2}$.

Definice 5. *Reálná funkce $f(x,y)$ dvou proměnných je spojitá v bodě $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{D}(f)$ svého definičního oboru, pokud pro každé kladné $\varepsilon > 0$ existuje kladné $\delta > 0$, takové že pro každé $z = (x,y) \in \mathcal{D}(f)$ pro které $d_2(z, z_0) < \delta$, platí $|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.*

Dvourozměrnou verzi věty pro mezihodnotě pro dvě rovnice o dvou neznámých lze pak formulovat a dokázat ve tvaru



Obrázek 5. Soustava dvou rovnic o dvou neznámých

Věta 6. *Nechť f, g jsou spojité funkce dvou proměnných, jejichž definiční obor je obdélník $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = [a,b] \times [c,d]$, a předpokládejme že platí*
1. $f(a,y) < 0 < f(b,y)$ pro $c \le y \le d$, a
2. $g(x,c) < 0 < g(x,d)$ pro $a \le x \le b$.
Pak existuje $(x,y) \in \mathcal{D}(f)$, pro které platí $f(x,y) = g(x,y) = 0$.

Idea důkazu se odvíjí od postupu, který se osvědčil u soustavy lineárních rovnic. Z jednorozměrné věty o mezihodnotě víme, že pro každé x existuje y, pro které $g(x,y) = 0$. Pokud takové y existuje jediné, máme funkci $y = h(x)$ která splňuje $g(x, h(x)) = 0$. Pokud také pro každé y existuje jediné x pro které $f(x,y) = 0$, máme funkci $x = k(y)$, která splňuje $f(k(y), y) = 0$ a grafy funkcí h a k se musí protnout v jediném bodě (x,y), který je řešením soustavy (obr. 5 vlevo). Na této ideji lze ovšem založit důkaz jen v některých speciálních případech, na příklad když pro každé pevné y je $f(x,y)$ rostoucí funkcí proměnné x a pro každé pevné x je $g(x,y)$ rostoucí funkcí proměnné y. Věta platí i v obecném tvaru kdy funkce h a k nejsou určeny jednoznačně (viz obr. 5 vpravo), její důkaz je ale založen na jemnějších argumentech.[21]

6. Vícerozměrné prostory

Větu o mezihodnotě jsme zobecnili na soustavy dvou rovnic o dvou neznámých a nabízí se možnost zobecnění na soustavy tří rovnic o třech neznámých či na soustavy n rovnic o n neznámých. V těchto vyšších dimenzích se však už nemůžeme opírat o názor. Graf funkce dvou proměnných je plocha v třírozměrném prostoru, kterou si můžeme zhotovit z papíru či ze dřeva, nakreslit pomocí 3D-grafiky a nebo si jí jen představit. Graf funkce f tří proměnných je množina čtveřic $(x,y,z,f(x,y,z))$ a bylo by ho možné umístit do čtyřrozměrného prostoru, pokud by takový prostor byl představitelný. Máme-li uspět při řešení obecných soustav rovnic, musíme překročit úzký obzor Kantova názoru, který, jak jsme viděli v odstavci 1, je striktně třírozměrný. Analytický přístup Bolzana a Weierstrasse ovšem k takovému kroku přímo vybízí. Třírozměrný eukleidovský prostor jsme ztotožnili s množinou jeho souřadnic, tj. s množinou trojic reálných čísel $\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1,x_2,x_3) : x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}\}$. Analogicky tedy definujeme n-rozměrný eukleidovský prostor jako množinu $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1,\ldots,x_n) : \ x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}\}$ n-tic reálných čísel. O prostoru lze však mluvit jen tam, kde je nějaká geometrická struktura. Zde hraje podstatnou roli pojem metriky - vzdálenosti. Vzdálenost dvou bodů prostoru je délka úsečky, která je spojuje. Z Pythágorovy věty dostáváme pro vzdálenost bodů v dvourozměrném a třírozměrném prostoru vzorce, které lze zobecnit na n-rozměrný případ:

$$d_n(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2},\ x,y \in \mathbb{R}^n$$

To zahrnuje i jednorozměrný případ $d_1(x,y) = |x-y|$. Reálná funkce f s definičním oborem $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ je spojitá v bodě $x \in \mathcal{D}(f)$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$, existuje $\delta > 0$, takové že pro každé $y \in \mathcal{D}(f)$ pro které $d_n(x,y) < \delta$, platí $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. V tomto kontextu již můžeme zobecnit Větu o mezihodnotě na řešení soustav n rovnic o n neznámých. Důkaz dvoudimenzionálního případu prochází i v tomto vícedimenzionálním zobecnění. Podobným způsobem lze vybudovat velkou část analytické geometrie n-rozměrných vektorových nebo eukleidovských prostorů. Věty formulujeme a dokazujeme na základě názoru dvourozměrného nebo třírozměrného prostoru, analytická povaha důkazů však zaručí, že dokázané věty jsou platné i v každém n-rozměrném prostoru. Je však dobré si uvědomit, že třírozměrný názor není v n-rozměrné geometrii nejspolehlivějším vůdcem, a že nás snadno může svést na scestí. Pouze nejobecnější věty eukleidovské geometrie a lineární algebry platí nezávisle na dimenzi. Je však mnoho geometrických vlastností, které na dimenzi závisí a názor dvou- či tří-rozměrného prostoru pro ně může být bezcenný nebo dokonce zavádějící. Pro studium těchto vlastností je třeba si vybudovat jemnější názor založený na nejrůznějších analogiích.[22]

7. Funkcionální analýza

Koncem 19. století dochází v chápání spojitosti k další kvalitativní změně. Je to spojeno opět s řešením rovnic, jedná se ale o rovnice diferenciální a integrální. Hledá se neznámá funkce, která splňuje určité podmínky. Problematika diferenciálních rovnic vznikla současně s diferenciálním počtem. Z Newtonova pohybového zákonu $F = ma$ lze odvodit diferenciální rovnici pro pohyb soustavy hmotných bodů. Známe-li sílu $F(x)$ která působí na hmotný bod s hmotností m v pozici x, dostáváme pro pozici $x(t)$ hmotného bodu v čase

---

[21] Pro každé $x \in [a,b]$ si označíme $M_x = \{y \in [c,d] : \ g(x,y) = 0\}$ množinu všech bodů které splňují druhou rovnici. Z jednorozměrné věty o mezihodnotě víme že tato množina je neprázdná, obsahuje aspoň jeden prvek. Pro každé $x \in [a,b]$ existuje největší hodnota $H(x) = \max\{f(x,y) : \ y \in M_x\}$ funkce f na množině M_x a lze ukázat že takto definovaná funkce H je spojitá. Z druhé podmínky plyne $H(a) < 0 < H(b)$, takže existuje x, pro které $H(x) = 0$, a tedy existuje $y \in M_x$ pro které $f(x,y) = 0$. Nalezený bod (x,y) tedy splňuje obě rovnice $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ a je tedy řešením našeho problému.

[22] viz Donal O'Shea: Poincarého domněnka. Hledání tvaru vesmíru. Academia, Praha 2009

t diferenciální rovnici druhého stupně $m \cdot x''(t) = F(x(t))$. První derivace funkce pozice $x(t)$ je rychlost $v(t) = x'(t)$ v čase t, její druhá derivace je zrychlení $a(t) = v'(t) = x''(t)$. Například harmonický oscilátor popisuje pohyb závaží umístěného na konci pružiny, jejíž druhý konec je upevněn. Označíme-li x odchylku závaží od klidové polohy, je síla která na něj působí úměrná vychýlení, tedy $F(x) = -kx$ kde k je konstanta úměrnosti. Diferenciální rovnice $x''(t) = -\frac{k}{m} \cdot x(t)$ má obecné řešení $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, kde $\omega = \sqrt{k/m}$ je frekvence a A, B jsou libovolné konstanty. Řešení je určeno jednoznačně počátečními podmínkami tj. pozicí $x(0)$ a rychlostí $v(0) = x'(0)$ v čase 0:

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{v(0)}{\omega}\sin\omega t$$

Ještě jednodušší příklad je lineární diferenciální rovnice $x'(t) = r \cdot x(t)$ pro růst populace s koeficientem reprodukce r při neomezených zdrojích. Pro danou počáteční podmínku $x(0)$ (velikost populace v čase 0) má rovnice jediné řešení $x(t) = x(0) \cdot e^{rt}$.

Od objevu diferenciálního a integrálního počtu Newtonem a Leibnizem bylo formulováno mnoho diferenciálních rovnic v různých oblastech fyziky a geometrie a byly vypracovány důmyslné metody jejich řešení. Každou diferenciální rovnici ovšem nelze řešit tak jednoduše jako uvedené příklady. Opakuje se situace, kterou jsme viděli u rovnic algebraických. Pro mnoho typů diferenciálních rovnic žádné vzorečky nemáme a vyvstávají otázky, zda nějaké řešení vůbec existuje, zda je takových řešení více, jaké jsou jejich kvalitativní vlastnosti (například rostoucí či klesající) a jakým způsobem je lze numericky vypočíst. A podobně jako u algebraických rovnic, odpovědi závisí na tom, v jaké množině funkcí řešení hledáme. Funkcionální analýza vzniká, když se na množinu všech možných řešení podíváme metaforicky jako na prostor. O funkcích (možných řešeních) pak mluvíme jako o bodech tohoto funkcionálního prostoru. Geometrická struktura prostoru je dána metrikou, to znamená že pro každé dva body prostoru je stanovena jejich vzdálenost. **Prostor spojitých funkcí** $\mathcal{C}[a,b]$ sestává ze všech spojitých reálných funkcí x, jejichž definiční obor je uzavřený omezený interval $\mathcal{D}(x) = [a,b]$. Vzdálenost bodů (funkcí) $x, y \in \mathcal{C}[a,b]$ definujeme předpisem

$$d(x,y) = \max\{|x(t) - y(t)| : \ t \in [a,b]\}$$

Blízké jsou takové funkce, jejichž grafy jsou blízké. Zobrazení, která funkcím přiřazují jiné funkce, se nazývají **operátory**. Definici spojitosti, kterou známe z eukleidovských prostorů, lze formálně snadno přenést na operátory.

Definice 7. *Operátor Φ s definičním oborem $\mathcal{D}(\Phi) = \mathcal{C}[a,b]$ a s oborem hodnot $\mathcal{R}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}[a,b]$ je spojitý v bodě (ve funkci) $x \in \mathcal{C}[a,b]$, pokud pro každé kladné $\varepsilon > 0$ existuje kladné $\delta > 0$ takové že pro každé $y \in \mathcal{C}[a,b]$ které splňuje $d(x,y) < \delta$, platí $d(\Phi(x), \Phi(y)) < \varepsilon$. Říkáme, že operátor Φ je spojitý, je-li spojitý v každém bodě $x \in \mathcal{C}[a,b]$.*

Ukážeme si, jak lze funkcionální prostor $\mathcal{C}[a,b]$ použít pro řešení diferenciálních rovnic. Diferenciální rovnice prvního řádu s počáteční podmínkou je úloha najít diferencovatelnou reálnou funkci x s definičním oborem $\mathcal{D}(x) = [a,b]$ splňující podmínky

$$x'(t) = H(x(t), t) \quad \text{pro } t \in [a,b], \quad x(a) = A.$$

Zde $H(u,t)$ je daná funkce dvou proměnných a A je daná počáteční hodnota. Pokud je funkce H spojitá, pak je tato úloha ekvivalentní úloze řešit integrální rovnici

$$x(t) = A + \int_a^t H(x(s), s)ds \quad t \in [a,b].$$

Integrální rovnice se řeší metodou postupných aproximací. Na pravou stranu integrální rovnice se díváme jako na operátor, tj, jako na zobrazení Φ definované předpisem $y = \Phi(x)$, kde

$$y(t) = A + \int_a^t H(x(s), s)ds \quad t \in [a,b].$$

Pro každé $x \in \mathcal{C}[a,b]$ je $\Phi(x) \in \mathcal{C}[a,b]$, takže Φ je zobrazení prostoru $\mathcal{C}[a,b]$ do sebe. Za určitých předpokladů[23] na funkci H je zobrazení Φ kontrakce, tj. zmenšuje vzdálenosti. To znamená že existuje kladné číslo $q < 1$ takové že pro každé $x, y \in \mathcal{C}[a,b]$ platí $d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq q \cdot d(x,y)$. Pro kontrakce na prostoru $\mathcal{C}[a,b]$ platí Banachova věta 11 o pevném bodě (viz odstavec 8). Začneme s libovolnou funkcí $y \in \mathcal{C}[a,b]$ a sestrojujeme posloupnost funkcí $y = y_0, y_1, y_2, \ldots$, kde $y_{i+1} = \Phi(y_i)$. Pak y_i konvergují k funkci $x \in \mathcal{C}[a,b]$ která je již řešením dané integrální rovnice. Například diferenciální rovnici $x'(t) = r \cdot x(t)$ s počáteční podmínkou $x(0) = A$ odpovídá integrální rovnice $\Phi(x)(t) = A + r\int_0^t x(s)ds$. Začnemeli s nulovou funkcí $y_0(t) = 0$, dostáváme posloupnost funkcí $y_1(t) = A$, $y_2(t) = A(1+rt)$, $y_3(t) = A(1 + rt + (rt)^2/2)$, atd., které konvergují k exponenciále $x(t) = A \cdot e^{rt}$.

8. Metrické prostory

Metrika na funkcionálním prostoru má některé vlastnosti stejné jako metriky d_n na eukleidovských prostorech. Tyto vlastnosti lze studovat v obecnosti. Společné vlastnosti těchto metrik se stanoví jako axiomy, a zkoumá se, jaké mají důsledky. To je podstatou kroku, který koncem 19. století učinil Maurice Fréchet zavedením pojmu metrického prostoru. Jedním ze základních vztahů eukleidovské geometrie je trojúhelníková nerovnost: Součet délek dvou stran trojúhelníka je větší než délka strany třetí. Trojúhelníková nerovnost je nejdůležitějším axiomem teorie metrických prostorů.

Definice 8. Metrický prostor *je množina X, spolu s metrikou d, což je reálná funkce s definičním oborem $\mathcal{D}(d) = X \times X$, která dvojicím prvků množiny X přiřazuje nezáporná reálná čísla a platí pro ní následující tři axiomy:*
1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$*: symetrie*
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$*: trojúhelníková nerovnost.*

O prvcích množiny X mluvíme jako o bodech. Každý eukleidovský prostor $\mathbb{R}^n$ s metrikou d_n je metrickým prostorem a stejně tak prostor $\mathcal{C}[a,b]$ spojitých funkcí s metrikou d. Abstraktní pojem metrického prostoru však připouští velkou rozmanitost dalších příkladů. Na množině všech n-tic reálných čísel můžeme kromě eukleidovské metriky definovat pravoúhlou metriku $d(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$, kterou můžeme interpretovat jako vzdálenost ve městě s pravoúhlou sítí ulic. Z jednoho či více metrických prostorů lze různými konstrukcemi získávat další metrické prostory. Například každá podmnožina Y daného metrického prostoru X je metrický prostor, definujeme-li metriku na Y stejným způsobem jako na X. Speciálně tedy každý interval je metrický prostor. Také množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ a její doplněk množina iracionálních čísel $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou metrické podprostory $\mathbb{R}$. V tomto abstraktním pojetí obecných metrických prostorů se spojitost objevuje jako vlastnost zobrazení $f : X \to Y$, jehož definiční obor $\mathcal{D}(f) = X$ je metrický prostor X a jehož obor hodnot $\mathcal{R}(f) \subseteq Y$ je částí metrického prostoru Y. V úvahách o řešení integrálních rovnic se používají ještě pojmy kontrakce a lipschitzovského zobrazení, které pojem spojitosti zesilují.

Definice 9. *Zobrazení $f : X \to Y$ z metrického prostoru X s metrikou d_X do metrického prostoru Y s metrikou d_Y je* **spojité** *v bodě $x \in X$, pokud pro každé kladné $\varepsilon > 0$ existuje kladné $\delta > 0$ takové že pro každé $x' \in X$ které splňuje $d_X(x,x') < \delta$, platí $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Říkáme, že zobrazení f je spojité, je-li spojité v každém bodě $x \in X$. Zobrazení f je* **lipschitzovské***, pokud existuje kladné $q > 0$ takové že pro každé dva body $x, x' \in X$ platí $d_Y(f(x), f(x')) < q \cdot d_X(x,x')$. Pokud $q < 1$, říkáme, že f je* **kontrakce**.[24]

Také pojmy konvergentní a BC(Bolzano-Cauchyovy) posloupnosti závisí jen na metrice a můžeme je definovat v každém metrickém prostoru.

[23]Pokud $b - a$ je dosti malé a H je lipschitzovské zobrazení (viz Definice 9 v odstavci 8).

[24]Každá kontrakce je zřejmě lipschitzovské zobrazení a každé lipschitzovské zobrazení je spojité. V definici spojitosti totiž stačí pro dané $\varepsilon > 0$ položit $\delta = \varepsilon/q$. Je-li $d_X(x,x') < \delta$, je $d_Y(f(x), f(x')) < q\delta = \varepsilon$.

Definice 10. *Posloupnost $x_n \in X$ metrického prostoru X je BC, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n takové že pro každé $m > n$ platí $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Posloupnost $x_n \in X$ konverguje k bodu $x \in X$ jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n, takové že pro každé $m > n$ platí $d(x_m, x) < \varepsilon$.*

Každá konvergentní posloupnost je BC, ale opačná implikace obecně neplatí a vymezuje úplné prostory. Říkáme že metrický prostor X je **úplný**, jestliže každá jeho BC posloupnost je konvergentní. Prostor reálných čísel i prostor $\mathcal{C}[a, b]$ je úplný, zatímco prostor racionálních čísel úplný není. Pro úplné prostory platí následující Banachova věta o pevném bodě.

Věta 11. *Je-li X úplný metrický prostor a je-li $\Phi : X \to X$ kontrakce, pak existuje jediný pevný bod $x \in X$, pro který platí $\Phi(x) = x$.*[25]

Pojem funkcionálního prostoru nám poskytuje nový pohled na některé vztahy matematické analýzy. Příklad konvergentní posloupnosti funkcí v prostoru $\mathcal{C}[0, 1]$ jsou aproximace Bolzanovy funkce na obr. 3. Bolzano definuje posloupnost po částech lineárních funkcí $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ a dokazuje že pro každé $t \in [0, 1]$ existuje limita kterou označí $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$. O takto definované funkci dokáže že je spojitá a není monotónní na žádném intervalu. S pojmem funkcionálního prostoru vidíme tutéž situaci jako konvergentní posloupnost bodů ve funkcionálním prostoru. Podobnou abstraktní interpretaci mají i jiné věty analýzy. Například Weierstrassova věta říká, že každou spojitou funkci na kompaktním intervalu lze aproximovat mnohočleny, tj. funkcemi tvaru $P(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$. S pojmem funkcionálního prostoru tuto větu můžeme vyjádřit tak, že množina mnohočlenů tvoří hustou část funkcionálního prostoru. To znamená, že v libovolné blízkosti každé spojité funkce se nachází nějaký mnohočlen.

9. Topologické vlastnosti

Teorie metrických prostorů studuje mnoho vlastností metrických prostorů a nachází mezi nimi nejrůznější vztahy. Mezi nimi jsou význačné vlastnosti **topologické**, tj. takové, které se zachovávají při spojitých zobrazeních. Nejdůležitější topologické pojmy jsou okolí bodu, otevřená množina a uzavřená množina. Okolí bodů lze definovat pomocí pojmu koule, který zobecňuje koule třídimenzionálního eukleidovského prostoru a kruhy dvourozměrného eukleidovského prostoru. V daném metrickém prostoru X s metrikou d nazýváme koulí se středem x a poloměrem $r > 0$ množinu $B_r(x) = \{z \in X : \ d(z, x) < r\}$ všech prvků, které jsou od x vzdáleny méně než r.

Definice 12. *Podmnožina U metrického prostoru X je* **okolí** *svého bodu $x \in U$, jestliže existuje $r > 0$ takové, že do U náleží všechny body, jejichž vzdálenost od x je menší než r, tj. jestliže $B_r(x) \subseteq U$. Množina U je* **otevřená**, *je-li okolím každého svého bodu.*

Speciálně každá koule $B_r(x)$ je okolím svého středu x. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne že $B_r(x)$ je okolím každého svého bodu, tj. že je otevřená. Nová definice zobecňuje pojem otevřenosti reálných intervalů. Intervaly (a, b), (a, ∞) a $(-\infty, b)$ jsou otevřené množiny prostoru $\mathbb{R}$. Ale také sjednocení dvou disjunktních otevřených intervalů, například $(0, 1) \cup$

[25]Důkaz Banachovy věty: Nechť $r < 1$ je koeficient kontrakce. Zvolme libovolný bod $y \in X$ a sestrojme posloupnost bodů $y = y_0, y_1, y_2, \ldots$ předpisem $y_{n+1} = \Phi(y_n)$. Platí $d(y_n, y_{n+1}) < r \cdot d(y_{n-1}, y_n) < \cdots < r^n \cdot d(y_0, y_1)$. Pro $n < m$ odtud z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &< d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + \cdots + d(y_{m-1}, y_m) \\ &< (r^n + r^{n+1} + \cdots + r^{m-1}) \cdot d(y_0, y_1) \\ &< \frac{r^n}{1-r} \cdot d(y_0, y_1), \end{aligned}$$

kde poslední nerovnost plyne ze vzorce pro součet geometrické řady $1 + r + r^2 + \cdots = 1/(1-r)$. Posloupnost y_n je tedy BC a podle předpokladu úplnosti prostoru X je konvergentní: existuje bod $x \in X$, ke kterému y_n konvergujeí, tj. $x = \lim_{n\to\infty} y_n$. Ze spojitosti zobrazení Φ plyne $\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi(y_n) = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = x$, takže $\Phi(x) = x$ je pevný bod. Kdyby takové pevné body existovaly dva $x \neq y$, pak by platilo $d(x, y) = d(\Phi(x), \Phi(y)) < r \cdot d(x, y)$ a to je spor protože $r < 1$.

$(2,3)$ je otevřená množina. A i sjednocení nekonečného počtu otevřených intervalů $(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{2}{3},\frac{3}{4})\cup(\frac{4}{5},\frac{5}{6})\cup\cdots$ je otevřená množina. Vlastnost spojitosti zobrazení mezi metrickými prostory lze vyjádřit pouze z pojmu otevřených množin.

Věta 13. *Zobrazení $f : X \to Y$ mezi metrickými prostory je spojité právě když vzor $f^{-1}(V) = \{x \in X :\ f(x) \in V\}$ každé otevřené podmnožiny $V \subseteq Y$ prostoru Y je otevřená podmnožina prostoru X.*

Nejdůležitější vlastnosti otevřených množin postihuje následující věta.

Věta 14. *Průnik dvou otevřených množin je otevřená množina. Sjednocení libovolného souboru otevřených množin je otevřená množina. Prázdná množina $\emptyset$ a celá množina X jsou otevřené množiny metrického prostoru X.*[26]

Duální pojem k otevřené množině je uzavřená množina. Podmnožina $V \subseteq X$ je **uzavřená**, jestliže její doplněk $X \setminus V$ sestávající ze všech bodů které nenáleží do V, je otevřená množina. V prostoru $\mathbb{R}$ pojem uzavřené množiny zobecňují uzavřené intervaly. Intervaly tvaru $[a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ jsou uzavřené. Z duality plyne, že sjednocení dvou uzavřených množin je uzavřená množina a průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina. Uzavřenost není opak otevřenosti. Některé množiny jako polouzavřené intervaly $[a,b)$ nebo $(a,b]$ nejsou ani otevřené ani uzavřené. Naopak existují množiny, které jsou jak uzavřené tak otevřené. Takovým množinám říkáme **obojetné**. V každém prostoru máme aspoň dvě obojetné množiny, totiž práznou množinu $\emptyset$ a celá množina X. Prostor, jehož jediné obojetné množiny jsou $\emptyset$ a X se nazývá **souvislý**. Příkladem souvislého prostoru je reálná přímka $\mathbb{R}$. To plyne z Věty 1, která zároveň poskytuje motivaci pro takovouto definici souvislosti.[27] Podobně lze ukázat, že také každý reálný interval je souvislá množina (tj. jakožto metrický prostor je to souvislý prostor). Naopak sjednocení dvou disjunktních intervalů $X = (0,1)\cup(2,3)$ souvislý prostor není. Má totiž obojetné množiny $(0,1)$ a $(2,3)$. Platí dokonce

Věta 15. *Podmnožina $V \subseteq \mathbb{R}$ je souvislá právě když je to interval.*

Speciálně množina racionálních čísel není souvislá, protože existují řezy racionálních čísel třetího druhu (viz odstavec 4). Věta o mezihodnotě má následující topologické zobecnění.

Věta 16. *Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý prostor: Je-li f spojité zobrazení, jehož definiční obor $\mathcal{D}(f)$ je souvislý metrický prostor, je jeho obor hodnot $\mathcal{R}(f)$ také souvislý.*

Důkaz této zobecněné věty o mezihodnotě je velmi jednoduchý: Předpokládejme, že Y není souvislý, to znamená že existuje obojetná neprázdná vlastní podmnožina $\emptyset \neq V \subset Y$. Potom množina $f^{-1}(V)$ je neprázdná obojetná vlastní podmnožina X, tj. $\emptyset \neq f^{-1}(V) \subset X$, což je spor s předpokladem.

Zobecnění které nás přivedlo od reálných funkcí k metrickým prostorům, nám umožnilo odhalit podstatnou fundamentální strukturu, na které je Věta o mezihodnotě založena. Struktura souvislosti v teorii reálných funkcí není nápadná, protože je skryta mezi dalšími

---

[26] Důkaz: Předpokládejme že $U, V \subseteq X$ jsou otevřené množiny. Je-li $x \in U \cap V$ prvkem jejich průniku, náleží x do obou z nich, takže existují kladná δ a η taková že $B_\delta(x) \subseteq U$ a $B_\eta(x) \subseteq V$. Je-li $\varepsilon = \min\{\delta,\eta\}$ menší z nich je $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ i $B_\varepsilon(x) \subseteq V$ takže $B_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$ a $U \cap V$ je tedy otevřená množina. Ve větě o sjednocení se mluví o libovolném souboru podmnožin, tedy konečném nebo nekonečném. Máme tedy dány otevřené množiny $U_i \subseteq X$ kde indexy $i \in I$ jsou z nějaké (konečné nebo nekonečné) indexove množiny I. Bod $x \in X$ patří do jejich sjednocení U, pokud patří aspoň do jednoho U_i. Ale v tomto případě existuje kladné ε takové že $B_\varepsilon(x) \subseteq U_i$ a protože $U_i \subseteq U$ je také $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Tím je ukázáno, že U je otevřená množina. Pro prázdnou množinu $\emptyset$ a plnou množinu X je vlastnost otevřenosti splněna triviálně.

[27] Kdyby totiž byla $A \subset \mathbb{R}$ neprázdná obojetná množina, byl by její doplněk $B = \mathbb{R} \setminus A$ sestávající z těch prvků které nepatří do A, také neprázdnou obojetnou množinou. Podle Věty 1 však v jedné z těchto množin existuje posloupnost prvků které konvergují k nějakému prvku druhé množiny, například prvky $a_i \in A$ které konvergují k nějakému $b \in B$. To ale není možné, protože B je otevřená množina a tedy nějaké okolí prvku b obsahuje jen prvky B a žádný prvek posloupnosti a_i.

strukturami. Zároveň vidíme, jak se na této úrovni abstrakce důkaz věty zjednodušuje až trivializuje. Důkaz je bezprostředním důsledkem definice pojmů, definice pojmů k tomuto důkazu přímočaře vedou. Současně se ztrácí názornost důkazu. Pojem spojitého zobrazení mezi metrickými prostory je tak obecný, že si nemůžeme představovat všechny jeho speciální případy.

10. Topologie

Studium topologických vlastností metrických prostorů vede k dalšímu stupni abstrakce, ve kterém výchozí struktura topologického prostoru pouze specifikuje, které podmnožiny prostoru jsou otevřené. Tuto další hladinu abstrakce uskutečnil Felix Hausdorff začátkem 20. století. Z Věty 14 o vlastnostech otevřených množin metrického prostoru se stanou axiomy topologického prostoru, z Věty 15 o spojitých zobrazeních metrických prostorů se stane definice spojitosti v topologii. Pojem otevřené množiny topologického prostoru je definován implicitně axiomy.

Definice 17. Topologický prostor *je množina X spolu se systémem τ podmnožin X, který obsahuje prázdnou množinu $\emptyset$ a plnou množinu X a je uzavřený na konečné průniky a libovolná sjednocení. To znamená že platí*
1. $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.
2. Je-li $U_0 \in \tau$ *a* $U_1 \in \tau$ *pak také* $U_0 \cap U_1 \in \tau$.
3 Je-li $U_i \in \tau$ *pro každé* $i \in I$, *pak také sjednocení* $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.
Prvky systému τ nazýváme otevřené množiny, jejich doplňky nazýváme uzavřené množiny.

Definice 18. *Topologický prostor je souvislý, jestliže jediné jeho obojetné (otevřené a uzavřené) množiny jsou $\emptyset$ a X. Zobrazení $f: X \to Y$ mezi topologickými prostory je spojité, jestliže pro každou otevřenou množinu $U \in \tau_Y$ prostoru Y platí že její vzor $f^{-1}(U) \in \tau_X$ je otevřená množina v X.*

Věta 19. *Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý prostor.*

Důkaz této topologické věty je stejný jako v případě metrických prostorů. Je velmi jednoduchý a plyne bezprostředně z definic pojmů spojitosti a souvislosti. Tato jednoduchost by však nebyla myslitelná bez dlouhého předchozího vývoje od prvních tápavých kroků v teorii funkcí reálné proměnné přes stále obecnější struktury až nakonec ke strukturám topologickým. V topologii dosáhly pojmy spojitosti a souvislosti svého nejobecnějšího vyjádření oproštěného od všech nepodstatných a nahodilých okolností, kterými jsou doprovázeny na nižších stupních abstrakce. Zatímco ještě teorie metrických prostorů je závislá na teorii reálných čísel (protože vzdálenosti jsou reálná čísla), teorie topologických prostorů je už od této závislosti osvobozena a vyjadřuje ideje spojitosti a souvislosti v jejich čistých podobách. V tomto smyslu je topologie základnější než geometrie. Vyhraněným způsobem to říká Michel Serres:

> „Začněme znovu. Zaměřme se ne již na vektorový prostor ale na topologické struktury. A jsme přivedeni k počátkům: nikoliv k počátku logickému nebo historickému, ale k základním podmínkám konstituce forem prostoru. Touto zpětnou analýzou geometrie objevuje novou čistou formu nevycházející z měření, které tuto čistou formu předchází, a pozastavuje dvacet století problematické tradice. Vnímá je jako nečisté a zmatené, technologické a aplikované, zkrátka ne-matematické, nezdařené.“[28]

[28] „Recommençons: adossons-nous, non plus à l'espace vectoriel, mais aux structures topologiques. Nous voilà reconduits aux origines: non point à l'origine logique ou historique, mais aux conditions fondamentales de la constitution des formes de l'espace. Par cette analyse en retour, la géometrie découvre une nouvelle pureté qui ne doit rien à la mesure, antérieure à elle, et suspend à nouveau vingt siècles de tradition équivoque, les perçoit comme impurs et confus, technologiques et appliqués, en bref non mathématiques, absents et manqués.“ M.Serres: Les origines de la géométrie. Flammarion, Paris 1993, s. 21