EXISTENCE MATEMATICKÝCH OBJEKTŮ - OBRANA FORMALISMU

PETR KŮRKA

Podle Petra Vopěnky je současná množinová matematika založena na iluzi - iluzi existence množiny přirozených čísel. Tuto tezi Petr Vopěnka zakládá na nestandardních modelech přirozených čísel sestrojovaných pomocí ultraproduktu.

> Domníváme-li se tedy, že nějaká množina $\mathbb{N}$ je množinou všech přirozených čísel, a tuto domněnku opíráme například o to, že na ní lze vybudovat celou Cantorovu teorii množin, pak díky ultraproduktu snadno nalezneme množinu $\mathbb{N}^*$, která má tytéž vlastnosti a navíc je delší než množina $\mathbb{N}$. Množina $\mathbb{N}$ tedy není množinou všech přirozených čísel.
>
> Kterákoliv množina $\mathbb{N}$, kterou považujeme za množinu všech přirozených čísel, je pouze bezhlavým řezem na oboru všech přirozených čísel.
>
> Odtud plyne, že množina vůbec všech přirozených čísel neexistuje, neboli obor všech přirozených čísel není aktualizovatelný. Právě to je hlavní poselství ultraproduktu. Vopěnka [16], str. 29.

Tuto situaci pokládá Petr Vopěnka za neudržitelnou.

> Topologie, matematická analýza, funkcionální analýza, topologicko-algebraické struktury, ..., to vše se hroutí a je to třeba předělat nabo nahradit.
>
> Krátce řečeno, matematické bádání musí znovu začít od toho místa, kde na začátku dvacátého století skončilo, jak to ostatně jasnozřivě doporučil Henri Poincaré. Vopěnka [16], str. 31.

Podobný postoj zaujímá Ivan Chvatík, který uznává jen matematiku, která je založena na kantovském názoru třírozměrného prostoru a jednorozměrného času.

> Nedomnívám se však, že by bylo možno zachránit teorii aktuálního nekonečna přidáváním dalších svévolných axiomů. Pokud by ji vůbec bylo možno zachránit a využít k řešení praktických problémů přírodních věd, bylo by zapotřebí znovu od začátku prozkoumat její ustavení a zbavit ji barokních metafyzicko-theologických zátěží. Bojím se však, že tuto revizi by nepřežila. Chvatík [3].

Je opravdu současná matematika v tak beznadějné krizi? Matematická komunita žádnou krizi nepociťuje. Přitom se téměř každá matematická publikace zabývá množinou přirozených čísel nebo jinými nekonečnými množinami a přináší o nich nové poznatky. Matematika se také úspěšně používá k řešení praktických problémů přírodních věd a technologie. Technika, kterou používáme (letadla, počítače, mobilní telefony, atd.) by bez moderní matematiky nebyly možné. Jako problematické je někdy vnímáno jen nekritické používání matematických metod v humanitních vědách, ekonomii nebo finančnictví.

Co to vlastně znamená, když řekneme, že nějaký matematický objekt existuje či neexistuje? Existenci nelze chápat jako něco na nás nezávislého. Lidé a věci, které nás obklopují, pro nás existují, protože se k nim vztahujeme. Strom, který vidím z okna, je pro mně stále týmž stromem, i když se stále mění. Existence tohoto stromu a jeho identita v čase není ale nic předem daného. Je to součást způsobu, jak vnímám svět. Není například úplně samozřejmé, že slunce, které vidíme dnes, je stejné slunce, které jsme viděli včera. Ještě výraznější je to u měsíce, který nejen vychází a zapadá ale také ubývá až zmizí docela. Je nový měsíc stejný jako ten starý? Že tomu tak je, že Slunce a Měsíc jsou existující vesmírné objekty, soudíme z kontextu dalších jevů. Dnes již víme jak jsou Slunce a Měsíc daleko, z jakých prvků se skládají a na Měsíc si dokonce můžeme doletět. Trochu jinak vidíme existenci souhvězdí. Zahlédnout souhvězdí není odlišný výkon od zahlédnutí Slunce nebo Měsíce. A je to tento výkon - identifikace souhvězdí - který umožnil identifikaci jednotlivých hvězd a později i planet, které se mezi souhvězdími pohybují. V moderní astronomii ovšem souhvězdí existují jaksi méně než v přirozeném světě. Dověděli jsme se, že hvězdy souhvězdí nejsou blízko sebe navzájem, nemají vlastně nic společného a netvoří žádnou jednotu. Ze souhvězdí se v moderní astronomii stala pouhá konvence - název pro určitou část hvězdné oblohy.

V našem světě ale existují dokonce i vodníci, sněhurky, elfové, či paní Bovaryové - existují ovšem jako pohádkové bytosti nebo literární postavy. Mají své charakteristické vlastnosti, můžeme o nich rozmlouvat a dávat jim jména. V našem světě existují také sociální konstrukty - politické, obchodní nebo vědecké instituce, právní smlouvy a zákony, jízdní řády či jídelní lístky. Tyto věci mohou vznikat, měnit se a zanikat, ale pokud trvají, zachovávají si svou identitu a lze je pojmenovat. Reuben Hersh považuje za sociální konstrukty i matematické objekty. [1]

> Matematické objekty jsou tvořeny lidmi. Ne libovolně, ale zacházením s existujícími matematickými objekty pro potřeby vědy a denního života.
>
> Jednou utvořené, matematické objekty mohou mít obtížně objevitelné vlastnosti. Jinak řečeno, existují obtížné matematické problémy. Příklad: definujme x jako dvoustou cifru v dekadickém zápisu čísla $23^{45^{6789}}$. Tím je x stanoveno. Přesto nemám žádnou efektivní proceduru jak ho určit. ...
>
> Jednou utvořené matematické objekty tu jsou. Odpoutávají se od svého tvůrce a stávají se součástí lidské kultury. Dovídáme se o nich jako o externích objektech se známými vlastnostmi a s neznámými vlastnostmi. Některé jejich neznámé vlastnosti jsme schopni objevit. Některé objevit nemůžeme, přestože tyto objekty jsou náš vlastní výtvor. Hersh [2], str. 16.

Vývoj, který vedl k pojmu čísla, lze do jisté míry rekonstruovat z klínopisných hliněných tabulek, které se zachovaly ze starověké Mezopotámie. Většina těchto tabulek jsou účty, seznamy zboží či záznamy o vykonané práci. V nejstarším období se počty různých druhů zboží označovaly různými znaky. Později se však druh zboží uváděl jen na začátku (či na obalu tabulky) a záznamy obsahovaly již jen počty nebo množství. Pro administrativní účely bylo potřeba tyto počty sčítat a násobit. Vznikla poziční šedesátková soustava a aritmetické operace se prováděly s čísly, která nemusela nutně vyjadřovat počty či množství konkrétních druhů zboží. Ve školách se písaři učili počítat a řešit matematické úlohy - soustavy lineárních rovnic i rovnice vyšších řádů. Část zachovaných hliněných klínopisných tabulek jsou úlohy (někdy s řešeními) počítané v těchto školách. Vztah k praktickým problémům je v nich oslaben a někdy úplně chybí (viz Neugebauer [9], Robson [10]).

Vývoj starověké mezopotámské matematiky postupně vedl ke vzniku kalkulu - formálním pravidlům počítání v šedesátkové soustavě. Na konci tohoto vývoje je pojem čísla jako entity, která podléhá zákonům aritmetiky. Čísla sice pořád ještě znamenají počty nebo množství, počítání s nimi však není na této interpretaci závislé. Čísla začínají existovat jako ideální neměnné entity. Pravdivost aritmetických identit jako $2 + 3 = 5$ je důsledkem stanovených pravidel sčítání, podobně jako možný průběh šachové partie je stanoven pravidly šachové hry. Pravidla sčítání se sice opírají o názor čísla jako počtu objektů, vlastní počítání se však již o tento názor neopírá - u víceciferných čísel už by to bylo nepraktické.

Na vyšší úrovni probíhá vznik matematických objektů v helénské civilizaci. Po tažení Alexandra Velkého se řecký teoretický duch dostává do přímého kontaktu s vyspělejšími civilizacemi Mezopotámie a Egypta a vznikají první vědecké teorie.

> Vědecké teorie nejsou o konkrétních objektech, ale o teoretických entitách. Teorie mají rigorózní deduktivní strukuru. Vychází z axiomů o svých teoretických entitách a specifikují způsoby, jakými se z nich odvozují důsledky. Aplikace na reálný svět jsou založeny na korespondenčních pravidlech mezi entitami teorií a konkrétními objekty. Tyto korespondenční pravidla mají vždy jen omezenou platnost která se ověřuje experimentální metodou (viz Russo [11], str. 17).

Mezi nejvýraznější příklady helénské vědecké teorie patří Eukleidova geometrie.

> Eukleidovská geometrie vzniká explicitně jako vědecká teorie objektů, které lze nakreslit pravítkem a kružítkem. Eukleidovy prvé tři postuláty nejsou nic jiného než přímočará transpozice operací prováděných pravítkem a kružítkem do kontextu matematické teorie. Je samozřejmě velký rozdíl mezi matematikou a rýsováním. S kružítkem nelze narýsovat kružnici libovolného poloměru - nelze s ním ostatně narýsovat žádnou kružnici. Matematická věda vzniká, když nahradíme kružítko a pravítko ideálním kružítkem a pravítkem - teoretickými modely skutečných nástrojů, které jsou schopny provádět konstrukce prvních tří Eukleidových postulátů. Russo [11], str. 40.

Později s Descartem a Newtonem se trojdimenzionální eukleidovská geometrie stává teorií reálného fyzického prostoru. K jejím teoretickým entitám patří kromě bodů, přímek a kružnic také délky úseček a velikosti úhlů. Korespondenční pravidla stanovují jakým způsobem lze měřit vzdálenosti a úhly ve fyzickém reálném prostoru. Descartova analytická geometrie se stala tak úspěšná, že Kant, jeho současníci a následovníci přestali vidět rozdíl mezi ní a reálným prostorem a považovali ji za apriorní formu vnímání. Tento rozdíl si naopak uvědomoval Gauss. Ivan Chvatík se pohoršuje nad tím, že Gauss ověřuje v terénu, zda naměřený součet úhlů trojúhelníku dává 180°. Na tom ale není nic nepatřičného. Eukleidovskou

[1] Netvrdím ovšem, že matematické objekty jsou entity stejného typu jako právní či politické instituce. Mají s nimi však společné to, že jsou to entity ustanovené. Jejich neměnnost není to, co je odlišuje. Jízdní řád se sice pravidelně mění, jako historický fakt ale zůstává loňský jízdní řád neměnný.

geometrii jako matematickou teorii samozřejmě nelze žádným měřením potvrdit ani vyvrátit. Ale jedná se o test korespondence eukleidovské geometrie s reálným prostorem a zde měření namístě je. Pokud ovšem Gauss tyto úhly měřil, asi žádnou odchylku od eukleidovské geometrie nezjistil. Ale Einsteinova obecná teorie relativity předkládá jinou geometrickou teorii reálného prostoru. Mezi ní a eukleidovskou geometrií lze rozhodovat pozorováním. První takové pozorování provedl Arthur Eddington roku 1919 při zatmění slunce a výsledkem bylo potvrzení předpovědí Einsteinovy teorie (poutavé vylíčení viz Johnson [4]). Ukázalo se, že geometrie mezihvězdného prostoru eukleidovská není.

Tvar vědecké teorie podstatným způsobem závisí na logice. Logika je teorií racionálního uvažování a je rovněž výtvorem řeckého a helénského ducha. Její vznik souvisí s řečnictvím a s právní argumentací.

> Vztah mezi demonstrací (důkazem) a veřejnou promluvou je nejjasnější v Aristotelově Rétorice, kde autor zdůrazňuje, že tak zvaná 'enthymemes' není nic jiného než sylogismus, a rozlišuje 28 různých typů rétorické argumentace. Aristotelés představuje rétoriku do značné míry jako aplikaci nástrojů, které vypracoval ve svých pracích o logice, ale historické pořadí bylo zřejmě obrácené. Již sto let před ním existovala (nyní ztracená) pojednání o rétorice, takže si můžeme představit, že teorie sylogismů vznikla, přinejmenším do určité míry, z úvah o 'enthymemes' rétoriků. Russo [11], str. 172.

Spíše než Aristotelés je vlastním tvůrcem logiky jako teorie racionálního uvažování Chrisippos (viz Mates [8]).

> Aristotelés věnoval mnoho pozornosti logice a speciálně sylogismům. Ale ve své analýze různých forem sylogismů ospravedlňoval jejich platnost pouze evidencí poskytovanou příklady. Jinými slovy, popisoval použití logiky ale neformuloval její teorii.
>
> ... existující svědectví poukazují na Chrysippa jako na tvůrce vědecké teorie výrokové logiky. Zatímco Aristotelés používal proměnné jako reprezentanty obecných členů výroků, Chrisippos je používal jako proměnné za samotné výroky a sestrojil teorii logické inference založenou na pěti postulátech. Russo [11], str. 218, 219.

Vývoj logiky však v antice nekončí. V 19. století ji podstatným způsobem rozvíjejí de Morgan, Boole a zejména Frege, který zavedl pojmy n-árního predikátu a kvantifikátorů. Vznikly různé varianty logik: Modální logika pracuje s pojmy možnosti a nutnosti, intuicionistická matematika je založena na slabší logice, která neobsahuje zákon vyloučeného třetího $p \vee \neg p$. Některé racionální úvahy ve fregeovské predikátové logice nelze vyjádřit, takže by bylo možné jí rozšířit (viz Fiala [1]). Současná matematika je z velké části založena na fregeovské logice, která pro ni stanoví jakási pravidla hry. Existenčním kvantifikátorem v ní lze vyjádřit tvrzení o existenci či neexistenci objektů s určitými vlastnostmi. Existují však tyto objekty ve stejném smyslu jako existují stromy, hvězdy či jízdní řády? Můžeme se k nim vztahovat tak, že si navzájem rozumíme, když o nich mluvíme?

Na tuto otázku lze odpovědět kladně přinejmenším v případě přirozených čísel. Konkrétní přirozená čísla $1, 2, 3, \ldots$ mají svou individualitu a identitu. Jsou jednoznačně určena svým pořadím - jsou vlastně sama tímto pořadím. Mají jména, kterými jsou jejich zápisy v desítkové soustavě. Jejich vlastnosti jako sudost či prvočíselnost lze jednoznačně určit. S čísly reálnými, kterými určujeme množství, je to trochu složitější. Od samého počátku babylonské či egyptské matematiky se objevují zlomky. Babylonská šedesátková soustava neobsahovala poziční čárku, takže 2 30 mohlo znamenat stejně dobře $150 = 2 \cdot 60 + 30$ jako $\frac{5}{2} = \frac{150}{60}$ podle kontextu. V egyptské matematice se zvláštní pozornosti těšily zlomky $\frac{1}{n}$, na jejichž součet byly jiné zlomky převáděny. V helénském období se v babylonské šedesátkové soustavě již používá nula, což odstraňuje dřívější nejednoznačnost.

I když čísla a zlomky jsou abstraktní entity, mají zřejmou a neproblematickou interpretaci v reálném světě - odpovídají počtům a množstvím. V renesanci se však téměř současně objevují čísla záporná a komplexní, jejichž interpretace již problematická je. Jejich vznik je svázán s řešením algebraických rovnic. Kvadratické rovnice bylo třeba rozlišovat na dva typy: $ax^2 + bx = c$ a $ax^2 = bx + c$ a řešit je jiným i když podobným způsobem. Zavedením záporných čísel tyto dva případy splynou v jediný. Vznik záporných čísel tedy byl motivován formálně algebraicky bez opory v názoru. Ve finančním světě lze záporná čísla interpretovat jako dluhy, ale jaký význam má pak součin dvou záporných čísel? A má vůbec smysl spolu záporná čísla násobit? Žádný apriorní názor nám zde neposkytuje jakékoli vodítko. Formálně algebraické důvody nakonec vedly k ustanovení pravidla $(-n) \cdot (-m) = n \cdot m$, které zaručuje, že aritmetické identity jako distributivní zákon platí i pro záporná čísla. Vidíme že na konstituci struktury celých čísel se podílí snaha o formální jednoduchost. Každá jiná definice součinu záporných čísel by vedla k nepřehledné struktuře.

Je-li druhá mocnina záporného čísla kladná, druhá odmocnina záporného čísla neexistuje. Ale připustíme-li, že odmocniny záporných čísel existují, a že s nimi lze počítat podobně jako s čísly reálnými, dokážeme řešit některé rovnice třetího stupně, které bez nich řešit nelze. Komplexní čísla se ukázala být užitečná i v dalších oblastech matematiky, zejména v diferenciálním a integrálním počtu. V 17. a 18. století byly odkrývány formálním způsobem stále nové vztahy mezi nimi. Tento proces konstituce struktury komplexních čísel probíhal aniž by se matematici mohli opřít o jakoukoliv interpretaci komplexních čísel v reálném světě. Ukázalo se však, že struktura komplexních čísel má velmi zajímavé vlastnosti a osvětluje i vlastnosti struktury reálných čísel. Proto si nakonec matematici na existenci komplexních čísel zvykli. Celých dvěstě let se však vlastnosti komplexních čísel odvozovaly jen z formálních analogií a z algebraického kalkulu a teprve poté se objevil jejich geometrický model - Gaussova rovina - a bylo možné je opřít o geometrický názor.

Další matematické teorie, které vznikly aniž by měly interpretaci v reálném světě, jsou neeukleidovské geometrie. Byly výsledkem marných snah zjednodušit logickou strukturu eukleidovské geometrie a dokázat pátý Eukleidův postulát z ostatních postulátů. Matematici se snažili z negace pátého postulátu odvodit spor. Při důkazu sporem zkoumáme vlastnosti matematických objektů, které neexistují. Například při důkazu sporem, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo, předpokládáme, že existuje racionální číslo $\frac{p}{q}$, jehož druhá mocnina je 2. Předpokládáme tedy, že existují celá navzájem nesoudělná kladná čísla p, q, taková že $p^2 = 2q^2$. Ztoho plyne, že p nemůže být liché, tedy existuje celé kladné r, pro které platí $p = 2r$. Odtud dostáváme $2r^2 = q^2$, takže q také nemůže být liché. Obě čísla p, q jsou tedy sudá, ale to je spor s předpokladem, že jsou nesoudělná. V celém důkazu jsme tedy zkoumali neexistující čísla p, q, jejich neexistence se však ukázala až v závěru důkazu.

Při pokusech o důkaz pátého postulátu sporem se z jeho negace odvozovaly další a další paradoxní vlastnosti ale žádný spor. Nakonec Bolyai a Lobačevský dospěli k náhledu, že negace pátého postulátu vytváří svébytný geometrický svět, který se řídí koherentními zákonitostmi. Dodejme, že tyto neeukleidovské geometrie jsou dvě. V hyperbolické geometrii Bolyaie a Lobačevského lze daným bodem, který neleží na dané přímce k ní vést nekonečně mnoho rovnověžek a součet úhlů v trojúhelníku je vždy menší než 180°. V eliptické geometrii žádné rovnoběžky neexistují a součet úhlů v trojúhelníku je vždy větší než 180°. Neeukleidovské geometrie neporušují žádné 'základní logické principy' jak si myslí Ivan Chvatík (str. 8 dole). Naopak byly budovány spolehnutím se na logické principy a na úkor geometrického názoru. Teprve padesát let po jejich vzniku našli Felix Klein a Henri Poincaré modely neeukleidovských geometrií v eukleidovské geometrii.Teprve od té doby je možné do světa neeukleidovských geometrií nahlížet skrze geometrický názor (viz například Kůrka [7]).

Současně se vznikem neeukleidovských geometrií vznikají nové algebraické struktury, které se také neopírají o žádný apriorní názor. V booleovské logice se pracuje s pravdivostními hodnotami true a false a logické spojky disjunkce a konjunkce z nich vytvářejí algebraickou strukturu (booleovskou algebru), ve které platí analogické algebraické identity jako pro čísla, například komutativní, asociativní a distributivní zákon. Teorie čísel zkoumá struktury zbytkových tříd $Z_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, ve kterých lze sčítat odčítat a násobit, a pokud je n prvočíslo, dokonce i dělit. V Z_2 například platí $1 + 1 = 0$, což vyjadřuje, že součet dvou lichých čísel je číslo sudé.

Podobně jako v matematice, i ve fyzice vede k novým náhledům matematický formalismus:

> Je pozoruhodné, že ve většině případů k paradigmatickému posunu nedošlo pod tlakem akumulovaného experimentálního materiálu, který volal po vysvětlení. Zato často, vedle zdánlivě nepatrných diskrepancí v jednotlivých experimentech, byl podnětem k paradigmatické změně teoretický, spekulativní nápad, zpravidla inspirovaný a nesený matematickým formalismem. To rozhodně platí, vedle mechaniky, o Maxwellově teorii, speciální i obecné relativitě a zčásti i o kvantové mechanice, jen u statistické fyziky byl vývoj složitější. V předchozí diskusi bylo ukázáno, že matematický pokrok doprovázel paradigmatické změny.
>
> Nyní předkládám silnější tézi, že matematizace může, a zpravidla bude, paradigmatickou změnu pohánět. Velický [15] str. 25.

Radikální opuštění geometrického názoru a spolehnutí se na logiku představovala Cantorova teorie množin. Odvíjí se od tvrzení, že reálných čísel je více než čísel přirozených či racionálních, tj. že množina reálných čísel má větší mohutnost než množina čísel přirozených. Abstraktnější a obecnější verze tohoto tvrzení říká, že libovolná množina X má menší mohutnost než potenční množina $\mathcal{P}(X)$ všech jejích podmnožin. To vedlo k závratné nekonečné hierarchii nekonečných kardinálních čísel, ve které geometrický názor nelze uplatnit. V Cantorově teorii množin se však objevily spory - k těm vedl postulát, že existuje množina všech prvků, které mají danou vlastnost (splňují danou formuli).

Spory v teorii množin vedly ke krizi, která si vyžádala důkladné promyšlení základů matematiky. Na přelomu 19. a 20. století vznikly tři alternativní filosofie matematiky - logicismus, intuicionsimus a formalismus, z nichž se formalismus ukázal jako nejvitálnější. Jeho proponentem byl David Hilbert, který se důsledně opřel o fregeovskou logiku. Ta představuje umělý formální jazyk, ve kterém se vyjadřují matematické věty i jejich důkazy. Ty jsou opřeny o axiomy dvou druhů. Logické axiomy vyjadřují zákony logiky a jsou součástí každé teorie. Mimologické axiomy jsou specifické pro teorii - jejich soubor danou teorii vytváří. Příkladem je Peanova aritmetika, která je teorií přirozených čísel. Nejvýznamnější formální teorií je ale Zermelo-Fraenkelova teorie množin (nebo s ní ekvivalentní teorie Gödel-Bernaysova). Vznikla oslabením Cantorovy teorie množin, které odstranilo její logické spory. V teorii množin se odehrává téměř celá současná matematika.

Původní Hilbertův program formalizace matematiky stanovil dva základní požadavky, které formální teorie měly splňovat - úplnost a bezespornost. Každé tvrzení (uzavřenou formuli bez volných proměnných) by mělo být možné v dané teorii buď dokázat nebo vyvrátit, tj. dokázat její negaci (úplnost) a nemělo by být možné v teorii odvodit spor (bezespornost). Gödelovy věty o neúplnosti ukázaly, že Hilbertův program je příliš ambiciózní a nedosažitelný. Jak Peanova aritmetika tak teorie množin jsou neúplné a nelze je zúplnit (algoritmicky rozpoznatelnou množinou axiomů). Spor se v nich sice nikdy nenašel ale jejich bezespornost nelze dokázat.

To však neznamená, že by byl formalismus zdiskreditován. Zákony logiky - logické axiomy a odvozovací pravidla spolu s mimologickými axiomy - poskytují formální rámec - pravidla hry, ve kterých se pohybuje matematické bádání. To spočívá v odvozování důsledků zvolených axiomů. Aby však hra měla smysl, aby stálo za to ji hrát, musí mít k reálnému světu nějaký vztah. Takový vztah k realitě mají i šachy - je to obraz vojenské bitvy. Pro vojevůdce je zkušenost se šachovou hrou jistě užitečná i když korespondence s realitou je zde velmi volná. [2]

Vztah k reálnému světu, i když někdy dost volný, mají i ty nejabstraktnější matematické teorie. Axiomy matematické teorie nejsou stanovovány svévolně. Jejich nalézání je vedeno intuicí a názorem. Ten ovšem není apriorní, ale vytváří se tak, jak se teorie rozvíjí (podrobněji viz Kůrka [5], [6]). Názorem je vedena i práce uvnitř matematické teorie. Říká nám, která tvrzení stojí za to dokazovat i jakým způsobem je máme dokazovat. Nalezené důkazy však jsou již na tomto názoru nezávislé. Proto nemluvíme o pravdivosti nalezených tvrzení ale jen o jejich dokazatelnosti. Věříme však, že bezesporná matematická teorie vytváří svébytný abstraktní svět, ve kterém dokázaná tvrzení pravdivá jsou. Takto lze interpretovat Gödelovu větu o úplnosti (podrobněji viz Trlifajová [13]).

Tímto způsobem vzniká velkolepá stavba matematiky jako součást lidské kultury, která není méně úžasná než největší zázraky živé i neživé přírody. [3] Matematika i celá lidská kultura je součástí neustále pokračujícího božího tvoření.

> Podle Tomáše Akvinského Bůh není jako bednář, který by vytvořil sud a pak od něj odešel, nýbrž stále ve svém stvoření přebývá, neboť stvoření, *creatio continua*, trvá stále. Svatý Augustin v podobném duchu říká, že Bůh stvořil všechny věci nikoli tak, že je nechal vejít do existence a pak je nechal jít vlastní cestou, nýbrž že v nich stále přebývá, a dále, že modlit se znamená zavřít oči a uvědomit si, že Bůh teď tvoří svět. Vácha [14] str. 56.

V oblasti kultury je ovšem toto boží dílo tvořeno skrze lidskou aktivitu.

> Tělo člověka se skládá ze stejných prvků Mendělejevovy periodické tabulky jako celý okolní vesmír, avšak na rozdíl od něj si existenci tohoto vesmíru uvědomuje. V nás hmota otevřela oči a uvědomila si svou existenci. Biblický člověk by doplnil, že jsme nejen stvořeni (created), ale též tvořící (creative), a že ve verši o tom, že člověk je stvořen k obrazu Božímu, dostává člověk zadání, program života. Tento hodnotový koncept tvoří základ židovské etiky. Člověk má povinnost napodobovat Boha, má být spolu-Tvůrcem stvoření, neboť stvoření není u konce a úkolem člověka je spolu s Bohem dokončit dílo. Vácha [14] str. 186.

Objekty matematické teorie existují ve stejném smyslu v jakém existují jiné produkty lidské kultury. Mají specifické vlastnosti, kterých se dobíráme důkazy. Víme ovšem, že některé jejich vlastnosti nejsou rozhodnutelné - tj. nejsou stanoveny. Tato nerozhodnutelnost je bytostnou součástí existence matematických objektů, například množiny přirozených čísel. Množina přirozených čísel se nenachází v nějakém odvěky existujícím platónském světě idejí, ale vyvíjí se s lidským poznáním, tak jak se vyvíjí teorie přirozených čísel. Za ustanovení přirozených čísel lze považovat pravidlo, že existuje první (nebo nulté) přirozené číslo, a že ke každému přirozenému číslu lze přičíst jednotku a dostat číslo odlišné od všech předchozích. Spíše než o množině, je vhodnější mluvit o struktuře přirozených čísel, kterou vytváří toto přičítání jednotky. Opřeme-li se o geometrický názor, rozšíříme tuto strukturu o sčítání a násobení svázané

[2] Dobrý šachista si vytváří názor, který ho vede při hodnocení šachových pozic, jejich předností a slabin. Když promýšlí své tahy a tahy protivníka, neuvažuje všechny možnosti, ale jenom ty relevantní. A tuto relevanci nahlíží názorem, který ovšem není apriorní. Vztah k realitě spočívá v tom, že také vojevůdce musí brát do úvahy relevantní alternativy.

[3] Netvrdím ovšem, že na této velkolepé stavbě matematiky se podílí každá matematická publikace. I v matematice je možné postupovat svévolně a vytvářet irelevantní teorie. Ty však jsou odsouzeny k zapomění a tím k nebytí.

aritmetickými identitami. Teorií, která formalizuje tuto geometrickou intuici je Robinsonova aritmetika (viz Sochor [12]). Silnější Peanova aritmetika vzniká přidáním axiomu matematické indukce. Z Gödelovy věty o neúplnosti víme, že ani Peanova aritmetika není úplná. U některých jejích nerozhodnutelných tvrzení můžeme najít intuitivní důvody proč je jako nové axiomy přijmout. To je případ Goodsteinovy věty, která v Peanově aritmetice není dokazatelná, ale intuicí založené na kombinatorice její pravdivost nahlížíme. Navíc je Goodsteinova věta dokazatelná v teorii množin (viz Sochor [12]).

V Zermelo-Fraenkelově teorii množin se dokazuje existence jediné množiny $\mathbb{N}$ přirozených čísel. Je to důsledek axiomu nekonečna, který postuluje existenci nekonečných množin (množina je nekonečná, má-li stejnou mohutnost jako některá její vlastní část). Chápeme-li $\mathbb{N}$ jako strukturu s aritmetickými operacemi, jsou v ní splněny všechny Peanovy axiomy. Takových struktur, které splňují Peanovy axiomy, je ovšem (nekonečně) mnoho a všechny obsahují $\mathbb{N}$ jako podstrukturu. Tím ovšem není jedinečnost struktury $\mathbb{N}$ dotčena. To není nijak neobvyklá situace. Existuje například mnoho různých elementárně ekvivalentních těles, tj. algebraických struktur se sčítáním, odčítáním, násobením a dělením, ve kterých platí stejné věty.

Druhý Vopěnkův argument proti formalismu se opírá o metamatematická čísla (viz Vopěnka [16], str. 26-28). Matematická logika má v matematice dvojí status. Abychom mohli pracovat v teorii množin a mohli dokazovat její tvrzení, potřebujeme vědět, co jsou to formule a co jsou to důkazy. K tomu potřebujeme vědět co jsou to přirozená čísla a musíme umět s nimi zacházet. Ověření důkazu nějakého tvrzení teorie množin je proces stejného řádu (i když složitější) jako ověření, že $2+3=5$. Metamatematická čísla jsou konkrétní čísla, se kterými se setkáváme v důkazech matematických vět. Avšak matematická logika je také matematická teorie - teorie racionálního uvažování. Zahrnuje i teorii modelů, což jsou struktury, tedy množiny s relacemi a operacemi. Jako taková je matematická logika budována uvnitř teorie množin. Její věty, jako Gödelovy věty o neúplnosti i Gödelova věta o úplnosti jsou věty teorie množin. Přirozená čísla, se kterými tyto věty operují, jsou prvky množiny $\mathbb{N}$. V této formalizované matematické logice nejsou žádá metamatematická čísla, která by tvořila vlastní část množiny přirozených čísel.

Matematika 20. a 21. století rozhodně není žádná slepá ulička, kterou by bylo třeba hodit do koše či uložit do muzea. Tato matematika vytvořila úžasné teorie, které nám pomáhají vyznat se v našem světě - například teorii pravděpodobnosti, teorii algoritmů nebo teorii dynamických systémů. Bez této matematiky by nebyly možné ani pozoruhodné náhledy moderní fyziky. Einsteinova teorie relativity je založena na diferenciální geometrii, kvantová mechanika zase na abstraktní teorii Hilbertových prostorů. Všechny tyto teorie jsou budovány nad teorií reálných čísel, která je podstatným způsobem založena na pojmu aktuálního nekonečna. Krize základů matematiky z přelomu 19. a 20. století byla dávno překonána. Tak jako v antickém Řecku je i nyní matematika vědou, která nám pomáhá porozumět světu a dobírat se pravdy.

Reference

[1] Jiří Fiala: Je elementární logika totéž co elementární logika prvního řádu? in: Výška, šířka, hloubka čas. Nadace VIZE 97, Praha 2013.
[2] Reuben Hersh: What is matehmatics, really. Oxford University Press, Oxford 1997.
[3] Ivan Chvatík: Pokus o pravdu, tato monografie.
[4] Paul Johnson: Dějiny 20. století. Rozmluvy, Praha 1991.
[5] Petr Kůrka: Metaforická povaha matematiky. in : Spor o přirozený svět. FILOSOFIA, Praha 2010.
[6] Petr Kůrka: Matematické pojmy, objekty a názor. in: Spor o matematizaci světa. Pavel Mervart, 2011.
[7] Petr Kůrka: Hyperbolická geometrie v díle M.C.Eschera. Pokroky matematiky, fyziky & astronomie, č. 4, ročník 59/2014, str. 293-301.
[8] Benson Mates: Stoic logic. Univeristy of California Press, Berkeley 1953.
[9] Otto Neugebauer: The exact sciences in antiquity. Brown University Press, Providence, Rhode Island 1957.
[10] Eleanor Robson: Mesopotamian mathematics: some historical background. in: Using history to teach mathematics (V.J.Katz, editor). Mathematical Association of America, 2000.
[11] Lucio Russo: The forgotten revolution. Springer, Berlin 2004.
[12] Antonín Sochor: Klasická matematická logika. KAROLINUM, Praha 2001.
[13] Kateřina Trlifajová: Podoby pravdy v matematice, tato monografie.
[14] Marek Vácha: Věda, víra, Darwinova teorie a stvoření podle knihy Genesis. Cesta, Praha 2014.
[15] Bedřich Velický: Matematizovaná přírodověda. in: Spor o matematizaci světa, Pavel Mervart, 2011.
[16] Petr Vopěnka: Velká iluze matematiky XX. století a nové základy. Vydavatelství Západočeské univerzity v Plzni, Nakladatelství Koniáš, Plzeň 2011.