Hyperbolická geometrie číselných soustav

Petr Kůrka

V roce 1872 proslovil Felix Klein habilitační přednášku, která vešla do dějin matematiky jako Erlangenský program. Ve své přednášce pojal Felix Klein geometrii jako studium invariantů transformačních grup. Tím poskytl jednotný rámec pro mnoho rozmanitých geometrií: od geometrie eukleidovské přes neeukleidovské geometrie Lobačevského, Bolyaie a Gausse po geometrii projektivní. Struktura transformačních grup úzce souvisí se strukturou systému komplexních čísel. To je nejzřetelněji vidět na kruhovém modelu neeukleidovské hyperbolické geometrie, který objevil Henri Poincaré. Na Poincarého modelu jsou založeny některé grafiky M.C.Eschera. Lze v něm také znázornit strukturu číselných soustav jako je binární znaménková soustava nebo soustava řetězových zlomků.

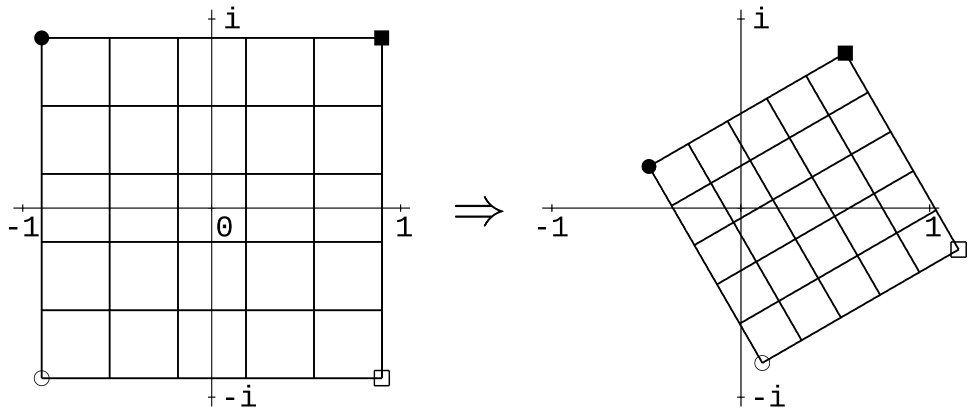
1 Transformační grupy

Komplexní rovina $\mathbb{C}$ je množina všech komplexních čísel tvaru $z = z_0 + iz_1$, kde z_0 a z_1 jsou reálná čísla a i je imaginární jednotka splňující identitu $i^2 = -1$. Komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ určuje bod roviny s kartézskými souřadnicemi (z_0, z_1). Eukleidovská geometrie komplexní roviny je určena **eukleidovskou metrikou**, ve které vzdálenost dvou bodů $z, w \in \mathbb{C}$ je absolutní hodnota jejich rozdílu $|z-w| = \sqrt{(z_0-w_0)^2 + (z_1-w_1)^2}$. Speciálně vzdálenost čísla z od nuly je jeho absolutní hodnota $|z| = \sqrt{z_0^2 + z_1^2}$. **Shodná transformace** je vzájemně jednoznačné zobrazení $M : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplexní roviny na sebe, které zachovává eukleidovskou metriku, tj. splňuje identitu $|M(z) - M(w)| = |z - w|$. Obecný tvar shodné transformace je $M_{(a,b)}(z) = az + b$, kde $a, b \in \mathbb{C}$ jsou komplexní čísla a $|a| = 1$. Číslo jehož absolutní hodnota je jedna lze psát ve tvaru $a = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$, takže

$$M_{(a,b)}(z) = (z_0 \cos\alpha - z_1 \sin\alpha + b_0) + i(z_0 \sin\alpha + z_1 \cos\alpha + b_1)$$

je otočení o úhel α složené s posunutím o vektor (b_0, b_1). Složení dvou shodných transformací $M_{(a,b)} \circ M_{(a',b')}(z) = aa'z + ab' + b$ je také shodná transformace. Inverzní transformace k $M_{(a,b)}$ je shodná transformace $M^{-1}_{(a,b)}(z) = (z - b)/a$. Množina vzájemně jednoznačných transformací nějakého prostoru X se nazývá **transformační grupa** prostoru X, je-li uzavřená na operaci skládání a inverze. Shodné transformace tedy tvoří transformační grupu $\mathcal{G}_0 = \{M_{(a,b)},\ \text{kde } a, b \in \mathbb{C},\ |a| = 1\}$ komplexní roviny $\mathbb{C}$. Eukleidovská metrika $|z - w|$ je **invariant** této grupy.

Větší transformační grupa je **grupa podobností** $\mathcal{G}_1 = \{M_{(a,b)},\ \text{kde } a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0\}$. Je-li $M_{(a,b)}$ podobnost, platí $|M_{(a,b)}(z) - M_{(a,b)}(w)| = |a| \cdot |z - w|$, tj. vzdálenosti se zvětšují nebo zmenšují v poměru $|a| : 1$. Podobnosti tedy vzdálenosti bodů nezachovávají, ale zachovávají poměry vzdáleností $|x - y|/|z - w|$. To je absolutní hodnota veličiny $P(x, y, z, w) = (x - y)/(z - w)$, kterou podobnosti zachovávají také. Je-li $M \in \mathcal{G}_1$ podobost, je $P(M(x), M(y), M(z), M(w)) = P(x, y, z, w)$, takže $P(x, y, z, w)$ je invariant grupy podobností $\mathcal{G}_1$. Obě grupy $\mathcal{G}_0$ i $\mathcal{G}_1$ mají mnoho dalších invariantů. Například rovinný útvar podobný čtverci je opět čtverec, takže vlastnost "býti čtvercem" je invariantem grupy podobností. Základními invarianty obou geometrií jsou ovšem vlastnosti "býti bodem", "býti přímkou" a vztah náležení. Jestliže bod $z \in \mathbb{C}$ leží na přímce p, pak bod $M(z)$ leží na přímce $M(p)$. Na obrázku 1 je znázorněna podobnost, která je složením zmenšení v poměru $2 : 3$, otočení o $\pi/6$, tj. o $30°$ a posunu o $1/3$ ve směru osy x. Pravoúhlá síť vlevo se zobrazuje na pravoúhlou síť vpravo.



Obrázek 1: Podobnost $M(z) = (\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{3})z + \frac{1}{3}$: složení zmenšení v poměru 2 : 3 otočení o $\pi/6$ a posunu o 1/3 ve směru osy x

2 Konformní geometrie

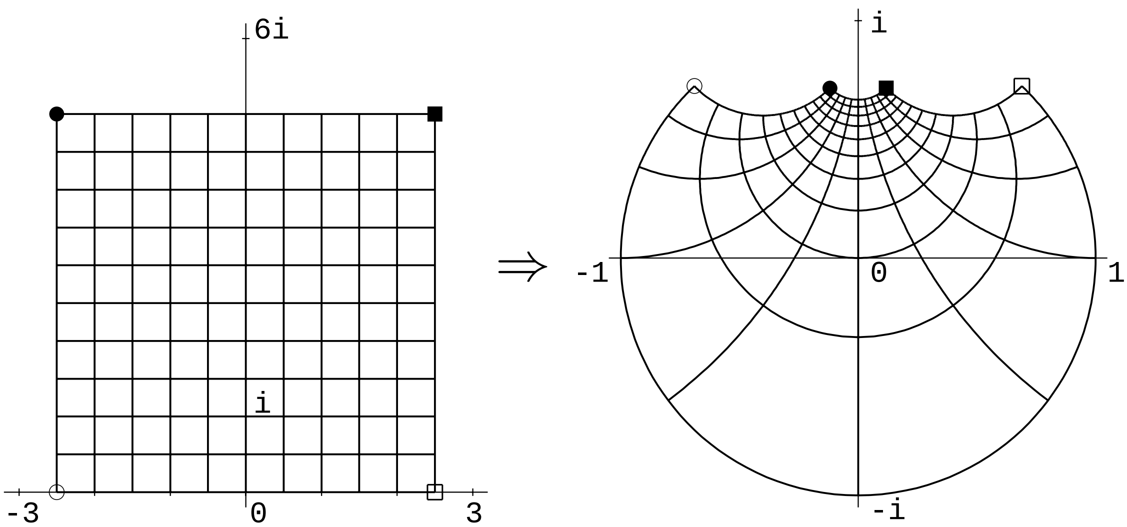
Zobecněním linárních transformací jsou **möbiovské transformace** tvaru

$$M_{(a,b,c,d)}(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ kde } ad - bc \neq 0.$$

Podmínka $ad - bc \neq 0$ je nutná, nemá-li se jednat o konstatní zobrazení. Möbiovská transformace $M_{(a,b,c,d)}$ ovšem není transformací celé komplexní roviny, protože není definována v bodě $-d/c$, kde je jmenovatel nulový. Také v žádném bodě nenabývá hodnoty a/c, takže je vzájemně jednoznačným zobrazením množiny $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ na množinu $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$. Tento neuspokojivý stav se řeší tím, že se ke komplexní rovině přidává nevlastní bod ∞ v nekonečnu, takže vzniká rozšířená komplexní rovina $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Na tomto rozšířeném oboru definujeme möbiovskou transformaci předpisem $M_{(a,b,c,d)}(-d/c) = \infty$, $M_{(a,b,c,d)}(\infty) = a/c$. Möbiovské transformace tvoří grupu

$$\mathcal{G} = \{M_{(a,b,c,d)}, \text{ kde } a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0\},$$

která je transformační grupou rozšířené komplexní roviny $\overline{\mathbb{C}}$.



Obrázek 2: Zobrazení $\mathbf{d}(z) = (iz + 1)/(z + i)$ horní poloroviny na jednotkový kruh

Möbiovské transformace vytvářejí tzv. **konformní geometrii**, protože zachovávají úhly křivek. Protínají-li se dvě křivky pod nějakým úhlem α, protínají se jejich obrazy pod stejným úhlem α.

Konformní zobrazení jsou "lokální podobnosti": v malých oblastech se neliší příliš od podobností, takže věrně zobrazují poměry vzdáleností. Nezachovávají sice ani vzdálenosti bodů ani poměry vzdáleností bodů, zachovávají však poměr poměrů, takzvaný **dvojpoměr**

$$D(x,y,z,w) = \frac{x-z}{x-w} : \frac{y-z}{y-w} = \frac{(x-z)(y-w)}{(x-w)(y-z)}.$$

Pro Möbiovské transformace $M \in \mathcal{G}$ platí $D(M(x), M(y), M(z), M(w)) = D(x,y,z,w)$. Proto se konformní transformace používají v kartografii, kde se jedná o zobrazení části zemského povrchu nebo části nebeské sféry na rovinu mapy. Například mapa nebeské sféry na pražském staroměstském orloji je vytvořena konformní stereografickou projekcí. Na rozdíl od podobností möbiovské transformace nezachovávají přímky, takže vlastnost "býti přímkou" není invariant konformní geometrie. Obrazem přímky je totiž buď přímka nebo kružnice, přitom obrazem kružnice je také buď přímka nebo kružnice. Invariantem konformní geometrie je tedy vlastnost "býti **zobecněnou kružnicí**", což je buďto kružnice nebo přímka s nevlastním bodem.

Na obrázku 2 vidíme möbiovskou transformaci $\mathbf{d}(z) = (iz+1)/(z+i)$. Každou svislou přímku tato transformace převádí na kružnici, která se dotýká imaginární osy v bodě i. Imaginární osu transformace $\mathbf{d}$ zachovává protože $\mathbf{d}(iy) = (-y+1)/(iy+i) = i(y-1)/(y+1)$. Každou vodorovnou přímku transformace $\mathbf{d}$ převádí na kružnici, která kolmo protíná imaginární osu ve dvou bodech, z nichž jeden je i. Speciálně reálnou osu převádí na jednotkovou kružnici

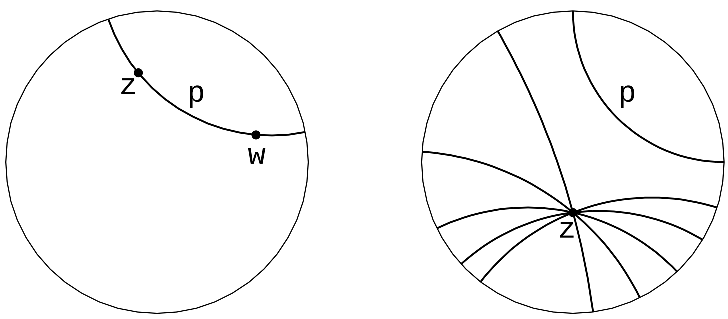
$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\} = \{\cos t + i \sin t : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Je-li totiž x reálné, je $|\mathbf{d}(x)| = |(2x + ix^2 - i)/(x^2+1)| = 1$. Protože $\mathbf{d}(\infty) = i$, je transformace $\mathbf{d} : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{T}$ vzájemně jednoznačným zobrazením reálné přímky $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ na jednotkovou kružnici $\mathbb{T}$. Transformace $\mathbf{d}$ je ale také vzájemně jednoznačným zobrazením **horní poloroviny** $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : \ z_1 > 0\}$, která je tvořena komplexními čísly s kladnou imaginární částí, na otevřený **jednotkový kruh** $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Bod i horní poloroviny převádí na střed $\mathbf{d}(i) = 0$ jednotkového kruhu.

Grupa Möbiovských transformací je největší transformační grupa rozšířené komplexní roviny a konformní geometrie je tedy její nejobecnější geometrií. Tato grupa má však mnoho podgrup, které vytvářejí další geometrie. Například podobnosti jsou právě ty möbiovské transformace $M_{(a,b,c,d)}$, které zachovávají nevlastní bod ∞, tj. pro které platí $M_{(a,b,c,d)}(\infty) = \infty$ a tedy $c = 0$. Další významná podgrupa sestává z těch transformací, které mají reálné koeficienty. Jsou-li a, b, c, d, i x reálné, je také $M_{(a,b,c,d)}(x)$ reálné, takže **reálné Möbiovské transformace** zachovávají rozšířenou reálnou přímku $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, Jestliže je navíc determinant $ad - bc > 0$ kladný, zachovávají transformace $M_{(a,b,c,d)}$ orientaci a také zachovávají horní polorovinu $\mathbb{U}$: Je-li $z \in \mathbb{U}$, je i $M_{(a,b,c,d)}(z) \in \mathbb{U}$. Grupa

$$\mathcal{G}_{\mathbb{U}} = \{M_{(a,b,c,d)} : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ ad - bc > 0\}$$

reálných Möbiových transformací zachovávajících orientaci je tedy transformační grupou $\mathbb{U}$ i transformační grupou $\overline{\mathbb{R}}$.



Obrázek 3: Poincarého model hyperbolické geometrie

3 Hyperbolická geometrie

Reálné Möbiovské transformace zachovávají jistou vzdálenost (metriku) na $\mathbb{U}$, nejedná se ale o metriku eukleidovskou. Je to metrika neeukleidovské Lobačevského hyperbolické geometrie. Tuto geometrii lze lépe zahlédnout na jejím alternativním modelu, kterým je otevřený jednotkový kruh $\mathbb{D}$. Protože transformace $\mathbf{d} : \mathbb{U} \to \mathbb{D}$ je vzájemně jednoznačným zobrazením horní poloroviny na vnitřek jednotkového kruhu, každá reálná Möbiovská transformace $M_{(a,b,c,d)} \in \mathcal{G}_{\mathbb{U}}$ určuje **kruhovou möbiovskou transformaci**

$$\widehat{M}_{\alpha,\beta}(z) = \mathbf{d} \circ M_{(a,b,c,d)} \circ \mathbf{d}^{-1}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}},$$

která zachovává jednotkový kruh. Zde $\alpha = (a+d) + (b-c)i$, $\beta = (b+c) + (a-d)i$ a $\overline{\alpha} = \alpha_0 - i\alpha_1$, $\overline{\beta} = \beta_0 - i\beta_1$, jsou čísla **komplexně sdružená** k α a β. Z nerovnosti $ad - bc > 0$ plyne $|\alpha| > |\beta|$. Kruhové Möbiovské transformace tvoří grupu

$$\mathcal{G}_{\mathbb{D}} = \{\widehat{M}_{\alpha,\beta} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ |\alpha| > |\beta|\},$$

která je transformační grupou jednotkového kruhu i transformační grupou jednotkové kružnice.

Hyperbolická geometrie jednotkového kruhu $\mathbb{D}$ je vytvořena **diferenciální formou**

$$ds = \frac{|dz|}{1 - |z|^2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - x^2 - y^2},$$

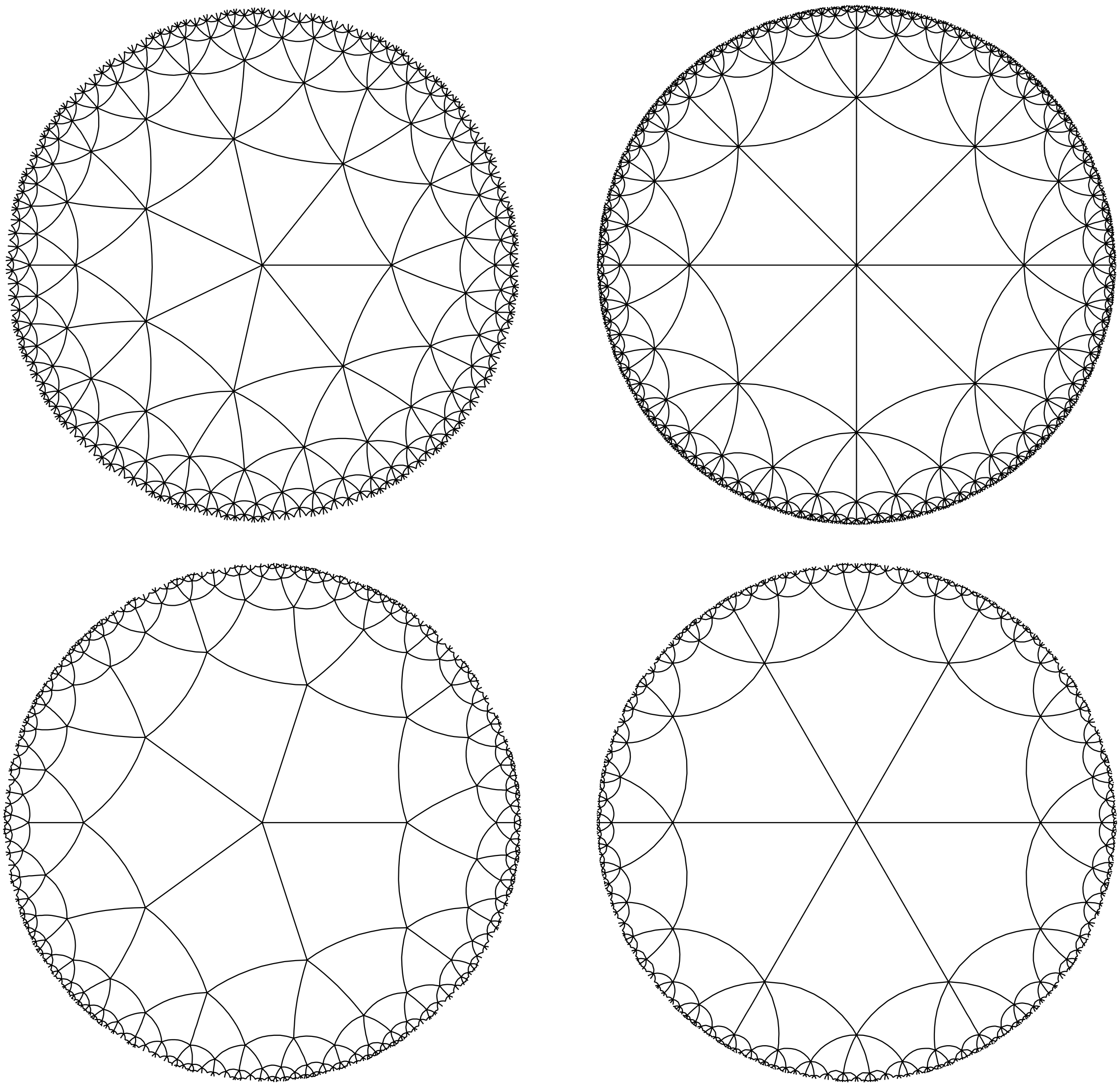
která určuje délku ds infinitesimálního vektoru $dz = dx + idy$ umístěného v bodě $z = x + iy$. Diferenciální forma je základní pojem **diferenciální geometrie** B.Riemanna. V blízkosti nulového bodu $z = 0$ se diferenciální forma hyperbolické geometrie příliš neliší od diferenciální formy eukleidovské geometrie $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Naopak v blízkosti jednotkové kružnice je jmenovatel $1 - x^2 - y^2$ malý, takže malým eukleidovským vzdálenstem odpovídají velké hyperbolické vzdálenosti. Na jednotkové kružnici již diferenciální forma není definována, protože její jmenovatel je tam nulový. Délku libovolné hladké křivky uvnitř jednotkového kruhu lze vypočítat integrací diferenciální formy podél této křivky. Mezi všemi křivkami, které spojují dané dva různé body $z, w \in \mathbb{D}$ existuje jediná křivka nejkratší délky, která se nazývá **geodetikou**. Touto geodetikou je oblouk té kružnice, která je kolmá na jednotkovou kružnici. Ve speciálním případě kdy body leží na průměru jednotkové kružnice je geodetikou eukleidovská úsečka. Délka geodetiky spojující body $z, w \in \mathbb{D}$ je

$$d(z, w) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - z\overline{w}| + |z - w|}{|1 - z\overline{w}| - |z - w|}$$

Speciálně $d(0, re^{it}) = \frac{1}{2} \ln(1 + r)/(1 - r)$, takže vzdálenost od středu jednotkového kruhu k jeho obvodu je nekonečná. Proto nazýváme jednotkový kruh s hyperbolickou metrikou **hyperbolickou rovinou**. Hyperbolická geometrie bodů a geodetik splňuje všechny axiomy eukleidovské geometrie kromě pátého axiomu o rovnoběžkách. Dané dva body $z, w \in \mathbb{D}$ určují jedinou geodetiku p, která jimi prochází (obrázek 3 vlevo), ale daným bodem z lze vést k dané geodetice p nekonečně mnoho rovnoběžek, tj. geodetik které ji neprotínají (obrázek 3 vpravo).

Hyperbolickou geometrii lze zahlédnout na teselacích, tj. dlážděních pravidelnými mnohoúhelníky. Součet úhlů trojúhelníka (tvořeného geodetikami) je vždy menší než π tj. $180°$, a je tím menší, čím je trojúhelník větší. Pro každé $n > 6$ tedy existuje dláždění stejně velkými rovnostrannými trojúhelníky, jejichž úhly jsou $2\pi/n$, takže v každém vrcholu dláždění se stýká n trojúhelníků (obrázek 4 nahoře). Podobně pro každé $n > 4$ existuje dláždění stejně velkými čtverci, tj. pravidelnými čtyřúhelníky s úhly $2\pi/n$, kde se v každém vrcholu stýká n čtyřúhelníků (obrázek 4 dole). Na této geometrii jsou založeny některé grafické listy M.C.Eschera. Na obrázku 5 je hyperbolická rovina zaplněna stejně velkými anděly a čerty.

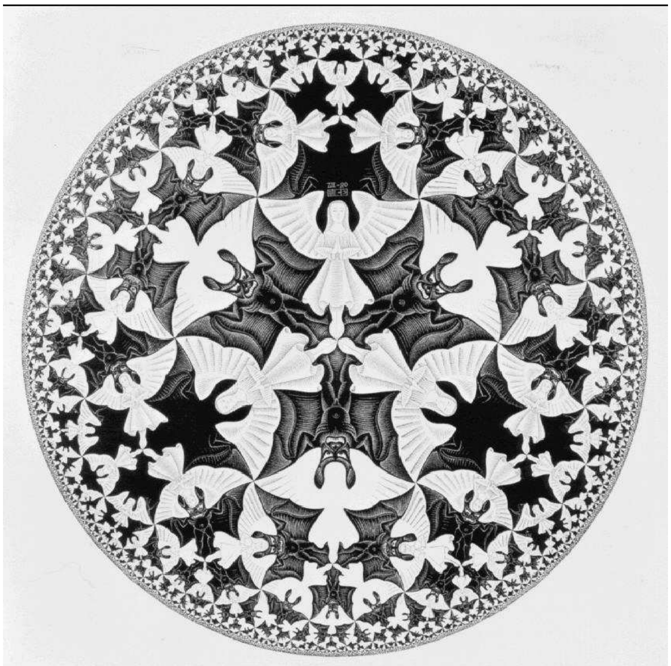
Transformační grupa $\mathcal{G}_{\mathbb{D}}$ hyperbolickou metriku zachovává. Pro každou transformaci $\widehat{M} \in \mathcal{G}_{\mathbb{D}}$ platí $d(\widehat{M}(z), \widehat{M}(w)) = d(z, w)$. To znamená, že kruhové Möbiovské transformace převádí geodetiky na geodetiky. Möbiovské transformace klasifikujeme podle počtu a umístění jejich pevných bodů. Říkáme že $z \in \mathbb{C}$ je pevný bod transformace M, pokud $M(z) = z$. Tato rovnice je kvadratická



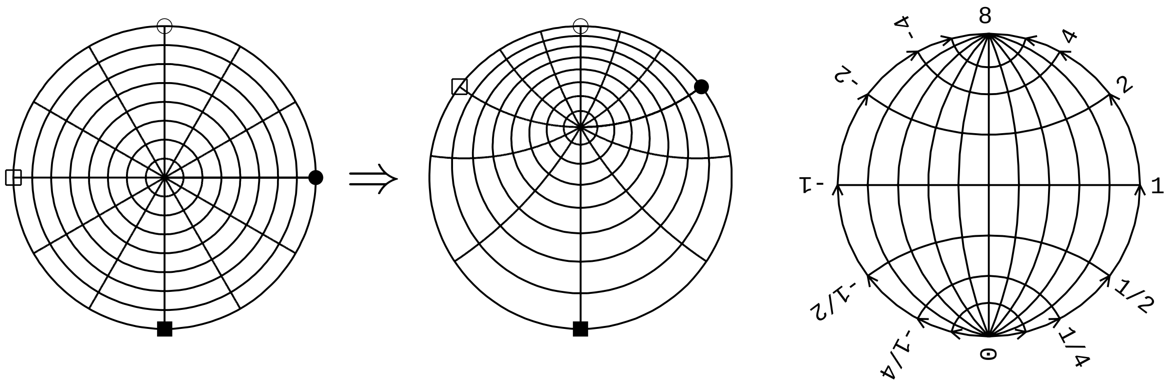
Obrázek 4: Dláždění hyperbolické roviny rovnostrannými trojúhelníky (nahoře) a pravidelnými čtyřúhelníky (dole)

a má v komplexní rovině dvě nebo jedno řešení. Reálná möbiovská transformace je **hyperbolická**, má-li dva pevné body v $\overline{\mathbb{R}}$. Odpovídající kruhová transformace má pak dva pevné body v $\mathbb{T}$. Transformace je **parabolická**, má-li jediný pevný bod ležící v $\overline{\mathbb{R}}$, případně v $\mathbb{T}$. Transformace je **eliptická**, nemá-li žádný pevný bod v $\overline{\mathbb{R}}$, případně v $\mathbb{T}$. V tomto případě má jediný pevný bod v $\mathbb{U}$, případně v $\mathbb{D}$. Reálné hyperbolické transformaci $F_2(x) = 2x$ odpovídá kruhová transformace $\widehat{F}_2(z) = (3z + i)/(-iz + 3)$ na obrázku 6. Pravoúhlá síť kružnic se středem 0 a jejich poloměrů (obrázek 6 vlevo) se převádí na pravoúhlou síť hyperbolických kružnic se stejným (hyperbolickým) středem a geodetik, které z tohoto středu vychází. (obrázek 6 uprostřed). Hyperbolická kružnice je také eukleidovskou kružnicí, její hyperbolický a eukleidovský střed je ale obecně různý. Transformace $\widehat{F}_2$ má pevné body i a $-i$, které odpovídají pevným bodům ∞ a 0 transformace F_2. Geodetika kolmá na imaginární osu spojující body $\mathbf{d}(-x)$ a $\mathbf{d}(x)$ se převádí na geodetiku spojující body $\mathbf{d}(-2x)$ a $\mathbf{d}(2x)$ (obrázek 6 vpravo).

Parabolické reálné transformaci $F_1(x) = x + 1$ s pevným bodem ∞ odpovídá parabolická transformace $\widehat{F}_1(z) = (2z + iz + 1)/(z + 2 - i)$ na obrázku 7 s pevným bodem i. Eliptické reálné transformaci $F_0(x) = -1/x$ s pevným bodem i odpovídá eliptická transformace $\widehat{F}_0(z) = -z$ s



Obrázek 5: M.C.Escher: Circle Limit IV



Obrázek 6: Transformace $\widehat{F}_2(z) = (3z+i)/(-iz+3)$ příslušná k $F_2(x) = 2x$

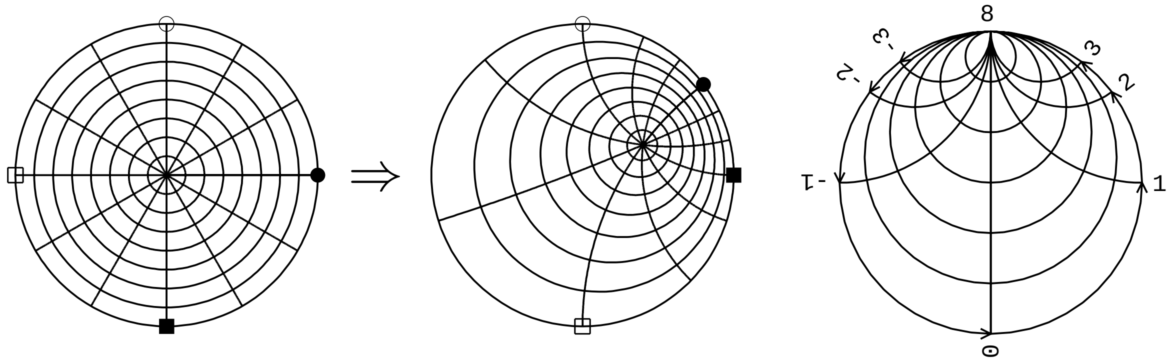
pevným bodem 0, která je otočením jednotkového kruhu (i komplexní roviny) o π, tj. o 180°.

4 Binární znaménková soustava

Klasické poziční číselné soustavy jako je dekadická nebo binární soustava, jsou založeny na iteracích lineárních transformací. Pro binární soustavu s abecedou $B = \{0, 1\}$ a číslicemi 0 a 1 jsou těmito transformacemi $F_0(x) = x/2$ a $F_1(x) = (x+1)/2$. Označme $B^+ = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots\}$ množinu všech konečných **binárních slov** (řetězců číslic) abecedy B a $B^{\mathbb{N}}$ množinu všech nekonečných binárních slov $u = u_0u_1u_2\ldots$, kde $u_i \in B$. Pro každé konečné slovo $u = u_0 \ldots u_{n-1} \in B^n$ délky n máme složenou transformaci

$$F_u(x) = F_{u_0} \circ \cdots \circ F_{u_{n-1}}(x) = \frac{u_0}{2} + \frac{u_1}{4} + \cdots + \frac{u_{n-1}}{2^n} + \frac{x}{2^n}.$$

Například $F_{01}(x) = (x+1)/4$, zatímco $F_{10}(x) = (x/2+1)/2 = (x+2)/4$. Pro nekonečné binární slovo $u \in B^{\mathbb{N}}$ označme $u_{[0,n)} = u_0 \cdots u_{n-1}$ jeho počáteční úsek délky n. Pak pro každé reálné x



Obrázek 7: Transformace $\widehat{F}_1(z) = (2z + iz + 1)/(z + 2 - i)$ příslušná k $F_1(x) = x + 1$

dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} F_{u_{[0,n)}}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j}{2^{j+1}} = \frac{u_0}{2} + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{8} + \cdots$$

a to je hodnota čísla které v binární soustavě zapisujeme jako $0.u_0u_1u_2\ldots$. Pomocí transformací F_0 a F_1 ovšem lze získat pouze čísla jednotkového intervalu $[0, 1]$. Přidáme-li další tranfsormace, můžeme získat každé číslo rozšířené reálné přímky $\overline{\mathbb{R}}$. Uvažujme abecedu $A = \{\overline{1}, 0, 1, 2\}$, kde $\overline{1}$ symbolizuje -1 a přidejme další transformace $F_{\overline{1}}(x) = (x - 1)/2$, $F_2(x) = 2x$. Geometrické vlastnosti této binární znaménkové číselné soustavy jsou vidět na odpovídajících kruhových möbiovských transformacích $\widehat{F}_a = \mathbf{d}F_a\mathbf{d}^{-1}$. Kruhová möbiovská transformace $\widehat{M} \in \mathcal{G}_{\mathbb{D}}$ je jednoznačně určena svou hodnotou $\widehat{M}(0) \in \mathbb{D}$ v nule a svým rotačním úhlem $\alpha(\widehat{M})$, který určuje o kolik se okolí nulového bodu při transformaci otáčí. Lze ho vypočítat z derivace $\widehat{M}'(0) = |\widehat{M}'(0)|e^{i\alpha(\widehat{M})}$.

Na obrázku 8 jsou binární slova u vyznačena u bodů $\widehat{F}_u(0)$ ve směru $\alpha_u = \alpha(\widehat{F}_u)$. Přitom bod $\widehat{F}_{ua}(0)$ je spojen s bodem $F_u(0)$ křivkou $F_uF_a^t(0)$ parametrizovanou reálným číslem $t \in [0, 1]$. Zde F_a^t jsou Möbiovské transformace takové, že F_a^0 je identita, $F_a^1 = F_a$ a $F_a^{t+s} = F_a^t \circ F_a^s$. Například pro $F_2(x) = 2x$ je $F_2^t(x) = 2^t x$. Ve středu kruhu je umístěno prázdné slovo, ze kterého vycházejí čtyři křivky k bodům s číslicemi $\overline{1}, 0, 1, 2$. Z každého tohoto bodu vycházejí křivky ke slovům délky 2, atd.

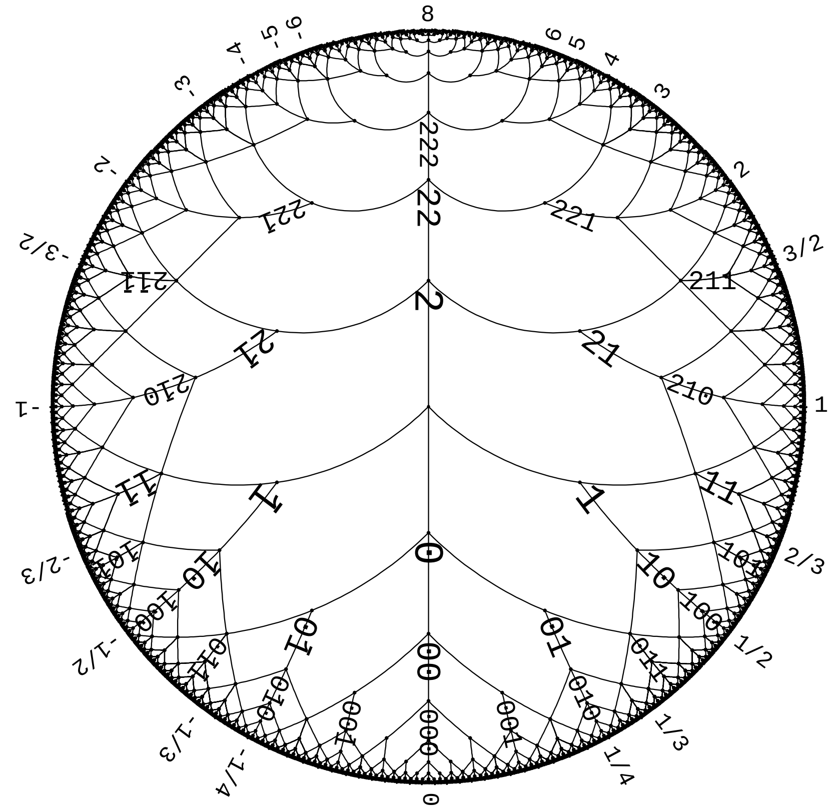
S rostoucí délkou slova $u \in A^+$ se hodnoty $\widehat{F}_u(0)$ přibližují k bodům jednotkové kružnice, které odpovídají reálným číslům. Pro každé reálné číslo $x \in \overline{\mathbb{R}}$ existuje nekonečné slovo $u \in A^{\mathbb{N}}$ takové že $\lim_{n\to\infty} \widehat{F}_{u_{[0,n)}}(0) = \mathbf{d}(x)$. Ne každé nekonečné slovo však určuje nějaké reálné číslo. Například nekonečné slovo $u = (02)^\infty = 02020\ldots$ limitu nemá, protože transformace F_0 a F_2 jsou navzájem inverzní a $F_{u_{[0,n)}}$ je buď identita nebo F_0. Proto je třeba pro kódování reálných čísel některé kombinace číslic zakázat. Tato zakázaná množina může být volena různým způsobem. Pro binární znaménkový systém s abecedou A volíme množinu zakázaných slov $D = \{20, 02, 12, \overline{1}2, 1\overline{1}, \overline{1}1\}$. Označme $\Sigma_D \subset A^{\mathbb{N}}$ množinu všech nekonečných slov která neobsahují jako podslovo žádné slovo množiny D. Tato množina se nazývá **posun**. **Binární znaménková soustava** tedy sestává ze souboru möbiovských transformací $(\widehat{F}_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D})_{a\in A}$ indexovaných konečnou abecedou A, a z konečné množiny zakázaných slov $D \subset A^+$. Číselná soustava určuje **symbolické zobrazení** $\Phi : \Sigma_D \to \overline{\mathbb{R}}$, které každému nekonečnému slovu $u \in \Sigma_D$ přiřazuje reálné číslo $\Phi(x)$, takové že platí

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{F}_{u_{[0,n)}}(0) = \mathbf{d}(\Phi(x)).$$

Každé slovo posunu $u \in \Sigma_D$ má tvar buď $u = 2^\infty$, nebo $u = 2^n v$, kde $n \geq 0$ a $v \in \{\overline{1}, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$ již číslici 2 neobsahuje. Zde n odpovídá "řádu" čísla, tj. umístění binární tečky. Hodnota čísla $u = 2^n v$ je totiž

$$\Phi(2^k v) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{k-j-1} v_j = 2^{k-1}v_0 + 2^{k-2}v_1 + 2^{k-3}v_2 + \cdots$$

Hodnota slova 2^∞ je ovšem $\Phi(2^\infty) = \infty$. Binární znaménková číselná soustava je **redundantní**, to znamená že dané reálné číslo má mnoho různých symbolických vyjádření. Redundance podstatně



Obrázek 8: Binární znaménková soustava

zjednodušuje algoritmy pro sčítání, násobení, a pro jiné aritmetické operace. Proto se redundantní číselné soustavy používají v počítačové aritmetice.

5 Řetězové zlomky

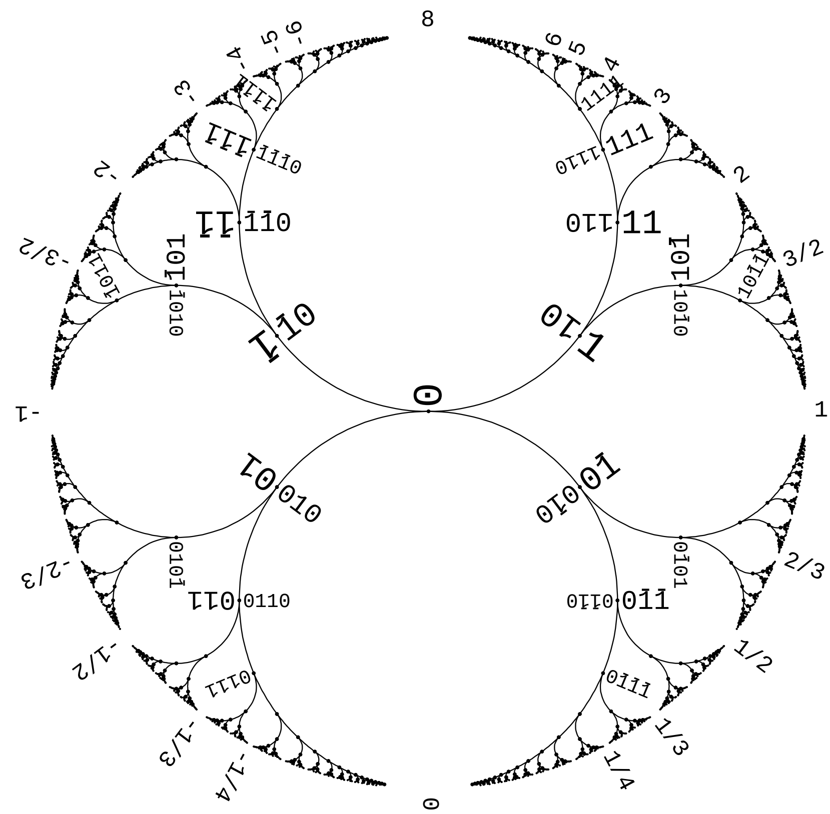
Řetězové zlomky vznikají při klasické úloze hledání společné míry dvou úseček Eukleidovým algoritmem. Tomu odpovídá hledání největšího společného dělitele dvou přirozených čísel. Jsou-li $x_0 > x_1$ délky úseček, jejichž společnou míru hledáme, odčítáme opakovaně kratší od delší až zbude úsečka x_2 kratší než x_1 a tento postup opakujeme pro x_1 a x_2. Dostáváme tak posloupnost délek úseček $x_0, x_1, \ldots, x_n$ a posloupnost kladných celých čísel $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, které splňují vztahy

$$x_0 = a_0 x_1 + x_2,\ x_1 = a_1 x_2 + x_3, \ldots, x_{n-2} = a_{n-2} x_{n-1} + x_n,\ x_{n-1} = a_{n-1} x_n.$$

Odtud dostáváme vyjádření poměru x_0/x_1 řetězovým zlomkem

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{x_1} &= a_0 + \frac{x_2}{x_1} = a_0 + \frac{1}{x_1/x_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{x_3}{x_2}} = \cdots \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}} \end{aligned}$$

Pokud ovšem délky úseček x_0 a x_1 nejsou souměřitelné, tj. pokud jejich poměr je iracionální, Eukleidův algoritmus se nezastaví a příslušný řetězový zlomek je nekonečný. Vidíme, že při vyjadřování poměru x_0/x_1 řetězovým zlomkem se používají möbiovské transformace $x - 1$ a $1/x$. Od x_0/x_1 se a_0-krát odečte jednička až získáme x_2/x_1, odtud transformací $1/x$ získáme x_1/x_2 a postup opakujeme. Transformace $1/x$ ovšem nezachovává orientaci, takže místo ní volíme raději $-1/x$ a pak



Obrázek 9: Řetězové zlomky

ovšem potřebujeme také zobrazení $x+1$. Tak dostáváme číselnou **soustavu řetězových zlomků** s abecedou $A = \{\overline{1}, 0, 1\}$ a transformacemi

$$F_{\overline{1}}(x) = x - 1,\ F_0(x) = -1/x,\ F_1(x) = x + 1.$$

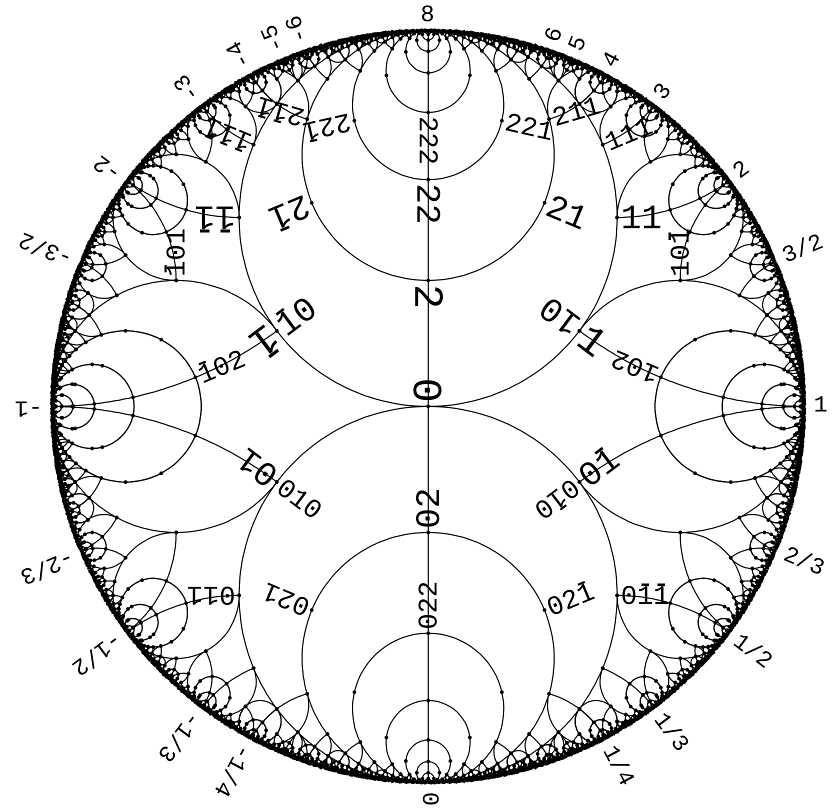
Jako zakázaná slova volíme $D = \{00, 1\overline{1}, \overline{1}1, 101, \overline{1}0\overline{1}\}$. Transformace F_0 je totiž inverzní sama k sobě a F_1 je inverzní k $F_{\overline{1}}$. Hodnoty příslušných transformací $\widehat{F}_u(0)$ a jejich směry α_u jsou na obrázku 9. Protože transformace $\widehat{F}_0$ je otočení o π, platí $\widehat{F}_{u0}(0) = \widehat{F}_u(0)$ a $\alpha_{u0} = \alpha_u + \pi$. Slovo ua má stejné umístění jako slovo u ale opačný směr. Každé konečné slovo $u \in \Sigma_D$ můžeme vyjádřit ve tvaru $u = 1^{a_0}01^{a_1}0\cdots01^{a_n}$. Zde používáme konvenci $1^{-n} = \overline{1}^n$, takže například $1^{-2}01^3 = \overline{1}\overline{1}0111$. Protože 101 a $\overline{1}0\overline{1}$ jsou zakázaná slova, je $a_i a_{i+1} \leq 0$. Pro $i > 0$ je $a_i \neq 0$, zatímco a_0 může být nulové. Obecný tvar transformace konečného slova u je

$$F_u(x) = F_1^{a_0}F_0F_1^{a_1}\cdots F_0F_1^{a_n}(x) = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cdots - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{x_n}}}$$

Hodnota nekonečného slova $u = 1^{a_0}01^{a_1}0\cdots$ je pak nekonečný řetězový zlomek s koeficienty a_i. Například $\Phi(10\overline{1}^\infty) = \Phi(0\overline{1}01^\infty) = 1$ a $\Phi(1^\infty) = \Phi(\overline{1}^\infty) = \infty$. Soustava řetězových zlomků ovšem není redundantní. Každé racionální číslo má právě dvě vyjádření, zatímco každé iracionální číslo má vyjádření jediné. Proto pro tuto soustavu nelze sestrojit efektivní aritmetické algoritmy.

6 Binární řetězové zlomky

Konvergence v soustavě řetězových zlomků je pomalá, proto je vhodné jí kombinovat s binární soustavou. To lze učinit více způsoby. Na obrázku 10 je soustava **binárních řetězových zlomků**



Obrázek 10: Binární řetězové zlomky

s abecedou $A = \{\bar{1}, 0, 1, 2\}$, transformacemi

$$F_{\bar{1}}(x) = x - 1,\ F_0(x) = -1/x,\ F_1(x) = x + 1,\ F_2(x) = 2x,$$

a zakázanými slovy $D = \{00, 1\bar{1}, \bar{1}1, 101, \bar{1}0\bar{1}, \bar{1}2, 12, 20, 210, 2\bar{1}0\}$. Soustava binárních řetězových zlomků spojuje výhody binární znaménkové soustavy a soustavy řetězových zlomků. Každé racionální číslo má vyjádření tvaru $u2^\infty$ a soustava je redundantní, takže pro ní existují efektivní aritmetické algoritmy.

Reference

[1] P.Kůrka: A symbolic representation of the real Möbius group. Nonlinearity 21:613-623, 2008.

[2] P.Kůrka: Möbius number systems with sofic subshifts.

[3] A.Kazda: Convergence in Möbius number systems.